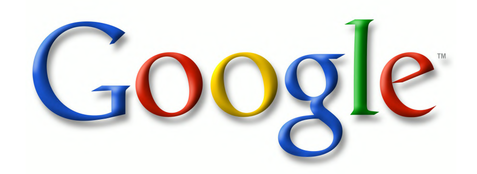
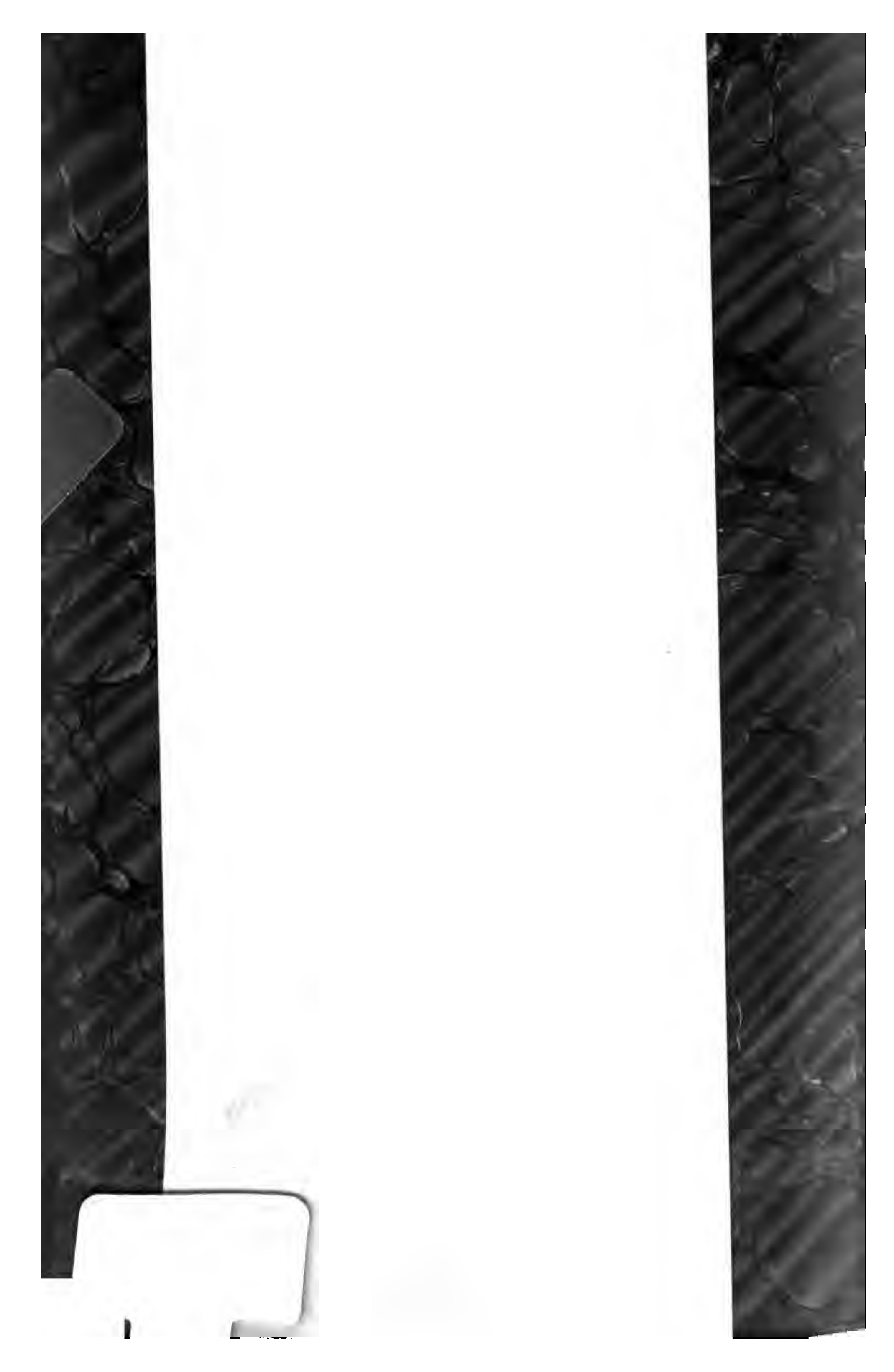
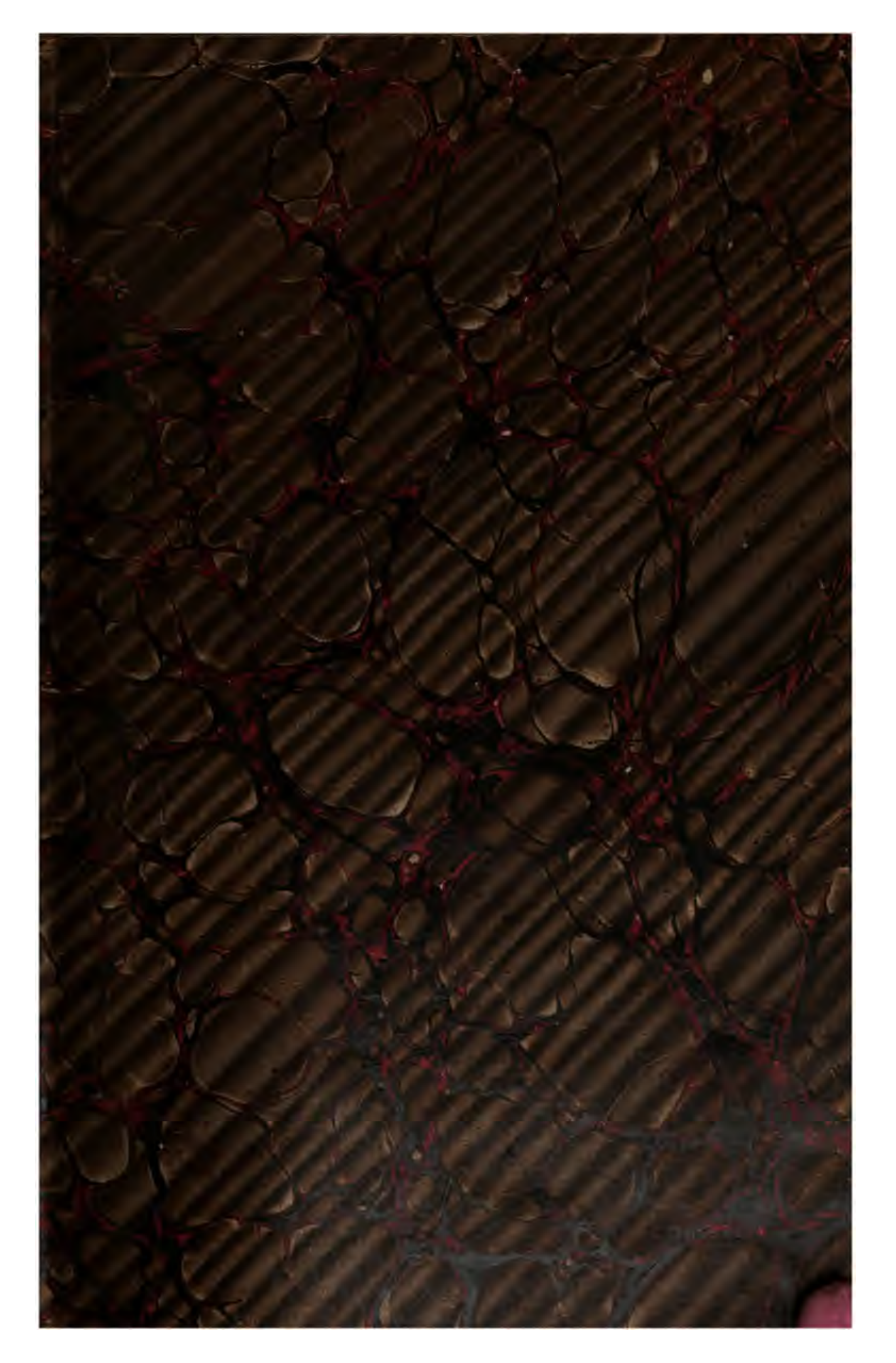
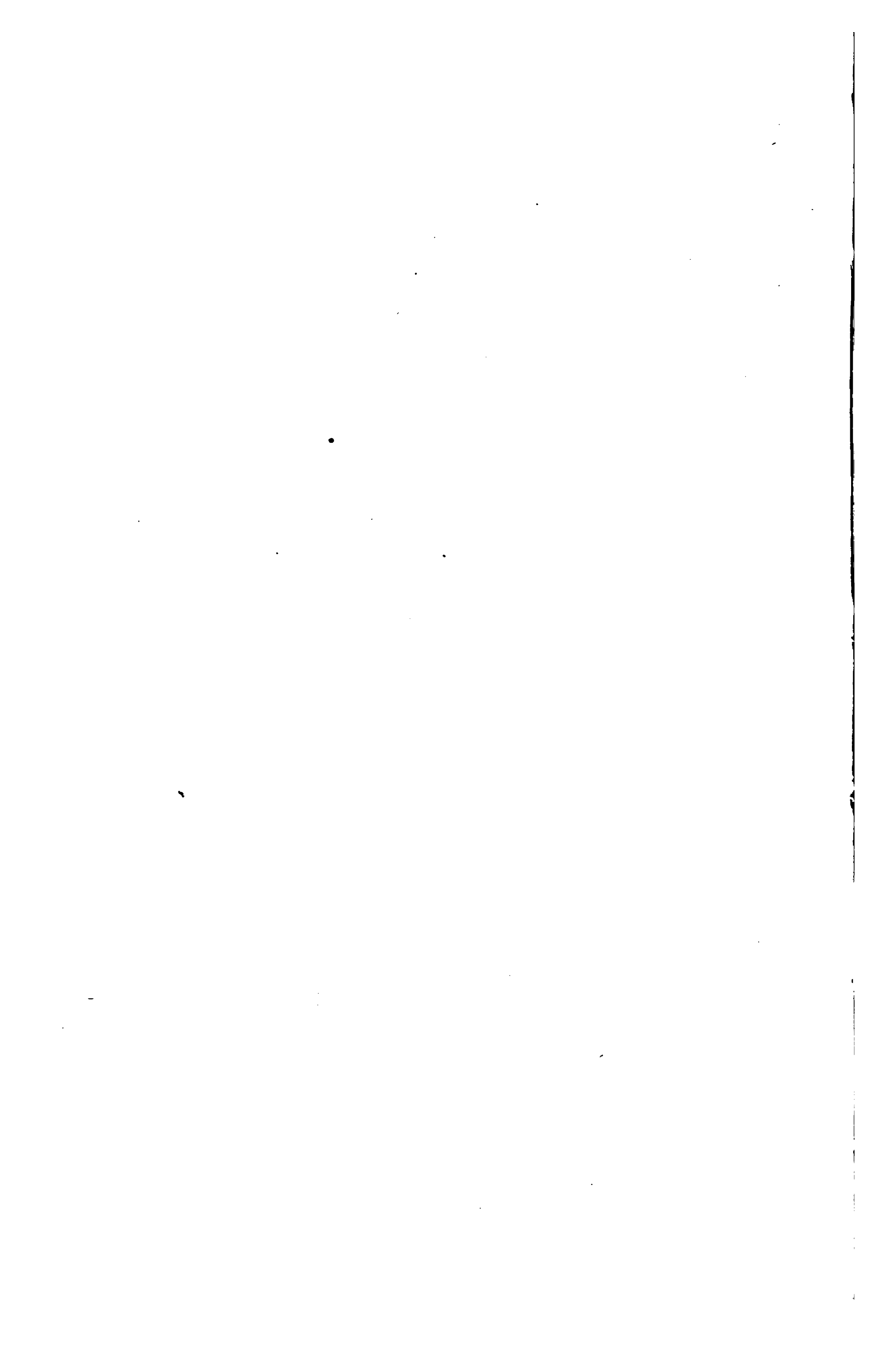












Holzstiche
aus dem xylographischen Atelier
von Friedrich Vieweg und Sohn
in Braunschweig.

Papier
aus der mechanischen Papier-Fabrik
der Gebrüder Vieweg zu Wendhausen
bei Braunschweig.

Lehrbuch

der

Ingenieur- und Maschinen-Mechanik.

Mit den nöthigen Hülfslehren aus der Analysis

für den

Unterricht an technischen Lehranstalten

sowie zum

Gebrauche für Techniker

bearbeitet

von

Dr. phil. Julius Weisbach,

Königl. sächsischer Bergrath und Professor an der königl. sächsischen Bergakademie zu Freiberg;
Ritter des königl. sächsischen Verdienstordens und des kaiserl. russ. St. Annenordens II. Classe, correspondirendes Mitglied der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg; Ehrenmitglied des Vereins deutscher Ingenieure, sowie correspondirendes Mitglied des Vereins für Eisenbahnkunde u. s. w.

In drei Theilen.

Erster Theil: Theoretische Mechanik.

Mit 902 in den Text eingedruckten Holzstichen.

Vierte verbesserte und vervollständigte Auflage.

Zweite Hälfte.

Braunschweig,

Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn.

1 8 6 3.

Lehrbuch

der

theoretischen Mechanik.

Mit den nöthigen Hülfslehren aus der Analysis

für den

Unterricht an technischen Lehranstalten

sowie zum

Gebrauche für Techniker

bearbeitet

von

Dr. phil. Julius Weisbach,

Königl. sächsischer Bergrath und Professor an der königl. sächsischen Bergakademie zu Freiberg; Ritter des königl. sächsischen Verdienstordens und des kaiserl. russ. St. Annenordens II. Classe, correspondirendes Mitglied der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg; Ehrenmitglied des Vereins deutscher Ingenieure, sowie correspondirendes Mitglied des Vereins für Eisenbahnkunde u. s. w.

Vierte verbesserte und vervollständigte Auflage.

Mit 902 in den Text eingedruckten Holzstichen.

Zweite Hälfte.

Braunschweig,

Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn.

1863.

Fünfter Abschnitt.

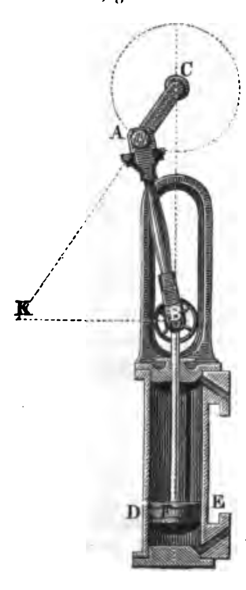
Dynamik fester Körper.

Erstes Capitel.

Die Lehre von den Trägheitsmomenten.

Bewegungsarten. Die Bewegung eines festen Körpers ist entweder §. 279 fortschreitend, oder drehend, oder beides zugleich. Bei der fortschreitenden oder progressiven Bewegung (franz. mouvement de translation; engl. motion of translation) sind die gleichzeitig zurückgelegten Wege der Körpertheile unter sich parallel und gleich, bei der drehenden oder rotirenden Bewegung (franz. mouvement de rotation; engl. motion of rotation) hingegen beschreiben die Theile des Körpers um eine gewisse gerade Linie, die man die Umdrehungsaxe (franz. axe de rotation; engl. axis of revolution) nennt, concentrische Kreisbögen. Jede zusammengesetzte Bewegung läßt sich als eine drehende Bewegung um eine bewegliche Axe ansehen. Letztere ist wieder entweder veränderlich oder unveränderlich.

Fig. 465.



In progressiver Bewegung befindet sich der Kolben DE und die Kolbenstange BF einer Pumpe oder Dampfmaschine, Fig. 465, in drehender Bewegung, dagegen ist die Kurbel oder der Krummzapfen AC, in zusammengesetzter Bewegung endlich die Kurbelstange AB, denn das eine Ende B derselben hat eine fortschreitende, und das andere Ende A eine drehende Bewegung. Bei einem sich wälzenden Cylinder ist die Umdre-

hungsaxe unveränderlich, bei der Kurbelstange AB hingegen ist dieselbe veränderlich, denn sie ist der Durchschnitt M zwischen dem Perpendikel BK zur Axenrichtung CB der Kolbenstange und der Verlängerung des Kurbelarmes CA (s. §. 101).

§. 280 **Geradlinige Bewegung.** Bei der geradlinig fortschreitenden Bewegung eines Körpers finden die §. 82 und §. 98 gefundenen Bewegungsgesetze eines materiellen Punktes ihre unmittelbare Anwendung. Die Massentheile M_1, M_2, M_3 u. s. w. eines mit der Acceleration p fortschreitenden Körpers widerstehen der Bewegung vermöge ihrer Trägheit mit den Kräften $M_1 p$, $M_2 p$, $M_3 p$ u. s. w. (§. 54), und da die Bewegungen aller dieser Theile in parallelen Linien erfolgen, so sind auch die Richtungen dieser Kräfte unter sich parallel; es ist daher die Mittelkraft von allen diesen aus der Trägheit entspringenden Kräften gleich der Summe

$M_1 p + M_2 p + M_3 p + \cdots = (M_1 + M_2 + M_3 + \cdots) p = Mp$,

wo M die Masse des ganzen Körpers bezeichnet, und es fällt auch der Angriffspunkt derselben mit dem Schwerpunkte des Körpers zusammen. Um also einen übrigens frei beweglichen Körper von der Masse M oder dem Gewichte $G = Mg$ in eine geradlinig fortschreitende Bewegung mit der Acceleration p zu versetzen, ist eine Kraft

$$P = Mp = \frac{Gp}{g}$$

nöthig, deren Richtung durch den Schwerpunkt S des Körpers geht.

Aendert sich in Folge der Einwirkung der Kraft P die Geschwindigkeit c während der Zurücklegung des Weges s in die Geschwindigkeit v um, so ist die von der Masse in sich aufgenommene mechanische Arbeit (§. 72):

$$Ps = \left(\frac{v^2 - c^2}{2}\right) M = \left(\frac{v^2 - c^2}{2g}\right) G = (h - k)\, G.$$

Beispiel. Der Kolben sammt Stange von einer Pumpe, Dampfmaschine, Gebläsemaschine u. s. w. hat eine ungleichförmige Bewegung, bei seinem höchsten und tiefsten Stande ist er ohne Geschwindigkeit, und nahe bei seinem mittleren Stande ist die Geschwindigkeit desselben am größten. Ist das Gewicht des Kolbens und seiner Stange $= G$, und seine größte Geschwindigkeit in der Mitte seines Auf- oder Niederganges $= v$, so beträgt hiernach das Arbeitsvermögen, welches er vermöge seiner Trägheit in der ersten Hälfte seines Weges in sich aufnimmt und in der zweiten Hälfte desselben wieder ausgiebt:

$$L = \frac{v^2}{2g} G.$$

Für $G = 800$ Pfund und $v = 5$ Fuß ist diese Arbeit:

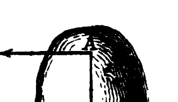
$$L = 0{,}016 \,.\, 5^2 \,.\, 800 = 320 \text{ Fußpfund};$$

wäre nun noch der halbe Kolbenweg $s = 4$ Fuß, so hätte man die mittlere Kraft, welche nöthig ist, um den Kolben in der ersten Hälfte dieses Weges zu beschleunigen, und welche derselbe in der zweiten Hälfte durch seine Verzögerung ausübt:

$$P = \frac{L}{s} = \frac{v^2}{2gs} \cdot G = \frac{320}{4} = 80 \text{ Pfund.}$$

Drehende Bewegung. Geht die bewegende Kraft P eines Körpers §. 281 AB, Fig. 466, nicht durch den Schwerpunkt S, so nimmt der Körper eine Drehung um diesen Punkt an, und es schreitet dieser fort, als wenn die Kraft unmittelbar in ihm angriffe, wie sich folgendergestalt beweisen läßt. Man fälle vom Schwerpunkte S ein Perpendikel $SA = a$ gegen die Kraftrichtung, verlängere dasselbe rückwärts, mache die Verlängerung SB dem Perpendikel gleich und lasse zwei sich das Gleichgewicht haltende und parallel mit P wirkende Kräfte, die eine $+ \frac{1}{2} P$ und die andere $- \frac{1}{2} P$, in B angreifen. Die Kraft $+ \frac{1}{2} P$ giebt in Vereinigung mit der einen Hälfte der in A angreifenden Kraft P die im Schwerpunkte S angreifende Mittelkraft

Fig. 466.



$$P_1 = \frac{1}{2} P + \frac{1}{2} P = P,$$

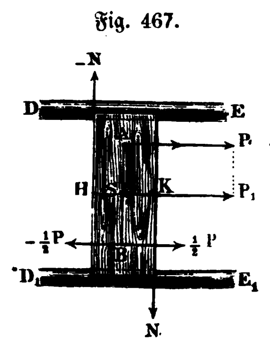
wogegen die Kraft $- \frac{1}{2} P$ mit der zweiten Hälfte ($\frac{1}{2} P$) von der in A angreifenden Kraft P ein Kräftepaar bildet; es resultirt also aus der excentrisch wirkenden Kraft P eine durch den Schwerpunkt gehende Kraft $P_1 = P$, welche diesen Punkt sammt dem ganzen Körper progressiv bewegt, und ein Kräftepaar ($\frac{1}{2} P$, $- \frac{1}{2} P$), welches den Körper um den Schwerpunkt dreht, ohne einen Druck in demselben zu erzeugen. Das statische Moment dieses Kräftepaares ist aber

$$= \frac{1}{2} P . \overline{SA} + \frac{1}{2} P . \overline{SB} = P . \overline{SA} = Pa$$

gleich dem statischen Momente der in A angreifenden Kraft P in Hinsicht auf den Schwerpunkt S; es ist folglich auch die resultirende Umdrehung dieselbe, als wenn der Schwerpunkt S festgehalten würde und P allein wirkte.

Wird ein Körper AB, Fig. 467, durch eine Führung oder Leitung DE, $D_1 E_1$ gezwungen, eine progressive Bewegung anzunehmen, so übt die excentrische Kraft $\overline{AP} = P$ dieselbe Wirkung auf die Bewegung des Körpers aus, wie eine gleiche im Schwerpunkte S desselben angreifende Kraft $\overline{SP_1} = P_1$, weil das übrig bleibende Kräftepaar ($\frac{1}{2} P$, $- \frac{1}{2} P$) durch die Führung aufgenommen wird. Ist a die Excentricität SA der Kraft P, oder der Abstand ihrer Richtung von dem Schwerpunkte S des Körpers und bezeichnet b den Abstand HK zwischen den

Fig. 467.



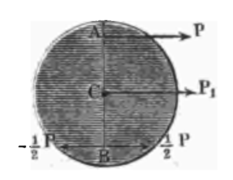
durch die einander diagonal gegenüberliegenden Eckpunkte F und G gelegten Normalen der Führung, sowie $(N, -N)$ das Kräftepaar, mit welchem der Körper gegen die Führung wirkt, so hat man durch Gleichsetzen der Momente dieser Paare $(^1/_2 P, -{}^1/_2 P)$ und $(N, -N)$:

$$Nb = Pa, \text{ und daher:}$$

$$N = \frac{a}{b} P.$$

Wird endlich der Körper AB, Fig. 468, durch eine feste Axe C verhindert, fortzuschreiten, so übt die excentrische Kraft $\overline{AP} = P$, deren Richtung um $CA = a$ von der festen Axe C absteht, dieselbe Wirkung auf die Umdrehung des Körpers um diese Axe C aus als ein Kräftepaar $(^1/_2 P, -{}^1/_2 P)$ mit der Armlänge $AB = 2\,CA = 2\,CB = 2\,a$, oder dem Momente $^1/_2 P . 2\,a = Pa$, weil die übrig bleibende centrische Kraft $\overline{CP_1} = P_1 = P$ von den Axenlagern aufgenommen wird (vergl. §. 130).

Fig. 468.

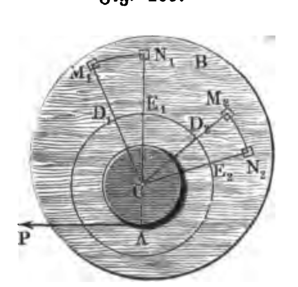


§. 282 **Trägheitsmoment.** Bei der Umdrehung eines Körpers AB, Fig. 469, um eine feste Axe C legen alle Punkte M_1, M_2 u. s. w. desselben in gleichen Zeiten gleiche Centriwinkel $M_1 C N_1 = M_2 C N_2$ u. s. w. $= \varphi^0$ zurück, welchen also auch bei gleichem Radius, z. B. $CD_1 = CD_2$ u. s. w. $=$ Eins (1) ein und derselbe Bogen

$$D_1 E_1 = D_2 E_2 \text{ u. s. w.} = \varphi = \frac{\varphi^0}{180^0} \pi$$

entspricht.

Fig. 469.



Da die Geschwindigkeit durch den Quotienten aus einem Raumtheilchen φ und dem entsprechenden Zeitelemente τ bestimmt wird, so ist folglich auch die Winkelgeschwindigkeit (franz. vitesse angulaire; engl. angular velocity), d. i. die Geschwindigkeit derjenigen Punkte des Körpers, welche um die Längeneinheit (z. B. einen Fuß) von der Umdrehungsaxe abstehen, für den ganzen Körper eine und dieselbe, nämlich

$$\omega = \frac{\varphi}{\tau},$$

und ebenso ist auch die Winkelacceleration, oder die Acceleration des umlaufenden Körpers im Abstande Eins (1) von der Drehungsaxe, für den ganzen Körper eine gemeinschaftliche Größe, und zwar

$$\varkappa = \frac{\omega}{\tau},$$

wenn hier ω den im Zeitelemente τ erfolgten Zuwachs der Winkelgeschwindigkeit des Körpers bezeichnet.

Um die Wege s_1, s_2 u. s. w., Geschwindigkeiten v_1, v_2 u. s. w. und Accelerationen p_1, p_2 u. s. w. der Punkte M_1, M_2 u. s. w. des Körpers zu finden, welche um $CM_1 = r_1$, $CM_2 = r_2$ u. s. w. von der Drehungsaxe C entfernt sind, hat man natürlich den Winkelweg φ, die Winkelgeschwindigkeit ω und die Winkelacceleration $\varkappa$ mit r_1, r_2 u. s. w. zu multipliciren; also

$$s_1 = \varphi r_1,\ s_2 = \varphi r_2 \text{ u. s. w.}$$
$$v_1 = \omega r_1,\ v_2 = \omega r_2 \text{ u. s. w. und}$$
$$p_1 = \varkappa r_1,\ p_2 = \varkappa r_2 \text{ u. s. w.}$$

zu setzen.

Besteht folglich die ganze Masse M des Körpers aus den Theilen M_1, M_2 u. s. w., welche um die Halbmesser r_1, r_2 u. s. w. von der Drehungsaxe C entfernt sind, so sind die Kräfte, mit welchen diese Massentheile der Umdrehung widerstehen:

$$P_1 = M_1 p_1 = \varkappa M_1 r_1,\ P_2 = M_2 p_2 = \varkappa M_2 r_2 \text{ u. s. w.,}$$

und ihre Momente:

$$P_1 r_1 = \varkappa M_1 r_1^2,\ P_2 r_2 = \varkappa M_2 r_2^2 \text{ u. s. w.,}$$

und es ist das erforderliche **Moment** zur Umdrehung des Körpers mit der **Winkelacceleration** $\varkappa$:

$$Pa = \varkappa M_1 r_1^2 + \varkappa M_2 r_2^2 + \cdots$$
$$= \varkappa (M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2 + M_3 r_3^2 + \cdots).$$

Ebenso sind (nach §. 84) die mechanischen Arbeiten, welche die Massentheilchen M_1, M_2 u. s. w. erfordern, um die Geschwindigkeiten v_1 v_2 u. s. w. anzunehmen:

$$A_1 = \tfrac{1}{2} M_1 v_1^2 = \tfrac{1}{2} \omega^2 M_1 r_1^2,$$
$$A_2 = \tfrac{1}{2} M_2 v_2^2 = \tfrac{1}{2} \omega^2 M_2 r_2^2 \text{ u. s. w.,}$$

und es ist daher die **mechanische Arbeit**, welche der ganze Körper in Anspruch nimmt, während er die **Winkelgeschwindigkeit** ω erhält:

$$A = A_1 + A_2 + \cdots$$
$$= \tfrac{1}{2} \omega^2 (M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2 + M_3 r_3^2 + \cdots).$$

Es hängt also die Kraft und Arbeit einer rotirenden Masse vorzüglich von der Summe $M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2 + M_3 r_3^2 + \cdots$ aus den einzelnen Massentheilen M_1, M_2 u. s. w. und den Quadraten ihrer Entfernungen r_1, r_2 u. s. w. von der Umdrehungsaxe ab. Man nennt diese Summe das **Trägheits-**, **Drehungs-** oder **Massenmoment** (franz. moment d'inertie; engl. momentum of inertia), und wir werden es in der Folge durch Mr^2 oder W bezeichnen. Es ist also hiernach das Moment der Kraft, wodurch der Masse $M = M_1 + M_2 + \cdots$, deren Trägheitsmoment

$$W = Mr^2 = M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2 + \cdots \text{ ist},$$

die Winkelacceleration ertheilt wird:

$$1)\ Pa = \varkappa M r^2 = \varkappa W,$$

und dagegen die mechanische Arbeit, wodurch diese Masse M in eine Umdrehung mit der Winkelgeschwindigkeit ω versetzt wird:

$$2)\ Ps = {}^1/_2\, \omega^2 M r^2 = {}^1/_2\, \omega^2 W.$$

Hat die Masse schon anfangs eine Winkelgeschwindigkeit ε, so ist die mechanische Arbeit, wodurch dieselbe auf ω gesteigert wird:

$$Ps = {}^1/_2\, \omega^2 W - {}^1/_2\, \varepsilon^2 W = {}^1/_2\, (\omega^2 - \varepsilon^2)\, W.$$

Auch läßt sich hiernach umgekehrt, aus der aufgewendeten Arbeit und Anfangsgeschwindigkeit ε die Endgeschwindigkeit ω bestimmen; es ist nämlich:

$$\omega = \sqrt{\varepsilon^2 + \frac{2\,Ps}{W}}.$$

Beispiel. Wenn der um eine feste Axe C drehbare und anfänglich ruhende Körper AB, Fig. 469, ein Trägheitsmoment von 50 Fußpfund besitzt und mittels eines um eine Rolle liegenden Seiles mit einer Kraft $P = 20$ Pfund und bei Zurücklegung des Weges $s = 5$ Fuß in Umdrehung gesetzt wird, so ist die erlangte Winkelgeschwindigkeit dieses Körpers:

$$\omega = \sqrt{\frac{2\,Ps}{W}} = \sqrt{\frac{2\,.\,20\,.\,5}{50}} = \sqrt{4} = 2 \text{ Fuß},$$

d. h. jeder Punkt in der Entfernung eines Fußes von der Umdrehungsaxe legt nach Aufnahme dieser Arbeit in jeder Secunde 2 Fuß zurück. Die Zeit einer Umdrehung ist:

$$t = \frac{2\pi}{\omega} = 3{,}1416 \text{ Secunden},$$

und die Zahl der Umdrehungen in der Minute:

$$u = \frac{60}{t} = \frac{60}{3{,}1416} = 19{,}1.$$

Geht die gefundene Winkelgeschwindigkeit $\omega = 2$ Fuß in die Geschwindigkeit $\varepsilon = {}^3/_4$ Fuß über, so verrichtet diese Masse die Arbeit:

$P_1 s_1 = [2^2 - ({}^3/_4)^2]\,.\,{}^{50}/_2 = (4 - {}^9/_{16})\,.\,25 = {}^{55}/_{16}\,.\,25 = 85{,}93$ Fußpfd.; hebt also z. B. ein Gewicht P_1 von 10 Pfund 8,593 Fuß hoch.

§. 283 **Reduction träger Massen.** Sind die Winkelgeschwindigkeiten zweier Massen M_1 und M_2 unter sich gleich, gehören z. B. diese Massen einem und demselben rotirenden Körper an, so verhalten sich ihre lebendigen Kräfte wie ihre Trägheitsmomente $W_1 = M_1 r_1^2$ und $W_2 = M_2 r_2^2$, und sind nun auch diese unter sich gleich, so besitzen die Massen gleiche lebendige Kräfte. Zwei Massen haben also hiernach gleichen Einfluß auf den Bewegungszustand eines sich umdrehenden Körpers, und es kann eine durch die andere ersetzt werden, ohne daß dadurch eine Aenderung im Bewegungszustande vor sich geht, wenn sie gleiche Trägheitsmomente $M_1 r_1^2$ und $M_2 r_2^2$ besitzen, sich also zu einander umgekehrt wie die Quadrate ihrer Entfernungen von der Umdre-

hungsaxe verhalten. Mit Hülfe der Formel $M_1 r_1^2 = M_2 r_2^2$ läßt sich eine Masse von einer Entfernung auf eine andere reduciren, d. h. es läßt sich eine Masse M_2 angeben, welche in der Entfernung r_2 eben den Antheil an dem Bewegungszustande des sich drehenden Körpers hat, als die gegebene Masse M_1 in der Entfernung r_1; es ist nämlich:

$$M_2 = \frac{M_1 r_1^2}{r_2^2} = \frac{W_1}{r_2^2},$$

d. i. die auf die Entfernung r_2 reducirte Masse ist der Quotient aus dem Trägheitsmomente der Masse und dem Quadrate jener Entfernung.

Zwei an einer Radwelle $A\,CB$, Fig. 470, festsitzende Gewichte Q und Q_1 in den Abständen $CB = b$ und $CB_1 = a$ von der Umdrehungsaxe XX haben also vermöge ihrer Massen auf die Bewegung der Radwelle gleichen Einfluß, wenn $Q_1 a^2 = Q b^2$, also $Q_1 = \frac{Q b^2}{a^2}$ ist. Wirkt daher eine Kraft P am Hebelarme $CA = CB_1 = a$, um eine Masse vom Gewichte Q im Abstande $CB = b$ in Umdrehung zu setzen, so hat man die letztere auf den Hebelarm a der Kraft P zu reduciren, also statt Q,

Fig. 470.

$$Q_1 = \frac{Q b^2}{a^2}$$

und die von P bewegte Masse:

$$M = \left(P + \frac{Q b^2}{a^2}\right) : g$$

zu setzen, weshalb nun die Acceleration des Gewichtes P:

$$p = \frac{\text{Kraft}}{\text{Masse}} = \frac{P}{P + Q\,\frac{b^2}{a^2}} \cdot g = \frac{P a^2}{P a^2 + Q b^2} \cdot g$$

und die Winkelacceleration:

$$\varkappa = \frac{p}{a} = \frac{P a}{P a^2 + Q b^2} \cdot g$$

sich ergiebt.

Beispiel. Ist das Gewicht der rotirenden Masse $Q = 360$ Pfund, ihr Abstand von der Drehaxe, $b = 2,5$ Fuß, das die bewegende Kraft ausmachende Gewicht $P = 24$ Pfund und dessen Hebelarm $a = 1,5$ Fuß, so folgt die von P beschleunigte träge Masse:

$$M = \left[P + \left(\frac{2,5}{1,5}\right)^2 Q\right] : g = 0,032 \left(24 + \frac{25}{9} \cdot 360\right) = 0,032 \, . \, 1024$$
$$= 32,77 \text{ Pfund},$$

und daher die Beschleunigung des Gewichtes:

$$p = \frac{24}{32,77} = 0,732 \text{ Fuß},$$

dagegen die Acceleration der Masse Q:

$$q = \frac{b}{a} \cdot p = \frac{5}{3}\, p = \frac{5\,.\,0,732}{3} = 1,22 \text{ Fuß},$$

und die Winkelacceleration:

$$\varkappa = \frac{p}{a} = 0,488 \text{ Fuß}.$$

Nach 4 Secunden ist die erlangte Winkelgeschwindigkeit:

$$\omega = 0,488\,.\,4 = 1,952 \text{ Fuß},$$

und der entsprechende Weg:

$$\tfrac{1}{2}\,\omega\, t = \frac{1,952\,.\,4}{2} = 3,904 \text{ Fuß},$$

folglich der Umdrehungswinkel:

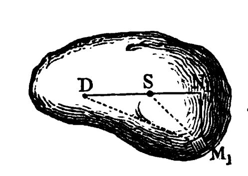
$$\varphi^0 = \frac{3,904}{\pi} \cdot 180^0 = 1,2426\,.\,180^0 = 223^0 45',$$

endlich der von dem Gewichte P zurückgelegte Weg:

$$s = \frac{p\,t^2}{2} = \frac{0,732\,.\,4^2}{2} = 5,856 \text{ Fuß}.$$

§. 284 **Reduction der Trägheitsmomente.** Kennt man das Trägheitsmoment eines Körpers oder eines Systems von Körpern in Hinsicht auf eine durch den Schwerpunkt S des Körpers gehende Axe, so läßt sich daraus leicht das Trägheitsmoment in Hinsicht auf eine andere mit jener parallel laufende Axe finden. Es sei S, Fig. 471, die erste durch den Schwerpunkt gehende und D die zweite Drehungsaxe, für welche das Trägheitsmoment des Körpers bestimmt werden soll; ferner sei $SD = d$ die Entfernung beider Axen von einander, und es seien $SN_1 = x_1$ und $N_1 M_1 = y_1$ die rechtwinkeligen Coordinaten eines Massentheiles M_1 des ganzen Körpers. Das Trägheitsmoment dieses Theiles

Fig. 471.



in Beziehung auf D ist nun:

$$= M_1\,.\,\overline{DM_1}^2 = M_1\,(\overline{DN_1}^2 + \overline{N_1 M_1}^2) = M_1\,[(d + x_1)^2 + y_1^2]$$

und in Beziehung auf S:

$$= M_1\,.\,\overline{SM_1}^2 = M_1\,(\overline{SN_1}^2 + \overline{N_1 M_1}^2) = M_1\,(x_1^2 + y_1^2),$$

daher die Differenz beider Momente:

$$= M_1\,(d^2 + 2\,d x_1 + x_1^2 + y_1^2) - M_1\,(x_1^2 + y_1^2) = M_1\, d^2 + 2\,M_1\, d x_1.$$

Für einen anderen Massentheil M_2 ist sie:

$$= M_2\, d^2 + 2\, M_2\, d\, x_2,$$

für einen dritten:

$$= M_3\, d^2 + 2\, M_3\, d\, x_3 \text{ u. s. w.}$$

daher für alle Massentheile zusammen:

$$= (M_1 + M_2 + M_3 + \cdots)\, d^2 + 2\, d\, (M_1\, x_1 + M_2\, x_2 + M_3\, x_3 + \cdots).$$

Nun ist aber $M_1 + M_2 + \cdots$ die Summe M aller Massen und $M_1 x_1 + M_2 x_2 + \cdots$ die Summe Mx ihrer statischen Momente, es folgt daher die Differenz zwischen dem Trägheitsmomente W_1 des ganzen Körpers in Beziehung auf die Axe D und dem Trägheitsmomente W in Beziehung auf S:

$$W_1 - W = Md^2 + 2dMx.$$

Da aber endlich für jede Ebene durch den Schwerpunkt die Summe der statischen Momente der Theile auf der einen Seite so groß ist als die der Momente auf der anderen Seite, die algebraische Summe aller Momente also = Null ist, so hat man auch $Mx = 0$, und daher:

$$W_1 - W = Md^2,$$

d. i.

$$W_1 = W + Md^2.$$

Es ist also das Trägheitsmoment eines Körpers für eine excentrische Axe gleich dem Trägheitsmomente in Beziehung auf eine durch den Schwerpunkt gehende Parallelaxe, vergrößert um das Product aus der Masse des Körpers und dem Quadrate des Abstandes beider Axen von einander.

Man ersieht auch hieraus, daß von allen Trägheitsmomenten in Beziehung auf lauter parallele Axen dasjenige am kleinsten ausfällt, dessen Axe die Schwerlinie des Körpers ist.

Trägheitshalbmesser. Es ist nöthig, die Trägheitsmomente von den vorzüglichsten Körpern der Geometrie kennen zu lernen, weil dieselben bei den Untersuchungen der Mechanik sehr oft zur Anwendung kommen. Sind diese Körper homogen, wie wir im Folgenden stets voraussetzen wollen, so sind die Massentheile M_1, M_2 u. s. w. den entsprechenden Volumentheilen V_1, V_2 u. s. w. proportional, und es läßt sich daher das Maß des Trägheitsmomentes, welches man auch wohl Trägheitsmoment schlechtweg nennt, durch die Summe aus den Volumtheilen und den Quadraten ihrer Entfernungen von der Umdrehungsaxe ersetzen. Auch lassen sich in diesem Sinne die Trägheitsmomente von Linien und Flächen angeben. §. 285

Denkt man sich die ganze Masse eines Körpers in einen Punkt zusammengedrängt, so läßt sich die Entfernung desselben von der Axe unter der Voraussetzung bestimmen, daß die so concentrirte Masse mit der im Raume vertheilten Masse einerlei Trägheitsmoment besitze. Man nennt diese Entfernung den Drehungs- oder Trägheitshalbmesser (franz. rayon d'inertie; engl. radius of gyration). Ist W das Trägheitsmoment, M die Masse und k der Trägheitshalbmesser, so hat man $Mk^2 = W$, und daher:

$$k = \sqrt{\frac{W}{M}}.$$

Uebrigens ist zu erinnern, daß dieser Halbmesser keineswegs einen bestimmten Punkt, sondern nur einen Kreis angiebt, in dessen Umfang die Masse beliebig vertheilt angenommen werden kann.

Führt man in der Formel

$$W_1 = W + Md^2,\ W = Mk^2 \text{ und } W_1 = Mk_1^2$$

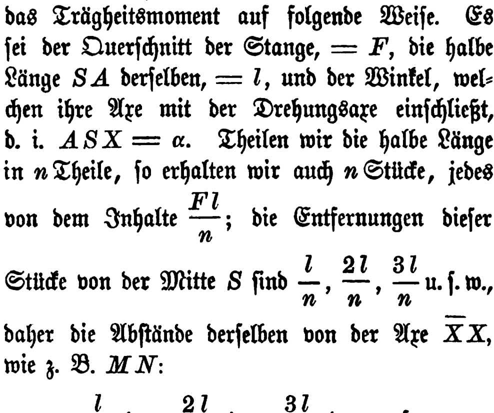
ein, so erhält man:

$$k_1^2 = k^2 + d^2,$$

d. h. es ist das Quadrat des Drehungshalbmessers in Beziehung auf eine Axe gleich dem Quadrate des Drehungshalbmessers in Beziehung auf die parallele Schwerlinie plus das Quadrat der Entfernung beider Axen von einander.

§. 286 **Trägheitsmoment einer Stange.** Von einer Stange AB, Fig. 472, welche sich um eine Axe $\overline{XX}$ durch ihre Mitte S dreht, bestimmt sich das Trägheitsmoment auf folgende Weise. Es sei der Querschnitt der Stange, $= F$, die halbe Länge SA derselben, $= l$, und der Winkel, welchen ihre Axe mit der Drehungsaxe einschließt, d. i. $ASX = \alpha$. Theilen wir die halbe Länge in n Theile, so erhalten wir auch n Stücke, jedes von dem Inhalte $\frac{Fl}{n}$; die Entfernungen dieser Stücke von der Mitte S sind $\frac{l}{n}, \frac{2l}{n}, \frac{3l}{n}$ u. s. w., daher die Abstände derselben von der Axe $\overline{XX}$, wie z. B. MN:

Fig 472.



$$= \frac{l}{n} sin. \alpha, \frac{2l}{n} sin. \alpha, \frac{3l}{n} sin. \alpha \text{ u. s. w.}$$

und ihre Quadrate:

$$= \left(\frac{l\, sin.\, \alpha}{n}\right)^2,\ 4\left(\frac{l\, sin.\, \alpha}{n}\right)^2,\ 9\left(\frac{l\, sin.\, \alpha}{n}\right)^2 \text{ u. s. w.}$$

Durch Multiplication dieser Quadrate mit dem Inhalte $\frac{Fl}{n}$ eines Elementes und durch Addition der dadurch erhaltenen Producte ergiebt sich nun das Trägheitsmoment der halben Stange:

$$T = \frac{Fl}{n}\left[\left(\frac{l\, sin.\, \alpha}{n}\right)^2 + 4\left(\frac{l\, sin.\, \alpha}{n}\right)^2 + 9\left(\frac{l\, sin.\, \alpha}{n}\right)^2 + \cdots\right]$$

$$= \frac{Fl^3\, sin.\, \alpha^2}{n^3}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2),$$

oder, da $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n^3}{3}$ ist,

$$W = \frac{Fl^3 \sin. \alpha^2}{3}.$$

Da ferner Fl das als Masse M zu behandelnde Volumen der halben Stange ist, so folgt endlich:

$$W = \frac{1}{3} Ml^2 \sin. \alpha^2.$$

Der Abstand eines Stangenendes von der Axe $\overline{X}X$ ist

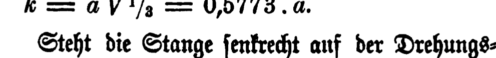
$$AC = BD = a = l \sin. \alpha,$$

daher folgt einfacher

$$W = \frac{1}{3} M a^2,$$

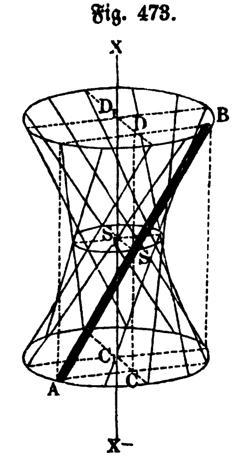
welche Formel auch auf die ganze Stange AB anzuwenden ist, wenn man unter M die Masse der ganzen Stange versteht. Eine Masse M_1 am Endpunkte A der Stange hat das Trägheitsmoment $M_1 a^2$, macht man daher $M_1 = \frac{1}{3} M$, so hat M_1 mit der Stange einerlei Trägheitsmoment. Ob also die Masse auf die Stange gleichförmig vertheilt, oder ihr dritter Theil im Endpunkte A concentrirt sei, dies kommt in Hinsicht auf die Trägheit auf eins hinaus.

Setzt man $W = Mk^2$, so bekommt man $k^2 = \frac{1}{3} a^2$, und daher den **Trägheitshalbmesser** der Stange:



$$k = a \sqrt{\frac{1}{3}} = 0{,}5773 \,.\, a.$$

Fig. 473.



Steht die Stange senkrecht auf der Drehungsaxe, so ist $a = l$, daher

$$W = \frac{1}{3} Ml^2.$$

Befindet sich endlich die Stange AB, Fig. 473, mit der Drehungsaxe $C_1 D_1$ nicht in einerlei Ebene, und ist der kürzeste Abstand

$$SS_1 = CC_1 = DD_1$$

der Stangenaxe von der Drehungsaxe, $= d$, sowie der Normalabstand $AC = BD$ der Stangenenden A und B von der mit $C_1 D_1$ parallelen Axe CD durch den Schwerpunkt S der Stange, $= a$, so hat man (nach §. 284), das Trägheitsmoment der Stange:

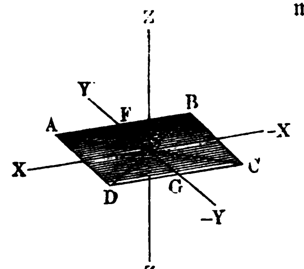
$$W_1 = W + \frac{1}{3} Ma^2 = M (d^2 + \frac{1}{3} a^2)$$

§. 287 **Rechteck und Parallelepiped.** Die Trägheitsmomente von **ebenen Flächen** bestimmen sich genau so wie die Biegungsmomente $W = F_1 z_1^2 + F_2 z_2^2 + \cdots$ derselben. Deshalb lassen sich auch die im vorigen

Abschnitt für verschiedene Flächen gefundenen Werthe von W als Trägheitsmomente W hier benutzen.

Für das Rechteck $ABCD$, Fig. 474, ist das Trägheitsmoment in Hinsicht auf eine Axe $\overline{XX}$, welche parallel mit einer Seite läuft, und durch die Mitte S dieser Figur geht, nach §. 226,

Fig. 474.



$$W = \frac{b\,h^3}{12},$$

wo b die Breite $AB = CD$, parallel zur Umdrehungsaxe, und h die Höhe $AD = BC$ der Fläche bezeichnet.

Nun ist aber der Inhalt $b\,h$ dieses Rechteckes als Masse M desselben einzusetzen, daher folgt das Trägheitsmoment:

$$W = \frac{M h^2}{12} = \frac{M}{3}\left(\frac{h}{2}\right)^2,$$

d. i. so groß als das des dritten Theiles dieser Masse, im Abstande $\overline{SF} = \overline{SG} = \frac{h}{2}$ von der Drehungsaxe angebracht.

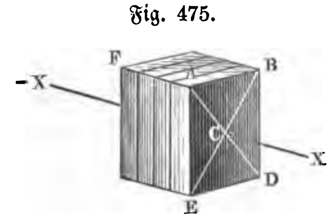
Dreht sich dieses Rechteck um eine Axe $\overline{ZZ}$, welche rechtwinkelig gegen die Ebene desselben steht und ebenfalls durch die Mitte S der Figur geht, so hat man nach §. 225:

$$W = \frac{M h^2}{12} + \frac{M b^2}{12} = \frac{M(h^2 + b^2)}{12} = \frac{M}{3}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2\right]$$
$$= \frac{M}{3}\left(\frac{d}{2}\right)^2,$$

wenn d die Diagonale $\overline{AC} = \overline{BD}$ des Rechteckes bezeichnet. Man kann sich also in diesem Falle den dritten Theil der Masse des Rechteckes in einem der Eckpunkte A, B . . . angebracht denken.

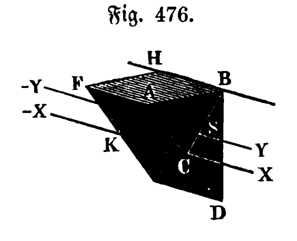
Da sich ferner ein gerades Parallelepiped BEF, Fig. 475, durch Parallelebenen in lauter gleiche rectanguläre Blätter zerlegen läßt, so gilt diese Formel auch für dieses, wenn die Umdrehungsaxe durch die Mittelpunkte von je zwei gegenüber liegenden Flächen geht. Uebrigens folgt auch aus dieser Formel, daß das Trägheitsmoment des Parallelepipeds gleich ist dem Trägheitsmomente des in einem der Eckpunkte A angebrachten dritten Theiles seiner Masse.

Fig. 475.



Prisma und Cylinder. Mit Hülfe der Formel für das Trägheitsmoment eines Parallelepipedes läßt sich auch das eines dreiseitigen Prismas berechnen. Die Diagonalebene ADF theilt das Parallelepiped in zwei gleiche dreiseitige Prismen mit rechtwinkelig triangulären Grundflächen ABD, Fig. 476, es ist daher für eine Drehung um die durch die Mittelpunkte C und K der Hypotenusen gehende Axe $\overline{XX}$ das Trägheitsmoment $= \frac{1}{12} Md^2$. Benutzt man nun den Lehrsatz in §. 284, so erhält man das Trägheitsmoment in Beziehung auf eine durch die Schwerpunkte S und S_1 der Grundflächen gehende Axe $Y\overline{Y}$: §. 288

Fig. 476.



$$W = \frac{1}{12} Md^2 - M.\overline{CS}^2 = M\left(\frac{d^2}{12} - (\frac{1}{3}\overline{CB})^2\right)$$
$$= M\left[\frac{d^2}{12} - \left(\frac{d}{6}\right)^2\right],$$

d. i.:

$$W = \frac{1}{18} Md^2,$$

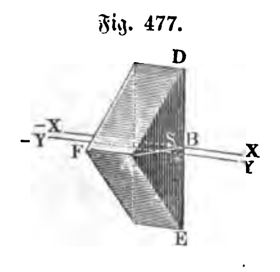
und es folgt auch das Trägheitsmoment in Beziehung auf die Seitenkante BH:

$$W_1 = W + M.\overline{SB}^2 = \frac{1}{18} Md^2 + M(\frac{1}{3} d)^2 = \frac{3}{18} Md^2$$
$$= \frac{1}{6} Md^2,$$

wobei d allemal die Hypotenuse AD der triangulären Grundfläche bezeichnet.

Für ein Prisma $ADFE$, Fig. 477, mit gleichschenkelig triangulären Grundflächen ist das Trägheitsmoment in Beziehung auf eine Axe $X\overline{X}$, welche die Mittelpunkte der Grundlinien verbindet, $W_1 = \frac{1}{6} Md^2$, wenn d die Seite $AD = AE$ einer Grundfläche bezeichnet, weil sich diese Fläche durch die Höhenlinie AB in zwei gleiche rechtwinkelige Dreiecke zerlegen läßt. Ist nun diese Höhe AB der gleichschenkelig triangulären Basis, $= h$, so hat man das Trägheitsmoment dieses Prismas in Beziehung auf die Axe $Y\overline{Y}$ durch die Schwerpunkte der Grundflächen:

Fig. 477.



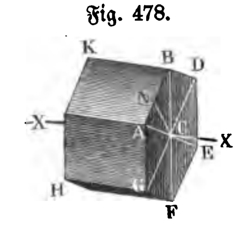
$$W = \frac{1}{6} Md^2 - M\left(\frac{h}{3}\right)^2 = M(\frac{1}{6} d^2 - \frac{1}{9} h^2)$$
$$= \frac{1}{3} M(\frac{1}{2} d^2 - \frac{1}{3} h^2),$$

und endlich das Trägheitsmoment in Beziehung auf die Kante AF durch die Spitzen A und F der Grundflächen:

$$W_1 = W + M\,(^2/_3\,h)^2 = M\left(\frac{d^2}{6} - \frac{h^2}{9} + \frac{4\,h^2}{9}\right)$$
$$= {}^1/_3\,M\,(^1/_2\,d^2 + h^2).$$

Hiernach läßt sich auch das Trägheitsmoment eines geraden regelmäßigen, sich um seine geometrische Axe drehenden Prismas $ADFK$, Fig. 478, finden. Ist $CA = CB = r$ der Halbmesser der Grundfläche oder eines Ergänzungsdreieckes der Basis, h die Höhe CN von einem der Ergänzungsdreiecke ACB, und M die Masse des ganzen Prismas, so hat man nach der letzten Formel, wenn man darin r statt d setzt:

Fig. 478.



$$W = {}^1/_3\,M\left(\frac{r^2}{2} + h^2\right).$$

Das reguläre Prisma wird zu einem geraden Cylinder, wenn $h = r$ ausfällt, daher ist das Trägheitsmoment dieses Cylinders in Beziehung auf seine geometrische Axe:

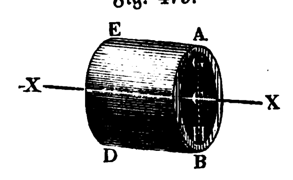
$$W = {}^1/_3\,M\left(\frac{r^2}{2} + r^2\right) = {}^1/_2\,M r^2.$$

Das Trägheitsmoment eines Cylinders ist also gleich dem Trägheitsmomente der halben Cylindermasse concentrirt in dem Umfange desselben, oder gleich dem Trägheitsmomente der ganzen Masse befindlich im Abstande

$$k = r\sqrt{^1/_2} = 0{,}7071\,.\,r.$$

Hat man es mit einem hohlen Cylinder $ABDE$, Fig. 479, zu thun, so ist das Trägheitsmoment des leeren Raumes von dem des massiven Cylinders abzuziehen. Bezeichnet l die Länge, r_1 den äußeren Halbmesser CA und r_2 den inneren Halbmesser CG dieses Körpers, so hat man, nach dem Vorigen, das Trägheitsmoment des hohlen Cylinders:

Fig. 479.



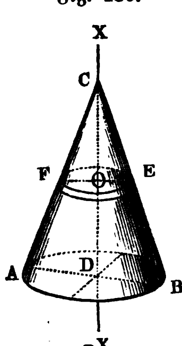
$$W = {}^1/_2\,(M_1 r_1^2 - M_2 r_2^2) = {}^1/_2\,\pi\,(r_1^2\,.\,r_1^2 - r_2^2\,.\,r_2^2)\,l = {}^1/_2\,\pi\,(r_1^4 - r_2^4)\,l$$
$$= {}^1/_2\,\pi\,(r_1^2 - r_2^2)\,(r_1^2 + r_2^2)\,l = {}^1/_2\,M\,(r_1^2 + r_2^2),$$

weil das als Masse zu behandelnde Volumen des Körpers $= \pi\,(r_1^2 - r_2^2)\,l$ ist. Bezeichnet ferner r den mittleren Halbmesser $\frac{r_1 + r_2}{2}$ und b die Breite $r_1 - r_2$ der Ringfläche, so hat man auch:

$$W = M\left(r^2 + \frac{b^2}{4}\right).$$

Kegel und Pyramide. Mit Hülfe der Formel für das Trägheits- §. 289 moment eines Cylinders läßt sich nun auch das Trägheitsmoment eines geraden Kegels, sowie das einer Pyramide berechnen. Es sei ACB, Fig. 480, ein sich um seine geometrische Axe drehender Kegel, $r = DA = DB$, der Halbmesser seiner Basis, und $h = CD$, seine in die Axe fallende Höhe. Führen wir in gleichen Höhenabständen n Schnitte parallel zur Basis, so erhalten wir lauter dünne Scheiben von den Halbmessern

Fig. 480.



$$\frac{r}{n},\ 2\frac{r}{n},\ 3\frac{r}{n}\cdots n\frac{r}{n}$$

und der gemeinschaftlichen Höhe $\frac{h}{n}\cdot$ Die Volumina dieser Scheiben sind:

$$\pi\left(\frac{r}{n}\right)^2\cdot\frac{h}{n},\ \pi\left(\frac{2r}{n}\right)^2\cdot\frac{h}{n},\ \pi\left(\frac{3r}{n}\right)^2\cdot\frac{h}{n}\text{ u. s. w.,}$$

und daher die Trägheitsmomente derselben:

$$\pi\left(\frac{r}{n}\right)^4\cdot\frac{h}{2n},\ \pi\left(\frac{2r}{n}\right)^4\cdot\frac{h}{2n},\ \pi\left(\frac{3r}{n}\right)^4\cdot\frac{h}{2n}\text{ u. s. w.}$$

Die Summe dieser Werthe giebt endlich das Trägheitsmoment des ganzen Kegels:

$$W = \frac{\pi r^4 h}{2n^5}(1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4),$$

d. i., da $1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4 = \frac{n^5}{5}$ und die Masse des Kegels $M = \frac{\pi r^2 h}{3}$ zu setzen ist,

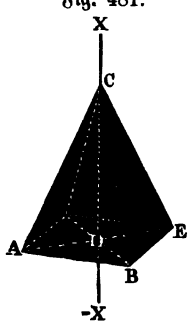
$$W = \frac{\pi r^4 h}{10} = \frac{3}{10}\cdot\frac{\pi r^2 h}{3}\cdot r^2 = \frac{3}{10}Mr^2.$$

Ebenso ist für die gerade Pyramide ACE, Fig. 481, mit rectangulärer Basis, unter denselben Verhältnissen:

$$W = \frac{1}{5}Md^2,$$

wenn d die halbe Diagonale DA der Basis bezeichnet.

Fig. 481.



Auch ergiebt sich durch Subtraction von zwei Trägheitsmomenten, das Trägheitsmoment eines geraden abgekürzten Kegels ($ABEF$, Fig. 480), dessen Halbmesser DA und OF, r_1 und r_2 und Höhen CD und CO, h_1 und h_2 sind, in Beziehung auf seine geometrische Axe $X\overline{X}$:

$$W = \frac{\pi}{10}(r_1^4 h_1 - r_2^4 h_2) = \frac{\pi h_1}{10 r_1}(r_1^5 - r_2^5),$$

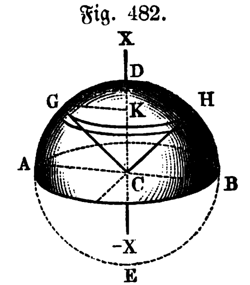
oder, da die Masse

$$M = \frac{\pi}{3}(r_1^2 h_1 - r_2^2 h_2) = \frac{\pi h_1}{3 r_1}(r_1^3 - r_2^3) \text{ ist,}$$

$$W = {}^3/_{10}\, M\left(\frac{r_1^5 - r_2^5}{r_1^3 - r_2^3}\right).$$

§. 290 **Kugel.** Auf gleiche Weise bestimmt sich das Trägheitsmoment einer Kugel, welche sich um einen ihrer Durchmesser $DE = 2r$ dreht. Theilen wir die Halbkugel ADB, Fig. 482, durch Schnitte parallel zur Basis ACB in n gleichdicke Scheiben wie GKH u. s. w., und bestimmen wir die Momente derselben. Das Quadrat des Halbmessers GK einer solchen Scheibe ist:

Fig. 482.



$$\overline{GK}^2 = \overline{CG}^2 - \overline{CK}^2 = r^2 - \overline{CK}^2,$$

daher das Trägheitsmoment derselben:

$$= {}^1/_2\, \pi \cdot \frac{r}{n}(r^2 - \overline{CK}^2)^2$$

$$= \frac{\pi r}{2n}(r^4 - 2r^2 . \overline{CK}^2 + \overline{CK}^4).$$

Setzen wir nun für CK nach und nach $\frac{r}{n}, \frac{2r}{n}, \frac{3r}{n}$ u. s. w. bis $\frac{nr}{n}$ ein, und addiren wir die Ergebnisse, so folgt das Trägheitsmoment der Halbkugel:

$$W = \frac{\pi r}{2n}\left[n . r^4 - 2r^2\left(\frac{r}{n}\right)^2(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) + \left(\frac{r}{n}\right)^4(1^4 + 2^4 + \cdots + n^4)\right]$$

$$= \frac{\pi r}{2n}\left[nr^4 - \frac{2r^4}{n^2}\cdot\frac{n^3}{3} + \left(\frac{r}{n}\right)^4\cdot\frac{n^5}{5}\right], \text{ d. i.:}$$

$$W = \frac{\pi r^5}{2}(1 - {}^2/_3 + {}^1/_5) = \frac{4\pi r^5}{15}.$$

Nun ist der Inhalt einer Halbkugel, $M = {}^2/_3\, \pi r^3$, es läßt sich daher setzen:

$$W = {}^2/_5 . {}^2/_3\, \pi r^3 . r^2 = {}^2/_5\, M r^2,$$

und nimmt man M für die ganze Kugel an, so gilt die Formel auch für diese.

Der Drehungshalbmesser ist:

$$k = r\sqrt{{}^2/_5} = 0{,}6324 . r;$$

zwei Fünftel der Kugelmasse um den Kugelhalbmesser von der Drehungsaxe abstehend, hat dasselbe Trägheitsmoment wie die ganze Kugel.

Die Formel

$$W = {}^2/_5\, M r^2$$

gilt auch für ein Sphäroid, dessen Aequatorhalbmesser $= r$ ist (s. §. 123).

Dreht sich die Kugel um eine andere, von ihrem Mittelpunkte um d abstehende Axe, so hat man das Trägheitsmoment derselben zu setzen:

$$W = M(d^2 + {}^2/_5\, r^2).$$

Cylinder und Kegel. Das Trägheitsmoment einer Kreislinie $ABDE$, Fig. 483, in Hinsicht auf eine Axe durch den Mittelpunkt C und rechtwinkelig zur Ebene des Kreises ist, da alle Punkte um $CA = r$ von der Axe abstehen, §. 291

$$W = Mr^2,$$

und folglich dasjenige in Hinsicht auf einen der Durchmesser $\overline{X}X$ oder $\overline{Y}Y$ (vergleiche §. 231):

$$W_1 = {}^1/_2\, W = {}^1/_2\, Mr^2.$$

Dagegen das Trägheitsmoment von einem kreisrunden Blatte $ABDE$, Fig. 483, welches sich um seinen Durchmesser BE dreht, ergiebt sich wie das Biegungsmoment eines Cylinders:

$$= \frac{\pi r^4}{4} = \frac{Mr^2}{4},$$

es ist folglich der Halbmesser der Trägheit dieser Fläche:

$$k = r\sqrt{{}^1/_4} = {}^1/_2\, r,$$

d. i. die Hälfte vom Halbmesser des Kreises.

Fig. 483.

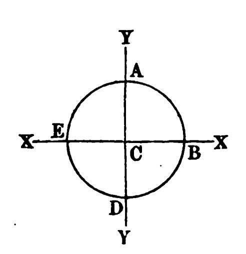
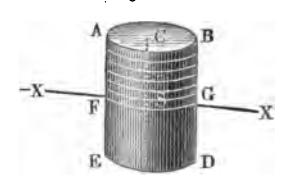


Fig. 484.



Hieraus läßt sich nun auch das Trägheitsmoment eines Cylinders $ABDE$, Fig. 484, finden, der sich um einen durch seinen Schwerpunkt S gehenden Durchmesser FG dreht. Ist l die halbe Höhe AF und r der Halbmesser $CA = CB$ des Cylinders, so hat man das Volumen einer Hälfte desselben $= \pi r^2 l$, und führt man Schnitte parallel zur Basis und in gleichen Abständen, so zerlegt man diesen Körper in n gleiche Theile, wovon jeder $= \frac{\pi r^2 l}{n}$ ist, und der erste um $\frac{l}{n}$, der zweite um $\frac{2l}{n}$, der dritte um $\frac{3l}{n}$ u. s. w. vom Schwerpunkte S absteht. Mittels der Formel in §. 284 folgen nun die Trägheitsmomente dieser Blätter oder Scheiben:

$$\frac{\pi r^2 l}{n}\left[\frac{1}{4} r^2 + \left(\frac{l}{n}\right)^2\right], \quad \frac{\pi r^2 l}{n}\left[\frac{1}{4} r^2 + \left(\frac{2\,l}{n}\right)^2\right],$$
$$\frac{\pi r^2 l}{n}\left[\frac{1}{4} r^2 + \left(\frac{3\,l}{n}\right)^2\right] \text{ u. s. w.,}$$

deren Summe das Trägheitsmoment des halben Cylinders:

$$W = \frac{\pi r^2 l}{n}\left[\frac{n r^2}{4} + \left(\frac{l}{n}\right)^2 (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2)\right]$$
$$= \pi r^2 l \left(\left(\frac{r^2}{4}\right) + \frac{l^2}{n^3}\cdot\frac{n^3}{3}\right) = M\left(\frac{r^2}{4} + \frac{l^2}{3}\right)$$

liefert, und welches auch für den ganzen Cylinder gilt, wenn M die Masse desselben bezeichnet.

Auf ähnliche Weise bestimmt sich das Trägheitsmoment eines geraden Prismas ABD, Fig. 485, in Hinsicht auf eine Queraxe $\overline{XX}$ durch den Schwerpunkt S. Ist k der Trägheitshalbmesser der Grundfläche AB des Prismas in Hinsicht auf eine Axe $\overline{NN}$, welche durch den Schwerpunkt C der Basis geht und parallel $\overline{XX}$ läuft, und bezeichnet l die halbe Länge oder Höhe $CS = DS$ des Prismas, so hat man das gesuchte Trägheitsmoment desselben in Hinsicht auf die Axe $\overline{XX}$:

$$W = M\,(k^2 + \frac{1}{3}\,l^2).$$

Fig. 485.

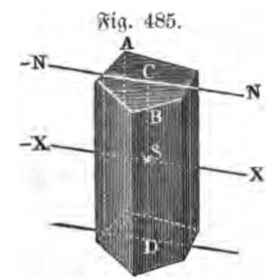
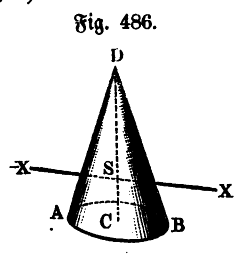


Fig. 486.



Ebenso findet man für den geraden Kegel ABD, Fig. 486, dessen Umdrehungsaxe $\overline{XX}$ durch den Schwerpunkt desselben geht und auf der geometrischen Axe CD winkelrecht steht:

$$W = \frac{3}{20}\,M\left(r^2 + \frac{h^2}{4}\right).$$

§. 292 **Segmente.** Das Trägheitsmoment eines Rotationsparaboloides BAD, Fig. 487, welches sich um seine Rotationsaxe AC dreht, wird ähnlich wie das einer Kugel bestimmt. Ist der Halbmesser der Basis,

$$\overline{CB} = \overline{CD} = a,$$

die Höhe $CA = h$, und läßt man den Körper aus n Scheiben, jede von der Höhe $\frac{h}{n}$ bestehen, so hat man die Inhalte derselben:

$$= \frac{h}{n}\pi \cdot \frac{1}{n} a^2, \frac{h}{n}\pi \cdot \frac{2}{n} a^2, \frac{h}{n}\pi \cdot \frac{3}{n} a^2 \text{ u. s. w.},$$

weil sich die Quadrate der Halbmesser wie die Höhen oder Abstände vom Scheitel A verhalten. Hieraus ergeben sich die Trägheitsmomente der auf einander folgenden scheibenförmigen Elemente des Körpers:

$$= \frac{h}{n} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{a^4}{n^2}, \frac{h}{n} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{4a^4}{n^2}, \frac{h}{n} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{9a^4}{n^2} \text{ u. s. w.},$$

und daher folgt endlich das **Trägheitsmoment des ganzen Paraboloides**:

$$W = \frac{\pi a^4 h}{2n^3}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) = \frac{\pi a^4 h}{2n^3} \cdot \frac{n^3}{3} = \frac{\pi a^4 h}{6}$$

$$= \frac{\pi a^2 h}{2} \cdot \frac{a^2}{3} = {}^1/_3 M a^2,$$

weil das Volumen dieses Körpers, $M = \frac{\pi a^2 h}{2}$ ist.

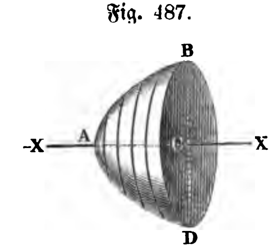


Fig. 487.

Diese Formel läßt sich auch auf ein **niedriges Kugelsegment** anwenden.

Ist die Höhe h eines solchen Segmentes gegen a nicht sehr klein, so hat man für das Trägheitsmoment einer Scheibe desselben:

$$W_1 = \frac{\pi h}{2n} \cdot a^4 = \frac{\pi h}{2n} \cdot h^2 (2r - h)^2$$

$$= \frac{\pi h}{2n} \cdot (4r^2 h^2 - 4rh^3 + h^4)$$

zu setzen, wobei r den Kugelhalbmesser bezeichnet.

Nimmt man nun successiv statt h die Werthe $\frac{h}{n}, \frac{2h}{n}, \frac{3h}{n}$ u. s. w. an, so erhält man das Trägheitsmoment des Kugelabschnittes:

$$W = \frac{\pi h}{2n}\left[4r^2 \left(\frac{h}{n}\right)^2 \cdot \frac{n^3}{3} - 4r\left(\frac{h}{n}\right)^3 \cdot \frac{n^4}{4} + \left(\frac{h}{n}\right)^4 \cdot \frac{n^5}{5}\right]$$

$$= \frac{\pi h^3}{30}(20r^2 - 15rh + 3h^2).$$

Der Inhalt oder die Masse des Kugelsegmentes ist:

$$M = \pi h^2 (r - {}^1/_3 h),$$

daher:

$$W = \pi h^2 (r - {}^1/_3 h) \cdot \frac{2h}{3}\left(r - {}^5/_{12} h + {}^1/_{90} \cdot \frac{h^2}{r - {}^1/_3 h}\right)$$

$$= {}^2/_3 M h \left(r - {}^5/_{12} h + {}^1/_{90} \cdot \frac{h^2}{r - {}^1/_3 h}\right).$$

Meist ist genügend genau

$$W = {}^2/_3 M h (r - {}^5/_{12} h) = {}^1/_3 M (a^2 + {}^1/_6 h^2).$$

Diese Formel findet ihre Anwendung bei den **Pendellinsen**.

§. 293 **Parabel und Ellipse.** Für eine Parabelfläche ABD, Fig. 488, ist (nach §. 233), wenn man statt der Fläche F die Masse M einführt, also F mit M vertauscht, und die Sehne AB wieder mit s, sowie die Bogenhöhe CD mit h bezeichnet, das Trägheitsmoment in Hinsicht auf die geometrische Axe $\overline{X}X$ dieser Fläche:

Fig. 488.

$$W_1 = \frac{Ms^2}{20},$$

und das in Hinsicht auf die Axe $\overline{Y}Y$, welche durch den Schwerpunkt S der Fläche geht und rechtwinkelig gegen $\overline{X}X$ steht:

$$W_2 = {}^{12}/_{175}\, Mh^2.$$

Hieraus folgt das Trägheitsmoment in Hinsicht auf eine durch S rechtwinkelig zur Parabelfläche gehende Axe:

$$W = W_1 + W_2 = M\left(\frac{s^2}{20} + {}^{12}/_{175}\, h^2\right) = {}^1/_5\, M\left[\left(\frac{s}{2}\right)^2 + {}^{12}/_{35}\, h^2\right].$$

Für eine solche Axe durch den Parabelscheitel D wäre hingegen, da $DS = {}^3/_5\, h$ ist (§. 115), dieses Moment:

$$W_3 = W + M\,({}^3/_5\, h)^2 = {}^1/_5\, M\left[\left(\frac{s}{2}\right)^2 + {}^{15}/_7\, h^2\right]$$

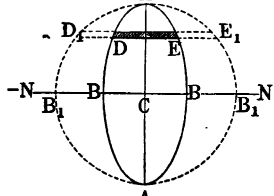
und dagegen für das Moment durch den Mittelpunkt C der Sehne:

$$W_4 = W + M\,({}^2/_5\, h)^2 = {}^1/_5\, M\left[\left(\frac{s}{2}\right)^2 + {}^8/_7\, h^2\right].$$

Diese Formel gilt natürlich auch für ein Prisma mit parabolischen Grundflächen, namentlich auch für Balanciers, welche aus zwei solchen Prismen bestehen und um eine durch ihre Mitte C gehende Axe schwingen.

Für eine Ellipse $ABAB$, Fig. 489, mit den Halbaxen $CA = a$ und $CB = b$ ist (nach §. 231) das Trägheitsmoment in Hinsicht auf die Axe BB:

Fig. 489.



$$W_1 = \frac{\pi a^3 b}{4} = \frac{Ma^2}{4}$$

und das in Hinsicht auf die Axe AA:

$$W_2 = \frac{\pi a b^3}{4} = \frac{Mb^2}{4};$$

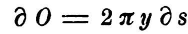
folglich das Trägheitsmoment in Hinsicht

auf eine Axe durch die Mitte C und rechtwinkelig zur Ebene der Figur: $W = W_1 + W_2 = {}^1/_4 M (a^2 + b^2)$.

Rotationsflächen und Rotationskörper. Mit Hülfe des höheren Calculs lassen sich die Trägheitsmomente von Rotationsflächen und Rotationskörpern (s. §. 125) durch die im Folgenden entwickelten Formeln ermitteln. (§. 294)

1) Dreht sich ein Gürtel oder eine Zone $P Q Q_1 P_1$, Fig. 490, vom Halbmesser $MP = y$ und der Breite $PQ = \partial s$ um seine geometrische Axe AC, so fällt, da der Inhalt desselben (nach §. 125)

Fig. 490.



$$\partial O = 2 \pi y \partial s$$

ist, das Trägheitsmoment desselben

$$y^2 \partial O = 2 \pi y^3 \partial s$$

aus, und es ist folglich das Trägheitsmoment der ganzen Rotationsfläche $A P P_1$ in Hinsicht auf ihre Axe AC:

$$W = 2 \pi \int y^3 \partial s.$$

2) Eine Scheibe $P Q Q_1 P_1$, deren Volumen $\partial V = \pi y^2 \partial x$ zu setzen ist, hat nach §. 288 das Trägheitsmoment in Hinsicht auf die Axe AC:

$$\frac{\partial V . y^2}{2} = \frac{\pi y^4 \partial x}{2},$$

folglich ist das Trägheitsmoment des ganzen Rotationskörpers $A P P_1$:

$$W = \frac{\pi}{2} \int y^4 \partial x.$$

Wäre AP ein Kreisbogen, und folglich die von ihm durch Umdrehung erzeugte Fläche eine Kugelcalotte, so hätte man:

$$y^2 = 2 r x - x^2 \text{ und } y \partial s = r \partial x,$$

folglich das Trägheitsmoment dieser Calotte:

$$W = 2 \pi \int (2 r x - x^2) \, r \partial x = 2 \pi r \left(2 r \int x \partial x - \int x^2 \partial x\right)$$
$$= 2 \pi r \left(r x^2 - \frac{x^3}{3}\right),$$

oder, wenn man die Höhe $AM = x$ durch h ersetzt:

$$W = 2 \pi r h^2 \left(r - \frac{h}{3}\right) = M h \left(r - \frac{h}{3}\right),$$

da der Inhalt oder die Masse der Calotte, $M = 2 \pi r h$ ist.

Für die ganze Kugeloberfläche ist $h = 2r$ und daher

$$W = {}^2/_3 M r^2.$$

Wäre hingegen AP ein Ellipsenbogen und folglich der mittels der ebenen Fläche APM durch Umdrehung erzeugte Rotationskörper APP_1 die Calotte eines Rotationsellipsoides, so hätte man

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2),$$

und daher das Trägheitsmoment desselben in Hinsicht auf die Axe AC:

$$W = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{b^4}{a^4}\int(2ax - x^2)^2 \partial x$$

$$= \frac{\pi b^4}{2a^4}\int(4a^2x^2 - 4ax^3 + x^4)\partial x$$

$$= \frac{\pi b^4}{2a^4}\left({}^4/_3\, a^2x^3 - ax^4 + \frac{x^5}{5}\right);$$

z. B. für das ganze Ellipsoid, für welches $x = 2a$ ist:

$$W = {}^8/_{15}\,\pi b^4 a = {}^2/_5 \,.\, {}^4/_3\,\pi a b^2 \,.\, b^2 = {}^2/_5\, M b^2,$$

da sich der Inhalt dieses Körpers durch $\frac{b^2}{a^2}\cdot{}^2/_3\,\pi a^3 = {}^4/_3\,\pi a b^2$ ausdrücken läßt (vergl. §. 123).

3) Dreht sich ferner der Gürtel PQQ_1P_1 um eine Axe durch A, welche rechtwinkelig auf der geometrischen Axe AC steht, so hat man (nach §. 284 und §. 291) das Trägheitsmoment desselben

$$= \partial O\,(x^2 + {}^1/_2\, y^2) = 2\pi\,(x^2 + {}^1/_2\, y^2)\, y \partial s,$$

und daher das Trägheitsmoment der ganzen Calotte APP_1:

$$W = \pi\int(2x^2 + y^2)\, y\partial s.$$

4) Dreht sich endlich die ganze Scheibe PQQ_1P_1 um eben diese Axe durch A, so ist deren Trägheitsmoment

$$\partial V\,(x^2 + {}^1/_4\, y^2) = \pi y^2\,(x^2 + {}^1/_4\, y^2)\,\partial x,$$

und daher das des ganzen Körpers APP_1:

$$W = \pi\int(x^2 + {}^1/_4\, y^2)\, y^2 \partial x.$$

Für ein Rotationsparaboloid (s. §. 292) ist, wenn man dessen Höhe AM durch h und den Halbmesser MP seiner Basis durch a bezeichnet:

$$\frac{y^2}{a^2} = \frac{x}{h},$$

folglich das Trägheitsmoment in Hinsicht auf die Ordinatenaxe durch A:

$$W = \frac{\pi a^2}{h}\int\left(x^2 + {}^1/_4\,\frac{a^2x}{h}\right)x\partial x = \frac{\pi a^2}{h}\left({}^1/_4\, x^4 + {}^1/_{12}\,\frac{a^2x^3}{h}\right),$$

also, wenn man $x = h$ einführt:

$$W = \frac{1}{4}\pi a^2 h\,(h^2 + \frac{1}{3}a^2) = \frac{1}{2}M\,(h^2 + \frac{1}{3}a^2),$$

da das Volumen dieses Körpers $= \frac{1}{2}\pi a^2 h$ ist (vergl. §. 124).

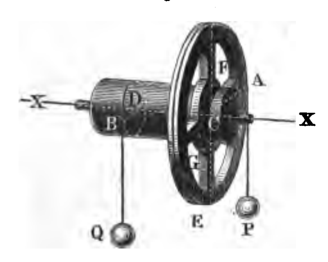
Hieraus folgt endlich wieder das Trägheitsmoment dieses Körpers in Hinsicht auf eine Axe durch den Schwerpunkt S und rechtwinkelig zu AC:

$$W_1 = \frac{1}{2}M\,(h^2 + \frac{1}{3}a^2) - (\frac{2}{3})^2 Mh^2 = \frac{1}{6}M\,(a^2 + \frac{1}{3}h^2).$$

§. 295 **Beschleunigte Umdrehung einer Radwelle.** Die Theorie der Trägheitsmomente findet gerade bei Maschinen und Instrumenten die häufigsten Anwendungen, weil an diesen meist rotirende Bewegungen um eine feste Axe vorkommen. Es werden deshalb in der Folge noch vielfache Anwendungen dieser Lehre vorkommen, und möge daher genügen, zunächst nur einige einfache Fälle derselben abzuhandeln.

Wirken an einer Radwelle $ACDB$, Fig. 491, mit den Hebelarmen $CA = a$ und $DB = b$ zwei Gewichte P und Q mittelst vollkommen biegsamer Schnüre, und sind die Zapfen hinreichend dünn, um die Zapfenreibung vernachlässigen zu können, so bleibt diese Maschine im Gleichgewichte, wenn die statischen Momente $P.\overline{CA}$ und $Q.\overline{DB}$ einander gleich sind, also $Pa = Qb$ ist. Ist hingegen das Moment vom Gewichte P größer als von Q, also $Pa > Qb$, so sinkt P und steigt Q, ist dagegen $Pa < Qb$, so steigt P und sinkt Q. Untersuchen wir nun die Bewegungsverhältnisse in einem der letzteren Fälle, setzen wir z. B. voraus, daß $Pa > Qb$ sei. Die dem Gewichte Q entsprechende und am Arme b wirkende Kraft erzeugt am Hebelarme a eine Kraft: $\frac{Qb}{a}$, welche der dem Gewichte P entsprechenden Kraft entgegenwirkt, so daß die bewegende und in A angreifende Kraft, $P - \frac{Qb}{a}$ übrig bleibt. Die Masse $\frac{Q}{g}$ reducirt sich beim Versetzen aus dem Abstande b in den Abstand a auf $\frac{Qb^2}{ga^2}$, es ist daher die von der Kraft $P - \frac{Qb}{a}$ bewegte Masse:

Fig. 491.



$$M = \left(P + \frac{Qb^2}{a^2}\right) : g,$$

oder, wenn das Trägheitsmoment der Radwelle, $W = \frac{Gk^2}{g}$ und daher die

auf A reducirte träge Masse derselben, $= \frac{G k^2}{g a^2}$ ist, schärfer:

$$M = \left(P + \frac{Q b^2}{a^2} + \frac{G k^2}{a^2}\right) : g = (P a^2 + Q b^2 + G k^2) : g a^2.$$

Hieraus folgt nun die Acceleration des Gewichtes P oder Radumfanges:

$$p = \frac{\text{Bewegende Kraft}}{\text{Masse}} = \frac{P - \frac{Q b}{a}}{P a^2 + Q b^2 + G k^2} \cdot g a^2$$

$$= \frac{P a - Q b}{P a^2 + Q b^2 + G k^2} \cdot g a;$$

dagegen die Acceleration des steigenden Gewichtes Q oder des Wellenumfanges:

$$q = \frac{b}{a} p = \frac{P a - Q b}{P a^2 + Q b^2 + G k^2} \cdot g b.$$

Die Spannung des Seiles von P ist:

$$S = P - \frac{P p}{g} = P\left(1 - \frac{p}{g}\right) \text{ (s. §. 76)},$$

die des Seiles von Q:

$$S_1 = Q + \frac{Q q}{g} = Q\left(1 + \frac{q}{g}\right),$$

daher der Zapfendruck:

$$S + S_1 = P + Q - \frac{P p}{g} + \frac{Q q}{g} = P + Q - \frac{(P a - Q b)^2}{P a^2 + Q b^2 + G k^2}.$$

Es ist folglich der Druck im Zapfen bei einer umlaufenden Radwelle kleiner als bei einer im Gleichgewichte stehenden Radwelle.

Aus den Accelerationen p und q lassen sich endlich die übrigen Bewegungsverhältnisse finden; es ist nach t Secunden die Geschwindigkeit von P:

$$v = p t,$$

von Q:

$$v_1 = q t,$$

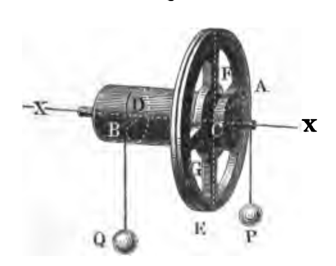
und der durchlaufene Weg von P:

$$s = \tfrac{1}{2} p t^2,$$

so wie der Weg von Q:

$$s_1 = \tfrac{1}{2} q t^2.$$

Fig. 492.



Beispiel. Es sei das Gewicht am Rade Fig. 492, $P = 60$ Pfund, das an der Welle, $Q = 160$ Pfund, der Hebelarm von jenem, $CA = a = 20$ Zoll, und von diesem, $DB = b = 6$ Zoll; es bestehe ferner die Welle aus einem massiven Cylinder von 10 Pfund Gewicht, das Rad aber aus zwei eisernen Ringen und vier

Armen, jene zu 40 und 12 Pfund, diese zusammen von 15 Pfund Gewicht; endlich seien die Halbmesser des größeren Radringes AE, $= 20$ und 19 Zoll, und die des kleineren Ringes FG, $= 8$ und 6 Zoll. Man soll die Bewegungsverhältnisse dieser Maschine angeben. Die bewegende Kraft am Radumfange ist:

$$P - \frac{b}{a} Q = 60 - \tfrac{6}{20} . 160 = 60 - 48 = 12 \text{ Pfund},$$

und das Trägheitsmoment der Maschine, wenn man noch die Zapfen und Seilmassen unberücksichtigt läßt, gleich Trägheitsmoment der Welle:

$$= \frac{W b^2}{2} = \frac{10 . 6^2}{2} = 180,$$

plus Moment des kleineren Ringes:

$$= \frac{R_1 (r_1^2 + r_2^2)}{2} = \frac{12 . (8^2 + 6^2)}{2} = 600,$$

plus Moment des größeren Ringes:

$$= \frac{R_2 (r_3^2 + r_4^2)}{2} = \frac{40 . (20^2 + 19^2)}{2} = 15220,$$

plus Moment der Arme, annähernd:

$$= \frac{A (r_4^3 - r_1^3)}{3 (r_4 - r_1)} = \frac{A (r_1^2 + r_1 r_4 + r_4^2)}{3} = \frac{15 . (19^2 + 19 . 8 + 8^2)}{3} = 2885,$$

daher zusammen:

$$G k^2 = 180 + 600 + 15220 + 2885 = 18885,$$

oder für Fußmaß:

$$= \frac{18885}{144} = 131,14.$$

Die gesammte, auf den Radumfang reducirte Masse ist nun:

$$M = \left(P + \frac{Q b^2 + G k^2}{a^2}\right) : g = \left[60 + 160 \left(\frac{6}{20}\right)^2 + \frac{18885}{20^2}\right] : g$$

$$= \left(60 + 160 . 0,09 + \frac{18885}{400}\right) . 0,032$$

$$= (60 + 14,4 + 47,21) . 0,032 = 121,61 . 0,032 = 3,8915 \text{ Pfund}.$$

Hiernach folgt die Acceleration des Gewichtes P sowie die des Radumfanges:

$$p = \frac{P - \frac{b}{a} Q}{\frac{P a^2 + Q b^2 + G k^2}{a^2}} \cdot g = \frac{12}{3,8915} = 3,084 \text{ Fuß},$$

dagegen die von Q:

$$q = \frac{b}{a} p = \tfrac{6}{20} . 3,084 = 0,925 \text{ Fuß};$$

ferner die Seilspannung von P:

$$S = \left(1 - \frac{p}{g}\right) . P = \left(1 - \frac{3,084}{31,25}\right) . 60 = (1 - 0,099) . 60 = 54,06 \text{ Pfd.},$$

dagegen die von Q:

$$S_1 = \left(1 + \frac{q}{g}\right) . Q = (1 + 0,925 . 0,032) . 160 = 1,030 . 160 = 164,8 \text{ Pfd.};$$

und folglich der Zapfendruck $S + S_1 = 54,06 + 164,80 = 218,86$ Pfund oder mit Einschluß des Gewichtes der Maschine, $= 218,86 + 77 = 295,86$ Pfund. Nach 10 Secunden hat P die Geschwindigkeit $v = p t = 3,084 . 10 = 30,84$

Fuß erlangt, und den Weg $s = \frac{vt}{2} = 30{,}84 . 5 = 154{,}2$ Fuß zurückgelegt, und es ist Q um $s_1 = \frac{b}{a} s = 0{,}3 . 154{,}2 = 46{,}26$ Fuß gestiegen.

§. 296 Das Gewicht P, welches dem Gewichte Q die Acceleration

$$q = \frac{Pab - Qb^2}{Pa^2 + Qb^2 + Gk^2} \cdot g$$

ertheilt, kann auch durch ein anderes Gewicht P_1 ersetzt werden, ohne die Acceleration von Q zu verändern, wenn dasselbe an einem Hebelarme a_1 wirkt, für welchen ist:

$$\frac{P_1 a_1 - Qb}{P_1 a_1^2 + Qb^2 + Gk^2} = \frac{Pa - Qb}{Pa^2 + Qb^2 + Gk^2}.$$

Die Größe $\frac{Pa^2 + Qb^2 + Gk^2}{Pa - Qb}$ durch c bezeichnet, erhält man:

$$a_1^2 - c a_1 = - \frac{Qb(b + c) + Gk^2}{P_1},$$

und den in Frage stehenden Hebelarm:

$$a_1 = \frac{1}{2} c \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \frac{Qb(b + c) + Gk^2}{P_1}}.$$

Auch läßt sich mit Hülfe der Differenzialrechnung finden, daß Q vom Gewichte P dann am stärksten accelerirt wird, wenn der Hebelarm des letzten der Gleichung $Pa^2 - 2Qab = Qb^2 + Gk^2$ entspricht, also

$$a = \frac{bQ}{P} + \sqrt{\left(\frac{bQ}{P}\right)^2 + \frac{Qb^2 + Gk^2}{P}}$$

ist.

Die im Vorstehenden gefundenen Formeln nehmen eine complicirtere Gestalt an, wenn auf die Reibung der Zapfen und Steifigkeit der Seile Rücksicht genommen wird. Bezeichnen wir den Inbegriff beider Widerstände, reducirt auf den Umfang der Zapfen, deren Halbmesser $= r$ sein möge, durch F, so ist statt der bewegenden Kraft $P - \frac{b}{a} Q$, der Werth $P - \frac{Qb + Fr}{a}$ zu substituiren, weshalb z. B. die Beschleunigung von Q:

$$q = \frac{(Pa - Fr)\, b - Qb^2}{Pa^2 + Qb^2 + Gk^2} \cdot g$$

und

$$a = \frac{Qb + Fr}{P} + \sqrt{\left(\frac{Qb + Fr}{P}\right)^2 + \frac{Qb^2 + Gk^2}{P}}$$

ausfällt.

Beispiele. 1) Wenn die Gewichte $P = 30$ Pfund, $Q = 80$ Pfund an den Hebelarmen $a = 2$ Fuß und $b = \frac{1}{2}$ Fuß einer Radwelle wirken und das Trägheitsmoment dieser Maschine, $Gk^2 = 60$ beträgt, so ist die Beschleunigung des steigenden Gewichtes Q:

$$q = \frac{30 \,.\, 2 \,.\, \frac{1}{2} - 80 \,.\, (\frac{1}{2})^2}{30 \,.\, 2^2 + 80 \,.\, (\frac{1}{2})^2 + 60} \cdot g = \frac{30 - 20}{120 + 20 + 60} \cdot 31,25 = \frac{312,5}{200}$$
$$= 1,5625 \text{ Fuß.}$$

Soll aber ein Gewicht $P_1 = 45$ Pfund dieselbe Beschleunigung von Q hervorbringen, so ist der Hebelarm von P_1:

$$a_1 = \frac{c}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \frac{80 \,.\, \frac{1}{2}\,(\frac{1}{2} + c) + 60}{45}},$$

oder, da $c = \frac{200}{60 + 40} = 10$ ist,

$$a_1 = 5 \pm \sqrt{25 - \frac{32}{3}} = 5 \pm \tfrac{1}{3} \,.\, 11,358 = 5 \pm 3,786$$
$$= 8,786 \text{ Fuß oder } 1,214 \text{ Fuß.}$$

2) Die Beschleunigung von Q fällt am größten aus, wenn der Hebelarm der Kraft oder der Halbmesser des Rades,

$$a = \frac{\frac{1}{2} \,.\, 80}{30} + \sqrt{\left(\frac{40}{30}\right)^2 + \frac{20 + 60}{30}} = \frac{4}{3} + \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{24}{9}} = \frac{4 + \sqrt{40}}{3}$$
$$= 3,4415 \text{ Fuß}$$

beträgt. Es ist diese Maximalbeschleunigung:

$$q = \left(\frac{30 \,.\, 1,7207 - 20}{30 \,.\, (3,4415)^2 + 80}\right) g = \frac{31,621}{435,32} \cdot g = 2,270 \text{ Fuß.}$$

3) Ist das Moment der Reibung sammt Seilsteifigkeit, $Fr = 8$, so hat man statt Qb, $Qb + Fr = 40 + 8 = 48$ zu setzen, weshalb folgt:

$$a = \frac{48}{30} + \sqrt{\left(\frac{48}{30}\right)^2 + \frac{8}{3}} = 1,6 + \sqrt{5,227} = 3,886 \text{ Fuß}$$

und die entsprechende Maximalbeschleunigung:

$$q = \frac{30 \,.\, 1,943 - 8 \,.\, \frac{1}{2} - 20}{30 \,.\, (3,886)^2 + 80} \cdot g = \frac{34,29}{533} \cdot 31,25 = 2,01 \text{ Fuß.}$$

§. 297 **Fallmaschine.** Die §. 295 gefundenen Formeln für die Radwelle gelten auch für die einfache feste Rolle, denn setzt man $b = a$, so geht die Radwelle in eine Rolle oder Welle über. Behält man die übrige Bezeichnung des angeführten Paragraphen bei, so hat man für die Beschleunigung, mit welcher P sinkt und Q steigt:

$$p = q = \frac{(P - Q)\, a^2}{(P + Q)\, a^2 + G k^2} \cdot g,$$

oder, mit Berücksichtigung der Reibung:

$$p = q = \frac{(P - Q)\, a^2 - F a r}{(P + Q)\, a^2 + G k^2} \cdot g.$$

Um die Zapfenreibung herabzuziehen, legt man die Zapfen C der Rolle AB, Fig. 493 (a. f. S.), auf Frictionsräder DEF und $D_1 E_1 F_1$. Sind nun die Trägheitsmomente dieser Räder $G_1 k_1^2$ und die Halbmesser derselben,

$DE = D_1 E_1 = a_1$, so hat man, wenn F wieder die auf den Umfang des Zapfens C reducirten Reibungen bezeichnet, zu setzen:

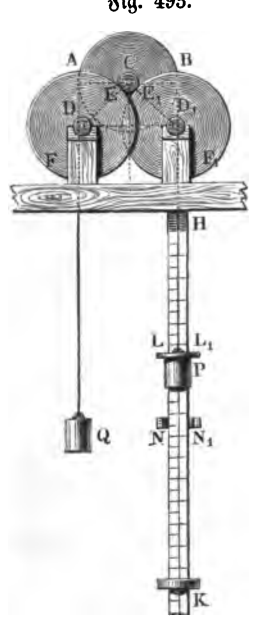
$$p = q = \frac{(P - Q)\, a^2 - F a r}{(P + Q)\, a^2 + G k^2 + G_1 \frac{k_1^2 r^2}{a_1^2}} \cdot g,$$

weil die auf den Umfang der Frictionsräder oder der Radzapfen reducirte träge Masse dieser Räder, $= \frac{G_1 k_1^2}{a_1^2}$ beträgt. Durch Umkehrung erhält man die Beschleunigung der Schwere:

$$g = \frac{(P + Q)\, a^2 + G k^2 + G_1 \frac{k_1^2 r^2}{a_1^2}}{(P - Q)\, a^2 - F a r} \cdot p.$$

Bei einer kleinen Differenz $P - Q$ beider Gewichte fällt die Beschleunigung p klein aus, es geht daher die Bewegung langsam vor sich und es ist der Widerstand, welchen die Luft den Gewichten entgegensetzt, unbedeutend, weshalb sich mit Hülfe von Versuchen über das Sinken von Gewichten an einer solchen Vorrichtung die Beschleunigung der Schwere mit ziemlicher Sicherheit ermitteln läßt, was bei einem frei fallenden Körper geradezu unmöglich ist. Versuche der Art hat zuerst der Engländer Atwood (s. Atwood's Treatise on Rectilinear and Rotary Motion) angestellt, weshalb der Apparat unter dem Namen der Atwood'schen Fallmaschine bekannt ist. Zur Bestimmung der Fallräume dient eine Scala HK, an der das Gewicht P niedersinkt. Aus dem Fallraume s und der entsprechenden Zeit t folgt allerdings schon

Fig. 493.



$$p = \frac{2 \cdot s}{t^2};$$

hebt man aber die bewegende Kraft während des Fallens auf, indem man ein ihr gleiches und einen hohlen Ring bildendes Gewicht LL_1 von einem festen engeren Ringe NN_1 auffangen läßt, so wird der übrige Theil s_1 des Fallraumes gleichförmig durchlaufen und es ergiebt sich nun mit Hülfe der an einer guten Uhr beobachteten Zeit t_1 die Geschwindigkeit:

$$v = \frac{s_1}{t_1},$$

sowie die Acceleration:

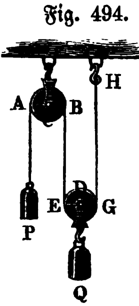
$$p = \frac{v}{t} = \frac{s_1}{tt_1}.$$

Macht man endlich $t_1 = t = 1$, so giebt der Versuch unmittelbar $p = s_1$. Setzt man den so gefundenen Werth von p in die obige Formel, so bestimmt sich dadurch die Beschleunigung g der Schwere.

Beschleunigte Bewegung der Rollenzüge. Die Accelerationen der Gewichte P und Q, welche an einer Verbindung aus einer festen Rolle AB und einer losen Rolle EG, Fig. 494, hängen, ergeben sich auf folgende Weise. Es seien die Gewichte der Rollen AB und EG, $= G$ und G_1, die Trägheitsmomente derselben Gk^2 und $G_1 k_1^2$ und die Halbmesser $CA = a$ und $DE = a_1$, also die auf die Umfänge reducirten Massen $M = \frac{G}{g} \cdot \frac{k^2}{a^2}$ und $M_1 = \frac{G_1}{g} \cdot \frac{k_1^2}{a_1^2}$. Sinkt das Gewicht P um einen gewissen Weg s, so steigt $Q + G_1$ auf $\frac{1}{2} s$ (§. 164), es wird daher die Arbeit $Ps - (Q + G_1) \frac{s}{2}$ verrichtet; hat bei diesem Sinken das Gewicht P die Geschwindigkeit v angenommen, so ist $Q + G_1$ in die Geschwindigkeit $\frac{v}{2}$ versetzt worden, und es hat die Rolle AB die Umfangsgeschwindigkeit v und die Rolle EG, da bei der rollenden Bewegung progressive Bewegung und drehende einander gleich sind, die Umfangsgeschwindigkeit $\frac{v}{2}$ erlangt. Die Summe der diesen Massen und Geschwindigkeiten entsprechenden lebendigen Kräfte ist:

§. 298

Fig. 494.



$$\frac{P}{g} \cdot v^2 + \frac{Q + G_1}{g} \cdot \left(\frac{v}{2}\right)^2 + \frac{Gk^2}{g a^2} \cdot v^2 + \frac{G_1 k_1^2}{g a_1^2} \cdot \left(\frac{v}{2}\right)^2,$$

und setzt man nun ihre Hälfte der aufgewendeten Arbeit gleich, so bekommt man die Gleichung:

$$\left(P - \frac{(Q + G_1)}{2}\right) s = \left(P + \frac{Q + G_1}{4} + \frac{Gk^2}{a^2} + \frac{G_1 k_1^2}{4 a_1^2}\right) \frac{v^2}{2g}.$$

Hiernach ist die dem von P zurückgelegten Raume s entsprechende Geschwindigkeit:

$$v = \sqrt{\frac{2gs\left(P - \frac{Q + G_1}{2}\right)}{P + \frac{Q + G_1}{4} + \frac{Gk^2}{a^2} + \frac{G_1 k_1^2}{4 a_1^2}}}.$$

Für die Acceleration p ist $p s = \frac{v^2}{2}$, daher hier

$$p = \left(\frac{P - \frac{Q + G_1}{2}}{P + \frac{Q + G_1}{4} + \frac{G k^2}{a^2} + \frac{G_1 k_1^2}{4 a_1^2}} \right) g.$$

Die Acceleration von $Q + G_1$ ist $p_1 = \frac{p}{2}$, und ebenso groß ist auch die drehende Acceleration von G_1.

Die Spannung des beide Rollen verbindenden Seiles BE ist

$$S = P - \left(P + \frac{G k^2}{a^2}\right) \frac{p}{g},$$

weil die Kraft $\left(P + \frac{G k^2}{a^2}\right) \frac{p}{g}$ auf die Beschleunigung von P und G verwendet wird; die Spannung des befestigten Seiles GH hingegen:

$$S_1 = S - \frac{G_1 k_1^2}{a_1^2} \cdot \frac{p}{2 g},$$

weil die Rolle EG durch die Differenz $S - S_1$ der Seilspannungen in Umdrehung gesetzt wird.

Beispiel. An der Rollenverbindung in Fig. 494 hängen die Gewichte $P = 40$ Pfund und $Q = 66$ Pfund, und es wiegt jede der massiven Rollen 6 Pfund; man sucht die Beschleunigungen dieser Gewichte.

Die bewegende Kraft ist:

$$P - \frac{Q + G_1}{2} = 40 - \frac{66 + 6}{2} = 4 \text{ Pfund},$$

die Masse einer Rolle auf ihren Umfang reducirt:

$$\frac{G k^2}{g a^2} = \frac{G_1 k_1^2}{g a_1^2} = \frac{G}{2 g} = \frac{6}{2 g} = \frac{3}{g} \text{ (§. 288)},$$

und die gesammte träge Masse

$$= \left(P + \frac{Q + G_1}{4} + \frac{G k^2}{a^2} + \frac{G_1 k_1^2}{4 a_1^2}\right) : g = (40 + {}^{72}/_4 + 3 + {}^3/_4) : g = \frac{247}{4 g},$$

daher die Beschleunigung des sinkenden Gewichtes:

$$p = \frac{4}{247} \cdot 4 g = \frac{16 . g}{247} = \frac{16 . 31{,}25}{247} = {}^{500}/_{247} = 2{,}024 \text{ Fuß};$$

dagegen die Acceleration des steigenden Gewichtes:

$$p_1 = \frac{p}{2} = 1{,}012 \text{ Fuß}.$$

Die Spannung des Seiles BE ist:

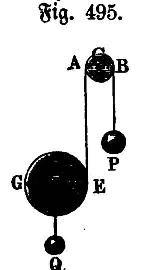
$$S = P - \left(P + \frac{G}{2}\right) \frac{p}{g} = 40 - 43 \cdot \frac{2{,}024}{31{,}25} = 40 - 2{,}785 = 37{,}215 \text{ Pfund};$$

die des Seiles GH:

$$S_1 = S - \frac{G}{2} \cdot \frac{p}{2 g} = 37{,}215 - 3 \cdot \frac{1{,}012}{31{,}25} = 37{,}118 \text{ Pfund}.$$

§. 299 Zusammengesetzter ist die Bewegung, wenn die Rolle EG, Fig. 495, nur an einem umgeschlagenen Seile hängt. Nehmen wir an, daß P mit der Acceleration p sinkt, und Q mit q steigt, so erhalten wir die Acceleration der drehenden Bewegung am Umfang der losen Rolle:

Fig. 495.



$$q_1 = p - q \text{ (§. 45)}.$$

Setzen wir nun die Spannung des Seiles AE, $= S$, so erhalten wir:

$$P - S = \left(P + \frac{Gk^2}{a^2}\right)\frac{p}{g},$$

ferner:

$$S - (Q + G_1) = (Q + G_1)\frac{q}{g},$$

da nach §. 281 angenommen werden kann, daß S in dem Schwerpunkte D von EG angreift, und endlich:

$$S = \frac{G_1 k_1^2}{a_1^2} \cdot \frac{q_1}{g},$$

da auch anzunehmen ist, daß der Schwerpunkt D festgehalten und die Rolle durch S in Umdrehung gesetzt wird.

Die letzten drei Formeln geben die Accelerationen:

$$p = \frac{P - S}{P + \frac{Gk^2}{a^2}} g,\ q = \left(\frac{S - (Q + G_1)}{Q + G_1}\right) g \text{ und } q_1 = \frac{S a_1^2}{G_1 k_1^2} g;$$

und alle drei in die Gleichung $q_1 = p - q$ eingesetzt, erhält man:

$$\frac{S a_1^2}{G_1 k_1^2} g = \frac{P - S}{P + \frac{Gk^2}{a^2}} g - \frac{S - (Q + G_1)}{Q + G_1} g,$$

woraus nun die Seilspannung

$$S = \frac{2Pa^2 + Gk^2}{\left(\frac{a_1^2}{G_1 k_1^2} + \frac{1}{Q + G_1}\right)(Pa^2 + Gk^2) + a^2}$$

folgt. Aus dem Werthe für S ergeben sich nun auch durch Anwendung obiger Formeln die Beschleunigungen der Gewichte P und Q.

Vernachlässigen wir die Masse G der festen Rolle, und setzen wir auch $Q =$ Null, so erhalten wir einfach:

$$S = \frac{2Pa^2 . G_1 k_1^2}{P(a_1^2 + k_1^2)a^2 + Ga^2 k_1^2} = \frac{2PG_1 k_1^2}{G_1 k_1^2 + P(a_1^2 + k_1^2)}.$$

Ist das Seilende AE, statt daß es über die Rolle AB weggeht, fest, so hat man die Beschleunigung $p = 0$, daher $q_1 = -q$ und folglich die Spannung:

$$S = \frac{(Q + G_1)\, G_1 k_1^2}{(Q + G_1)\, a_1^2 + G_1 k_1^2};$$

für $Q =$ Null:

$$S = \frac{G_1 k_1^2}{a_1^2 + k_1^2}.$$

Ist der rollende Körper G_1 ein massiver Cylinder, so hat man:

$$\frac{G_1 k_1^2}{a_1^2} = \frac{1}{2}\, G_1,$$

und es ergiebt sich die Spannung für den ersten Fall:

$$S = \frac{2\, P\, G_1}{3\, P + G_1},$$

und für den zweiten:

$$S = \frac{G_1}{3}.$$

Soll im ersten Falle das Gewicht P steigen, so hat man p negativ, also $S > P$, d. i.:

$$2\, P\, G_1\, k_1^2 > P\, G_1\, k_1^2 + P^2\, (a_1^2 + k_1^2),$$

einfach:

$$\frac{G_1}{P} > 1 + \frac{a_1^2}{k_1^2};$$

damit ferner G_1 sinke, ist nöthig, daß $S < G_1$, also

$$\frac{G_1}{P} > 1 - \frac{a_1^2}{k_1^2} \text{ sei.}$$

Beispiel. Wenn bei der Rollenverbindung des Beispieles zu §. 298, Fig. 494, das Seil GH plötzlich reißt, so wird wenigstens anfänglich das Seil BE gespannt durch die Kraft:

$$S = \frac{2\, P + \frac{G\, k^2}{a^2}}{\left(\frac{a_1^2}{G_1 k_1^2} + \frac{1}{Q + G_1}\right)\left(P + \frac{G\, k^2}{a^2}\right) + 1} = \frac{2\,.\,40 + 3}{(1/3 + 1/72)\,(40 + 3) + 1}$$

$$= \frac{83\,.\,72}{25\,.\,43 + 72} = \frac{5976}{1147} = 5{,}210 \text{ Pfund.}$$

Hierbei ist die Beschleunigung des sinkenden Gewichtes P:

$$p = \left(\frac{P - S}{P + \frac{G\, k^2}{a^2}}\right) g = \left(\frac{40 - 5{,}210}{40 + 3}\right).\, 31{,}25 = \frac{34{,}79}{43}\,.\, 31{,}25 = 25{,}283 \text{ Fuß,}$$

ferner die Beschleunigung der sinkenden Rolle:

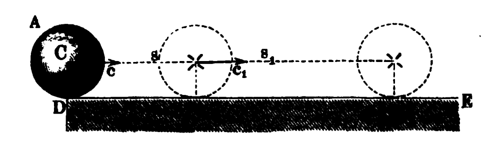
$$q = \left(\frac{Q + G_1 - S}{Q + G_1}\right) g = \left(\frac{72 - 5{,}210}{72}\right) \cdot 31{,}25 = \frac{66{,}79}{72} \cdot 31{,}25 = 29{,}0 \text{ Fuß,}$$

und die Umdrehungsacceleration dieser Rolle:

$$q_1 = \frac{S\, a_1^2}{G_1\, k_1^2} \cdot g = \frac{5{,}210}{3} \cdot 31{,}25 = 54{,}27 \text{ Fuß.}$$

Fortrollen eines Körpers auf einer horizontalen Ebene. §. 300 Wenn ein runder Körper ABD, Fig. 496, mit einer gewissen Anfangsgeschwindigkeit c auf der horizontalen Bahn DE fortgeschoben wird, so nimmt derselbe in Folge der Reibung auf dieser Bahn eine Drehung mit allmälig wachsender Geschwindigkeit an, deren

Fig. 496.



Acceleration p durch die Formel

$$p = \frac{\text{Kraft}}{\text{Masse}} = \frac{\varphi G a^2}{M k^2} = \frac{\varphi a^2}{k^2} g \text{ bestimmt ist,}$$

worin φ den Reibungscoefficienten, $G = Mg$ das Gewicht, also φG die Reibung, ferner Mk^2 das Trägheitsmoment des Körpers und a den Wälzungshalbmesser CD desselben bezeichnen. Die durch diese Acceleration in der Zeit t erzeugte Umdrehungsgeschwindigkeit im Abstande $CD = a$ von der Axe C ist

$$v = pt = \varphi \frac{a^2}{k^2} g t.$$

Dagegen erleidet die fortschreitende Bewegung des Körpers eine Retardation q, welche die Formel

$$q = \frac{\text{Widerstand}}{\text{Masse}} = \frac{\varphi G}{M} = \varphi g$$

angiebt, und wonach die Geschwindigkeit dieser Bewegung nach t Secunden

$$v_1 = c - qt = c - \varphi g t \text{ ist.}$$

Setzt man nun $v_1 = v$, also

$$\varphi \frac{a^2}{k^2} g t = c - \varphi g t,$$

so erhält man die Zeit, nach welcher die Geschwindigkeit des Drehens gleich der des Fortschreitens wird, und daher das Wälzen des Körpers eintritt:

$$t = \frac{c}{\left(1 + \frac{a^2}{k^2}\right) \varphi g} = \frac{k^2}{a^2 + k^2} \cdot \frac{c}{\varphi g}.$$

Am Ende dieser Zeit ist die gemeinschaftliche Geschwindigkeit

$$c_1 = \frac{a^2}{k^2} \varphi g t = \frac{a^2 c}{a^2 + k^2},$$

und der progressive Weg des Körpers:

$$s = \left(\frac{c + c_1}{2}\right) t = \frac{2a^2 + k^2}{a^2 + k^2} \frac{c}{2} \cdot \frac{k^2}{a^2 + k^2} \cdot \frac{c}{\varphi g} = \frac{(2a^2 + k^2) k^2}{(a^2 + k^2)^2} \cdot \frac{c^2}{2 \varphi g}.$$

Wäre der Coefficient der rollenden Reibung = Null, so würde der Körper AB mit der constanten Geschwindigkeit $c_1 = \frac{a^2 c}{a^2 + k^2}$ auf der horizontalen Ebene ohne Ende fortrollen; da aber dieser Bewegung noch die wälzende Reibung $\frac{fG}{a}$ entgegenwirkt (s. §. 192), so wird der Körper nach Zurücklegung eines gewissen Weges s_1 zur Ruhe kommen. Am Ende dieses Weges ist durch die Arbeit $\frac{f G s_1}{a}$ dieser Reibung das ganze Arbeitsvermögen

$$\frac{G c_1^2}{2g} + \frac{G k^2}{a^2} \cdot \frac{c_1^2}{2g} = \left(\frac{a^2 + k^2}{a^2}\right) \frac{G c_1^2}{2g}$$

der trägen Masse des Körpers aufgezehrt, und daher

$$\frac{F G s_1}{a} = \left(\frac{a^2 + k^2}{a^2}\right) \frac{G c_1^2}{2g}$$

zu setzen, wonach der Weg

$$s_1 = \frac{a^2 + k^2}{fa} \cdot \frac{c_1^2}{2g} = \frac{a^3}{f(a^2 + k^2)} \frac{c^2}{2g}$$

in der Zeit

$$t_1 = \frac{2 s_1}{c_1} = \frac{a^2 + k^2}{fa} \cdot \frac{c_1}{g} = \frac{ac}{fg}$$

zurückgelegt wird, bis der Körper zur Ruhe kommt.

Für eine rollende Kugel ist $\frac{k^2}{a^2} = {}^2/_5$, und für einen Cylinder $\frac{k^2}{a^2} = {}^1/_2$; s. §. 290.

Im letzteren Falle ist z. B. $t = {}^1/_3 \frac{c}{\varphi g}$, $c_1 = {}^2/_3 c$, $s = {}^5/_9 \frac{c^2}{2 \varphi g}$ und $s_1 = {}^2/_3 \frac{a}{f} \frac{c^2}{2g}$.

Zweites Capitel.

Die Centrifugalkraft starrer Körper.

§. 301 **Normalkraft.** Die Kraft der Trägheit tritt nicht bloß bei Geschwindigkeitsveränderungen, sondern auch bei Richtungsveränderungen eines bewegten Körpers hervor, da ein Körper vermöge seiner Trägheit allein

nur gleichförmig und in der geraden Linie fortgeht (s. §. 55). Die Beurtheilung der Wirkungen der Trägheit bei stetigen Richtungsveränderungen, namentlich bei der Bewegung der Körper in krummen Linien, und insbesondere im Kreise, ist Gegenstand dieses Capitels.

Bewegt sich ein materieller Punkt in einer krummen Linie, so hat derselbe an jeder Stelle eine von der jedesmaligen Bewegungsrichtung ablenkende Acceleration, die wir in der Phoronomie unter dem Namen Normalacceleration kennen gelernt haben. Ist der Krümmungshalbmesser an einer Stelle der Bahn des bewegten Punktes, $= r$ und die Geschwindigkeit dieses Punktes, $= v$, so hat man für die Normalacceleration:

$$p = \frac{v^2}{r} \text{ (§. 42).}$$

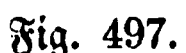
Ist nun die Masse des Punktes $= M$, so entspricht dieser Normalacceleration eine Kraft:

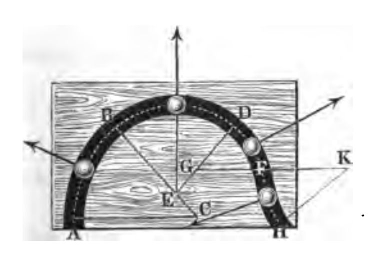
$$P = Mp = \frac{Mv^2}{r},$$

die wir als die erste Ursache, weshalb der Punkt an jeder Stelle seine Bewegungsrichtung ändert, ansehen müssen. Hat der Punkt außer der Normalkraft keine andere (Tangential-) Kraft, so ist die Geschwindigkeit v desselben unveränderlich $= c$, und daher die Normalkraft

$$P = \frac{Mc^2}{r}$$

nur abhängig von der jedesmaligen Krümmung oder von dem Krümmungshalbmesser, und zwar kleiner bei schwacher Krümmung oder großem Krümmungshalbmesser, und größer bei starker Krümmung oder kleinerem Krümmungshalbmesser. Bei doppeltem Krümmungshalbmesser ist z. B. die Normalkraft nur halb so groß als bei einfachem Krümmungshalbmesser. Wird ein materieller Punkt M durch eine horizontale Bahn, Fig. 497, gezwungen, eine krumme Linie $ABDFH$ zu durchlaufen, so behält derselbe, wenn wir die Reibung außer Acht lassen, an allen Stellen einerlei Geschwindigkeit c, und übt an jeder Stelle einen der Normalkraft gleichen Druck gegen die concave Seitenwand aus. Während der Durchlaufung des Bogens AB ist dieser Druck $= \frac{Mc^2}{CA}$, während der Durchlaufung von BD ist er $= \frac{Mc^2}{EB}$, für den Bogen DF ist er


Fig. 497.



$= \frac{Mc^2}{GD}$ und für den Bogen FH fällt er $= \frac{Mc^2}{KF}$ aus, wenn CA, EB, GD und KF die Krümmungshalbmesser der Wegtheile AB, BD, DF und FH sind.

§. 302 **Centripetal- und Centrifugalkraft.** Bewegt sich ein materieller Punkt oder Körper im Kreise, so wirkt die Normalkraft radial einwärts, weshalb sie dann Centripetal- oder Annäherungskraft (franz. force centripède; engl. centripetal force) genannt wird, während die Kraft, mit welcher der Körper vermöge seiner Trägheit entgegengesetzt, d. i. radial auswärts wirkt, den Namen Centrifugal-, Flieh- oder Schwungkraft (franz. force centrifuge; engl. centrifugal force) erhalten hat. Centripetalkraft ist die auf den Körper einwirkende und Centrifugalkraft ist die vom Körper zurückwirkende Gegenkraft. Beide sind an Größe einander gleich und in der Richtung entgegengesetzt (§. 65).

Bei der Umdrehung der Planeten um die Sonne besteht die Centripetalkraft in einer Anziehungskraft der Sonne; wird der bewegte Körper durch eine Führung oder Leitung, ähnlich wie Fig. 497 angiebt, gezwungen, eine Kreisbahn zu durchlaufen, so wirkt die Führung durch ihre Starrheit als Centripetalkraft und der Centrifugalkraft des Körpers entgegen, ist endlich der umlaufende Körper durch einen Faden oder durch eine Stange mit dem Drehungspunkte verbunden, so ist es die Elasticität der Stange, welche sich mit der Centrifugalkraft des Körpers ins Gleichgewicht setzt und eben dadurch als Centripetalkraft wirkt.

Ist G das Gewicht des in Umdrehung befindlichen Körpers, also dessen Masse $M = \frac{G}{g}$, ist der Halbmesser des Kreises, in welchem die Umdrehung vor sich geht, $= r$ und die Umdrehungsgeschwindigkeit $= v$, so hat man nach dem letzten Paragraphen, die Centrifugalkraft:

$$P = \frac{Mv^2}{r} = \frac{Gv^2}{gr} = 2 \cdot \frac{v^2}{2g} \cdot \frac{G}{r},$$

also auch:

$$P : G = 2 \cdot \frac{v^2}{2g} : r,$$

d. h. die Centrifugalkraft verhält sich zum Gewichte des Körpers, wie die doppelte Geschwindigkeitshöhe zum Umdrehungshalbmesser.

Ist die Bewegung gleichförmig, welches allemal eintritt, wenn außer der Centripetalkraft keine andere Kraft (Tangentialkraft) auf den Körper wirkt, so läßt sich die Geschwindigkeit $v = c$ durch die Umdrehungszeit t ausdrücken, indem man setzt:

$$c = \frac{\text{Weg}}{\text{Zeit}} = \frac{2\pi r}{t},$$

und man erhält hiernach für die Centrifugalkraft:

$$P = \left(\frac{2\pi r}{t}\right)^2 \frac{M}{r} = \frac{4\pi^2}{t^2} \cdot Mr = \frac{4\pi^2}{g t^2} \cdot Gr.$$

Da $4\pi^2 = 39{,}4784$ und für Fußmaß $\frac{1}{g} = 0{,}032$ ist, so hat man für die Rechnuugen bequemer:

$$P = \frac{39{,}4784}{t^2} \cdot Mr = 1{,}2633 \cdot \frac{Gr}{t^2} \text{ Pfund.}$$

Oft giebt man die Zahl u der Umdrehungen in der Minute, und ersetzt deshalb t durch $\frac{60''}{u}$, weshalb folgt:

$$P = \frac{39{,}4784}{3600} u^2 Mr = 0{,}010966\ u^2 Mr = 0{,}0003509\, u^2\, Gr \text{ Pfund.}$$

Auch ist $P = 4{,}0243\ \frac{Gr}{t^2} = 0{,}001118\, u^2\, Gr$ Kilogramm.

Da $\frac{2\pi}{t}$ die Winkelgeschwindigkeit ω ist, so läßt sich auch setzen:

$$P = \omega^2 . Mr.$$

Hiernach folgt, daß bei gleichen Umdrehungszeiten oder bei gleich viel Umdrehungen in einer gewissen Zeit, und also auch bei gleichen Winkelgeschwindigkeiten, die Centrifugalkraft wie das Product aus Masse und Drehungshalbmesser wächst, und daß sie unter übrigens gleichen Umständen den Quadraten der Umdrehungszeiten umgekehrt, oder den Quadraten der Umlaufszahlen und also auch den Quadraten der Winkelgeschwindigkeiten direct proportional ist.

Beispiele. 1) Wenn ein Körper von 50 Pfund Gewicht einen Kreis von 3 Fuß Halbmesser in der Minute 400 mal durchläuft, so ist seine Centrifugalkraft: $P = 0{,}0003509 . 400^2 . 50 . 3 = 3{,}509 . 16 . 50 . 3 = 350{,}9 . 24 = 8422$ Pfd.

Ist dieser Körper durch ein Hanfseil mit der Axe verbunden, und der Festigkeitsmodul für Hanfseile (§. 212) 7000 Pfund, so folgt:

$$8422 = 7000 . F,$$

daher der Querschnitt dieses Seiles:

$$F = \frac{8422}{7000} = 1{,}203 \text{ Quadratzoll,}$$

und der Durchmesser desselben:

$$d = \sqrt{\frac{4F}{\pi}} = 0{,}5642 . \sqrt{4{,}812} = 0{,}5642 . 2{,}193 = 1{,}24 \text{ oder } 1\tfrac{1}{4} \text{ Zoll.}$$

Bei dreifacher Sicherheit ist aber

$$d = 1{,}24 . \sqrt{3} = 1{,}24 . 1{,}732 = 2{,}15 \text{ Zoll}$$

zu nehmen.

2) Aus dem Erdhalbmesser $r = 20^1/_4$ Million Fuß und der Umdrehungszeit oder Tageslänge $t = 24$ St. $= 24 . 60 . 60 = 86400$ Sec. folgt die Centrifugalkraft eines Körpers unter dem Aequator der Erde:

$$P = 1{,}2633 . \frac{20'250000\, G}{86400^2} = \frac{2558}{864^2} \cdot G = \frac{1}{290} \cdot G,$$

wäre aber die Tageslänge 17 mal so klein, also $\frac{24}{17} = 1$ St. $24'\, 42''$, so würde diese Kraft $17^2 = 289$ mal so groß, also ungefähr dem Gewichte G des Körpers gleich sein. Unter dem Aequator wäre dann die Centrifugalkraft der Schwerkraft gleich und Körper daselbst würden ebenso wenig niederfallen als in die Höhe steigen.

3) Bei der Umdrehung des Mondes um die Erde wird die Centrifugalkraft desselben von der Anziehungskraft der Erde aufgehoben. Ist G das Gewicht des Mondes, r seine Entfernung von der Erde und t seine Umdrehungszeit um dieselbe, so folgt die Centrifugalkraft dieses Weltkörpers

$$= 1{,}2633 . \frac{Gr}{t^2} .$$

Ist a der Erdhalbmesser und nimmt man an, daß die Schwerkraft in verschiedenen Entfernungen vom Mittelpunkte der Erde umgekehrt wie die $n$te Potenz dieser Entfernungen wachse, so hat man die Schwere des Mondes oder die Anziehungskraft der Erde

$$= G \left(\frac{a}{r}\right)^n,$$

und setzen wir beide Kräfte einander gleich, so erhalten wir:

$$\left(\frac{a}{r}\right)^n = 1{,}2633 \cdot \frac{r}{t^2} .$$

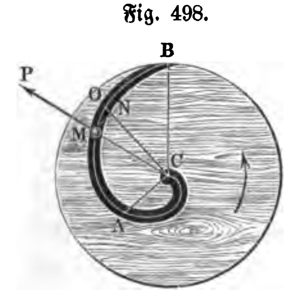
Nun ist $\frac{a}{r} = \frac{1}{60}$, $r = 1215$ Millionen Fuß und $t = 27$ Tage 7 St. 42 Min. $= 39342$ Min. $= 39342 . 60$ Sec., es folgt daher:

$$\left(\frac{1}{60}\right)^n = \frac{1{,}2633 . 1215}{393{,}4^2 . 36} = \frac{1}{3600} = \left(\frac{1}{60}\right)^2,$$

und es ist hiernach $n = 2$, d. h. die Schwerkraft der Erde steht im umgekehrten Verhältnisse des Quadrates der Entfernung vom Mittelpunkt der Erde.

§. 303 **Arbeit der Centrifugalkraft.** Ist die Bahn CAB, Fig. 498, in welcher sich ein Körper M bewegt, selbst nicht in Ruhe, sondern dreht sich dieselbe um eine Axe C, so theilt sie dem Körper eine Centrifugalkraft P mit, vermöge welcher er entweder eine gewisse mechanische Arbeit verrichtet, oder eine solche in Anspruch nimmt, je nachdem er sich bei seiner Bewegung in der Bahn von der Drehungsaxe C entfernt, oder sich derselben nähert. Ist M die Masse des Körpers, ω die constante Winkelgeschwindigkeit, mit welcher sich die Bahn, z. B. ein Kreisel (franz. sabot; engl. top), um ihre

Fig. 498.



Axe C dreht, und bezeichnet z die veränderliche Entfernung CM des in der Bahn CAB laufenden Körpers, so hat man die veränderliche Centrifugalkraft desselben:

$$P = \omega^2 Mz,$$

und es ist folglich die Arbeit dieser Kraft, während der Körper ein Wegtheilchen MO durchläuft, und der Halbmesser CM um $NO = \zeta$ wächst:

$$P\zeta = \omega^2 Mz \,.\, \zeta.$$

Denken wir uns nun den Halbmesser z aus n Theilchen, jeden $= \zeta$, bestehend, setzen wir also $z = n\zeta$, und nehmen wir an, daß der Körper seinen Weg im Drehungspunkte C beginnt, so erhalten wir die Arbeit der Centrifugalkraft des Körpers beim Durchlaufen des Weges CAM, wobei die Entfernung des Körpers allmälig von 0 bis z wächst, indem wir in dem letzten Ausdrucke statt z nach und nach die Werthe ζ, 2ζ, 3ζ, $\ldots n\zeta$ einsetzen und die so erhaltenen Werthe addiren:

$$A = \omega^2 M\zeta(\zeta + 2\zeta + 3\zeta + \cdots + n\zeta) = \omega^2 M\zeta^2(1 + 2 + 3 + \cdots + n),$$

oder da $1 + 2 + 3 + \cdots + n$ bei einer großen Anzahl von Gliedern $\frac{n^2}{2}$ zu setzen ist:

$$A = \omega^2 M\zeta^2 \frac{n^2}{2} = \frac{1}{2}\,\omega^2 Mz^2.$$

Da die Umdrehungsgeschwindigkeit des Kreisels im Abstande $CM = z$ von der Umdrehungsaxe:

$$v = \omega z$$

ist, so läßt sich folglich einfacher

$$A = \frac{1}{2}\, Mv^2 = \frac{v^2}{2g}\, G$$

setzen, wenn man noch statt der Masse M das Gewicht $G = Mg$ des Körpers einführt.

Wenn der Körper seine Bewegung nicht in C, sondern in irgend einem anderen Punkte A außerhalb der Umdrehungsaxe beginnt, dessen Entfernung von C, $CA = z_1$, und Umdrehungsgeschwindigkeit

$$v_1 = \omega z_1$$

ist, so fällt natürlich die Arbeit $\frac{1}{2}\,\omega^2 M z_1^2$ beim Durchlaufen des Weges CA ganz aus, und es ist daher die entsprechende Arbeit der Centrifugalkraft, während der Körper von A nach M läuft:

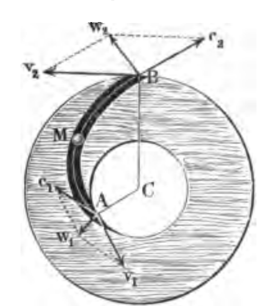
$$A = \frac{1}{2}\,\omega^2 Mz^2 - \frac{1}{2}\,\omega^2 Mz_1^2 = \frac{1}{2}\,\omega^2 M(z^2 - z_1^2)$$
$$= \frac{1}{2}\, M(v^2 - v_1^2) = \frac{(v^2 - v_1^2)}{2g}\, G.$$

Wenn sich also ein Körper in einer starren Bahn oder Rinne bewegt, welche sich um eine feste Axe dreht, so nimmt das Arbeitsvermögen dieses Körpers um das Product aus der Masse (M) desselben und aus der Diffe-

renz der Geschwindigkeitshöhen $\left(\frac{v^2}{2g}\text{ und }\frac{v_1^2}{2g}\right)$, welche den Umdrehungsgeschwindigkeiten der Endpunkte A und M des Weges zukommen, zu oder ab, und zwar ersteres bei einer Bewegung von innen nach außen, und letzteres bei einer Bewegung von außen nach innen.

§. 304 Wenn der Körper M seinen Weg AMB auf einem Kreisel ABC, Fig. 499, in A mit der relativen Geschwindigkeit c_1 beginnt, und den Kreisel in B mit der relativen Geschwindigkeit c_2 verläßt, und wenn die Umdrehungsgeschwindigkeiten des Kreisels in A und B, v_1 und v_2 sind, so ist unter der Voraussetzung, daß außer der Centrifugalkraft keine anderen Kräfte auf den Körper wirken, der Gewinn des Arbeitsvermögens desselben beim Durchlaufen des Weges AMB:

Fig. 499.



$$A = \frac{c_2^2 - c_1^2}{2g} G = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} G,$$

daher:

$$c_2^2 - c_1^2 = v_2^2 - v_1^2, \text{ oder}$$

$$c_2^2 = c_1^2 + v_2^2 - v_1^2,$$

folglich die relative Austrittsgeschwindigkeit selbst:

$$c_2 = \sqrt{c_1^2 + v_2^2 - v_1^2} = \sqrt{c_1^2 + \omega^2 (r_2^2 - r_1^2)},$$

wobei ω die Winkelgeschwindigkeit des Kreisels, sowie r_1 und r_2 die Entfernungen CA und CB des Eintritts- und des Austrittspunktes (A und B) von der Drehungsaxe C bezeichnen.

Ebenso bestimmt sich die relative Austrittsgeschwindigkeit c_1, wenn der Körper bei B mit der relativen Geschwindigkeit c_2 den Kreisel erreicht und sich auf demselben von außen nach innen bewegt; es ist nämlich:

$$c_1 = \sqrt{c_2^2 - (v_2^2 - v_1^2)} = \sqrt{c_2^2 - \omega^2 (r_2^2 - r_1^2)}.$$

Da der Körper beim Durchlaufen des Weges AMB außer seiner relativen Geschwindigkeit (c) in der Bahn auch noch die Umdrehungsgeschwindigkeit (v) der letzteren hat, so ist er bei A mit einer absoluten Geschwindigkeit $\overline{Aw_1} = w_1$ einzuführen, welche sowohl der Größe als auch der Richtung nach durch die Diagonale des aus c_1 und v_1 construirten Parallelogramms bestimmt wird, und es ergiebt sich ebenso die absolute Austrittsgeschwindigkeit $\overline{Bw_2} = w_2$ des Körpers bei B durch die Diagonale des aus den relativen Geschwindigkeiten c_2 und v_2 construirten Parallelogramms $B c_2 w_2 v_2$.

Das **Arbeitsquantum**, welches der Körper bei Durchlaufung des Krei-

sels in der Bahn AMB gewonnen oder verloren und folglich der Kreisel verloren oder gewonnen hat, ist

$$A = \pm \left(\frac{w_2^2 - w_1^2}{2g}\right) G.$$

Soll der Körper beim Durchlaufen des Kreisels in der Richtung AMB sein ganzes Arbeitsvermögen $\frac{w_1^2}{2g} G$ dem Kreisel mittheilen, so muß die absolute Austrittsgeschwindigkeit $w_2 =$ Null, und deshalb nicht allein $c_2 = v_2$, sondern auch die Richtung von c_2 der von v_2 genau entgegengesetzt sein, und deshalb die Bahn bei B tangential am Umfange des Kreisels auslaufen.

Beispiel. Wenn der in Fig. 499 abgebildete Kreisel den inneren Halbmesser $CA = r_1 = 1$ Fuß und den äußeren Halbmesser $CB = r_2 = 1\frac{1}{2}$ Fuß hat, und sich pr. Minute 100 mal umdreht, so ist seine Winkelgeschwindigkeit:

$$\omega = \frac{\pi u}{30} = 3{,}1416 \,.\, \frac{10}{3} = 10{,}472 \text{ Fuß},$$

und folglich auch seine innere Umfangsgeschwindigkeit:

$v_1 = \omega r_1 = 10{,}472$ Fuß, dagegen aber seine äußere:

$v_2 = \omega r_2 = 10{,}472 \,.\, 1{,}5 = 15{,}708$ Fuß.

Läßt man nun in denselben bei A einen Körper mit $w_1 = 25$ Fuß so eintreten, daß der Winkel $w_1 A v_1$, welchen seine absolute Bewegung mit der Umdrehungsrichtung einschließt, $\alpha = 30$ Grad ist, so hat man für die relative Geschwindigkeit c_1, mit welcher der Körper die Bewegung im Kreisel beginnt:

$c_1^2 = v_1^2 + w_1^2 - 2 v_1 w_1 \cos.\alpha = 109{,}66 - 453{,}45 + 625{,}00 = 281{,}21$,

und daher:

$$c_1 = 16{,}77 \text{ Fuß}.$$

Ferner ist für den Winkel $v_1 A c_1 = \beta$, unter welchem sich die Bahn bei A an den inneren Kreiselumfang anschließen muß, damit der Körper ohne Stöße in dieselbe einlaufe:

$$\frac{\sin.\beta}{\sin.\alpha} = \frac{w_1}{c_1}, \text{ also:}$$

$$\sin.\beta = \frac{25 \sin.30^0}{16{,}77},$$

wonach $\beta = 48^0, 12' \frac{1}{2}$ folgt.

Für die relative Austrittsgeschwindigkeit c_2 ist

$$c_2^2 = c_1^2 + v_2^2 - v_1^2 = 281{,}21 + 109{,}66\,[(3/2)^2 - 1^2] = 418{,}28,$$

folglich:

$$c_2 = 20{,}45 \text{ Fuß};$$

dagegen für die absolute Austrittsgeschwindigkeit w_2, wenn der Canal oder die Rinne AMB den äußeren Umfang unter einem Winkel δ von 20 Grad schneidet, also $v_2 B c_2 = 160^0$ ist:

$$w_2^2 = c_2^2 + v_2^2 - 2 c_2 v_2 \cos.\delta = 418{,}28 + 246{,}74 - 603{,}72 = 61{,}30,$$

folglich:

$$w_2 = 7{,}80 \text{ Fuß}.$$

Endlich ergiebt sich aus den Geschwindigkeitshöhen:

$$\frac{w_1^2}{2g} = 0{,}016 \,.\, 625 = 10 \text{ und } \frac{w_2^2}{2g} = 0{,}016 \,.\, 61{,}31 = 0{,}981 \text{ Fuß},$$

das Arbeitsquantum, welches der Körper vom Gewichte G beim Durchlaufen des Kreisels diesem mittheilt:

$$A = \left(\frac{w_1^2 - w_2^2}{2g}\right) G = (10 - 0{,}981)\, G = 9{,}019\, G,$$

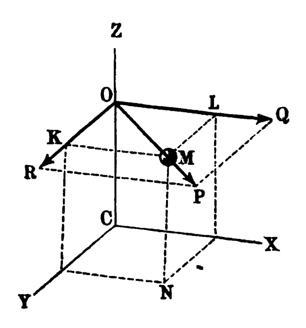
z. B. wenn dieser Körper das Gewicht $G = 10$ Pfund hat:

$$A = 9{,}019 \,.\, 10 = 90{,}19 \text{ Fußpfund}.$$

Anmerkung. Die vorstehende Theorie der Bewegung eines Körpers in einem Kreisel findet ihre Anwendung bei den Turbinen oder Kreiselrädern.

§. 305 **Centrifugalkräfte ausgedehnter Massen.** Auf einen Inbegriff von Massen oder auf eine Masse von endlicher Ausdehnung ist die oben gefundene Formel für die Centrifugalkraft nicht unmittelbar anwendbar, weil man im Voraus nicht weiß, welcher Drehungshalbmesser r in die Rechnung einzuführen ist. Um diesen zu finden, schlagen wir folgenden Weg ein. Es sei in Fig. 500, CZ die Umdrehungsaxe, und CX und CY seien zwei rechtwinkelige Coordinatenaxen; es sei ferner M ein Massentheil, und $MK = x$, $ML = y$ und $MN = z$ seien dessen Abstände von den Coordinatenebenen YZ, XZ und XY. Da die Centrifugalkraft P radial wirkt, so läßt sich ihr Angriffspunkt nach dem Durchschnittspunkte O mit der Drehungsaxe verlegen. Zerlegen wir nun diese Kraft nach den Axenrichtungen CX und CY, so erhalten wir die Seitenkräfte $\overline{OQ} = Q$ und $\overline{OR} = R$, für welche gilt:

Fig. 500.



$$OQ : OP = OL : OM \text{ und } OR : OP = OK : OM,$$

weshalb nun

$$Q = \frac{x}{r} P \text{ und } R = \frac{y}{r} P$$

folgt, wobei r die Entfernung OM des Massentheilchens von der Umdrehungsaxe bezeichnet. Gehen wir auf gleiche Weise mit allen Massentheilchen zu Werke, so erhalten wir zwei Systeme von Parallelkräften, eines in der Ebene XZ und das andere in der Ebene YZ, jedes aber auf die Axe CZ winkelrecht wirkend. Bedienen wir uns zur Unterscheidung der Inderzahlen 1, 2, 3 u. s. w., setzen wir also die Massentheile M_1, M_2, M_3, und ihre Abstände x_1, x_2, x_3 u. s. w., so bekommen wir hiernach die Mittelkraft des einen Systemes Fig. 501:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \cdots = \frac{P_1 x_1}{r_1} + \frac{P_2 x_2}{r_2} + \frac{P_3 x_3}{r_3} + \cdots$$
$$= \omega^2 . (M_1 x_1 + M_2 x_2 + \cdots)$$

und die des anderen:

$$R = R_1 + R_2 + \cdots = \omega^2 . (M_1 y_1 + M_2 y_2 + \cdots).$$

Fig. 501.

Setzen wir endlich die Abstände $C O_1$, $C O_2$ u. s. w. der Massentheile von der Ebene $X Y$, $= z_1$, z_2 u. s. w., so erhalten wir für die Angriffspunkte U und V dieser Mittelkräfte die Abstände $C U = u$ und $C V = v$ durch die Gleichungen

$$(Q_1 + Q_2 + \cdots) u = Q_1 z_1 + Q_2 z_2 + \cdots$$

und $(R + R_2 + \cdots) v = R_1 z_1 + R_2 z_2 + \cdots$, weshalb folgt:

$$u = \frac{Q_1 z_1 + Q_2 z_2 + \cdots}{Q_1 + Q_2 + \cdots} = \frac{M_1 x_1 z_1 + M_2 x_2 z_2 + \cdots}{M_1 x_1 + M_2 x_2 + \cdots}$$

und

$$v = \frac{R_1 z_1 + R_2 z_2 + \cdots}{R_1 + R_2 + \cdots} = \frac{M_1 y_1 z_1 + M_2 y_2 z_2 + \cdots}{M_1 y_1 + M_2 y_2 + \cdots}.$$

Es werden also hiernach im Allgemeinen die Centrifugalkräfte eines Massensystemes oder eines ausgedehnten Körpers auf zwei Kräfte zurückgeführt, die sich, so lange u und v ungleich sind, nicht zu einer einzigen vereinigen lassen.

Beispiel. Sind die Massen eines Systemes:

$M_1 = 10$ Pfd., $M_2 = 15$ Pfd., $M_3 = 18$ Pfd., $M_4 = 12$ Pfd.

und ihre Abstände:

$x_1 = 0$ Zoll, $x_2 = 4$ Zoll, $x_3 = 2$ Zoll, $x_4 = 6$ Zoll,
$y_1 = 3$ „ $y_2 = 1$ „ $y_3 = 5$ „ $y_4 = 3$ „
$z_1 = 2$ „ $z_2 = 3$ „ $z_3 = 3$ „ $z_4 = 0$ „

so hat man folgende mittleren Centrifugalkräfte:

$Q = \omega^2 . (10 . 0 + 15 . 4 + 18 . 2 + 12 . 6) = 168 . \omega^2$ und
$R = \omega^2 . (10 . 3 + 15 . 1 + 18 . 5 + 12 . 3) = 171 . \omega^2$,

und hiernach die Abstände ihrer Angriffspunkte von dem Anfangspunkte C:

$$u = \frac{10.0.2 + 15.4.3 + 18.2.3 + 12.6.0}{10.0 + 15.4 + 18.2 + 12.6} = \frac{288}{168} = \frac{12}{7} = 1{,}714 \text{ Zoll},$$

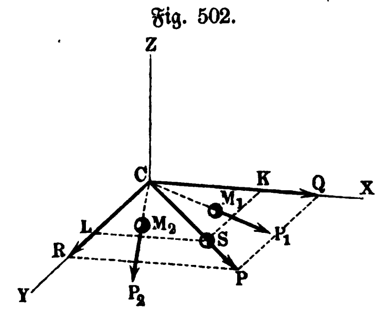
und

$$v = \frac{10.3.2 + 15.1.3 + 18.5.3 + 12.3.0}{10.3 + 15.1 + 18.5 + 12.3} = \frac{375}{171} = \frac{125}{57} = 2{,}193 \text{ Zoll}.$$

Die Verschiedenheit dieser Werthe von u und v zeigt an, daß die Centrifugalkräfte durch eine einzige Kraft nicht ersetzt werden können.

§. 306 Befinden sich die Massentheile in einer Umdrehungsebene, d. i. in einer Ebene XCY, Fig. 502, welche winkelrecht auf der Umdrehungsaxe steht, wie $M_1, M_2 \ldots$, so lassen sich ihre Centrifugalkräfte in eine einzige vereinigen, weil sich ihre Richtungen in einem einzigen Punkte C der Axe CZ schneiden. Behalten wir die Bezeichnungen des vorigen Paragraphen bei, so erhalten wir die resultirende Centrifugalkraft in diesem Falle:

Fig. 502.



$$P = \sqrt{Q^2 + R^2} = \omega^2 \sqrt{[(M_1 x_1 + M_2 x_2 + \cdots)^2 + (M_1 y_1 + M_2 y_2 + \cdots)^2]}.$$

Sind nun $CK = x$ und $CL = y$ die Coordinaten des Schwerpunktes vom Massensysteme $M = M_1 + M_2 + \cdots$, so hat man:

$$M_1 x_1 + M_2 x_2 + \cdots = Mx \text{ und}$$
$$M_1 y_1 + M_2 y_2 + \cdots = My,$$

und es folgt daher die Centrifugalkraft:

$$P = \omega^2 \sqrt{M^2 x^2 + M^2 y^2} = \omega^2 M \sqrt{x^2 + y^2} = \omega^2 M r,$$

wofern noch $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, den Abstand CS des Schwerpunktes von der Umdrehungsaxe CZ bezeichnet.

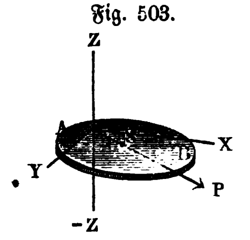
Für den Winkel $PCX = \alpha$, welchen diese Kraft mit der Axe CX einschließt, ist

$$tang.\, \alpha = \frac{R}{Q} = \frac{My}{Mx} = \frac{y}{x};$$

es geht daher die Richtung der Centrifugalkraft durch den Schwerpunkt des Systemes und es ist dieselbe genau so groß, als wenn die sämmtlichen Massentheile im Schwerpunkte vereinigt wären.

Für eine auf der Umdrehungsaxe $Z\overline{Z}$ rechtwinkelig stehende Scheibe AB, Fig. 503, ist hiernach die Centrifugalkraft ebenfalls $= \omega^2 Mr$, wenn M ihre Masse und r die Entfernung CS ihres Schwerpunktes S von der Axe bezeichnet.

Fig. 503.



Liegen ebenso die Schwerpunkte der Massentheile eines Körpers in der Umdrehungsebene, oder ist diese Ebene Symmetrieebene des Körpers $ADFF_1$, Fig. 504, so lassen sich die Centrifugalkräfte der Massentheile des Körpers zu einer einzigen, im Schwerpunkte desselben an-

greifenden Mittelkraft vereinigen, welche dem Abstande S dieses Punktes von der Umdrehungsaxe entspricht und sich daher durch die Formel $P = \omega^2 P r$ bestimmen läßt.

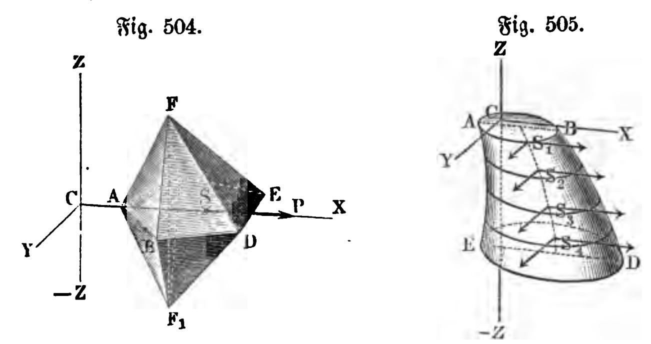


Fig. 504. Fig. 505.

Um die Centrifugalkraft eines anderen Körpers $ABDE$, Fig. 505, zu finden, zerlegen wir denselben durch Ebenen winkelrecht zur Axe ZZ in scheibenförmige Elemente, ermitteln die Schwerpunkte S_1, S_2 u. s. w. derselben, bestimmen mit Hülfe der letzteren die Centrifugalkräfte, zerlegen jede derselben nach den Axenrichtungen CX und CY in Seitenkräfte, und vereinigen die Seitenkräfte in der Ebene ZCX zu einer Mittelkraft Q, sowie die in der Ebene ZCY zu einer Mittelkraft R.

Befinden sich die Schwerpunkte sämmtlicher Scheiben in einer Parallellinie zur Umdrehungsaxe, so ist $x = x_1 = x_2$ u. s. w., sowie $y = y_1 = y_2$ u. s. w., und daher auch $r = r_1 = r_2$ u. s. w.; es folgt daher die Centrifugalkraft des ganzen Körpers:

$$P = \omega^2 (M_1 r + M_2 r + \cdots) = \omega^2 M r,$$

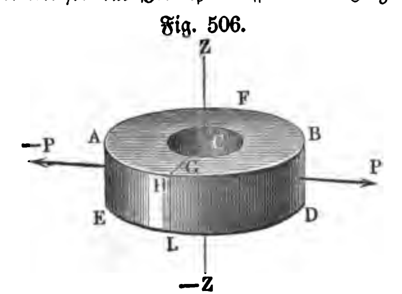
und der Abstand ihres Angriffspunktes von der Ebene XY:

$$z = \frac{(M_1 z_1 + M_2 z_2 + \cdots) r}{(M_1 + M_2 + \cdots) r} = \frac{M_1 z_1 + M_2 z_2 + \cdots}{M_1 + M_2 + \cdots} = z.$$

Diesen Gleichungen zufolge ist die Centrifugalkraft eines Körpers, welcher sich in Elemente zerlegen läßt, deren Schwerpunkte in einer mit der Umdrehungsaxe parallel laufenden Linie liegen, gleich der Centrifugalkraft der in dem Schwerpunkte dieses Körpers vereinigten Masse desselben, und es fällt auch der Angriffspunkt dieser Kraft mit diesem Schwerpunkte zusammen. Hiernach lassen sich die Centrifugalkräfte aller symmetrischen Körper (s. §. 106), deren Symmetrieaxe der Umdrehungsaxe parallel läuft, und also auch die aller Rotationskörper, deren geometrische Axen mit der Umdrehungsaxe parallel sind, finden. Fällt die geometrische Axe eines solchen Körpers mit der Umdrehungsaxe zusammen, so ist die resultirende Centrifugalkraft sogar Null.

Beispiel. Es sind die Dimensionen, die Dichtigkeit und Festigkeit eines Mühlsteines $ABDE$, Fig. 506, gegeben, man soll die Winkelgeschwindigkeit ω finden, bei welcher das Zerreißen desselben in Folge der Centrifugalkraft eintritt. Setzen wir den Halbmesser CF des Mühlsteines $= r_1$, den Halbmesser CG seines Auges $= r_2$, die Höhe $AE = HL = l$, die Dichtigkeit $= \gamma$ und den Festigkeitsmodul $= K$, so erhalten wir die Kraft zum Zerreißen desselben in einer diametralen Ebene,

Fig. 506.



$$P = 2 (r_1 - r_2)\, l K,$$

das Gewicht des Steines:

$$G = \pi\, (r_1^2 - r_2^2)\, l \gamma,$$

und den Umdrehungshalbmesser für jede Hälfte des Steines, d. i. die Entfernung ihres Schwerpunktes von der Umdrehungsaxe (§. 114):

$$r = \frac{4}{3\pi} \cdot \frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1^2 - r_2^2}.$$

Im Augenblicke des Zerreißens ist die Centrifugalkraft von einer Hälfte des Steines der Festigkeit gleich, wir bekommen daher die Bestimmungsgleichung:

$$\omega^2 . \tfrac{1}{2} \frac{G r}{g} = 2\, (r_1 - r_2)\, l K,$$

d. i.:

$$\omega^2 . \tfrac{2}{3} (r_1^3 - r_2^3) \frac{l \gamma}{g} = 2\, (r_1 - r_2)\, l K,$$

und $2\,l$ zu beiden Seiten aufgehoben, folgt:

$$\omega = \sqrt{\frac{3\, g\, (r_1 - r_2) K}{(r_1^3 - r_2^3) \gamma}} = \sqrt{\frac{3\, g K}{(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) \gamma}}.$$

Ist $r_1 = 2$ Fuß $= 24$ Zoll, $r_2 = 4$ Zoll, $K = 750$ Pfund und das specifische Gewicht der Mühlsteinmasse, $= 2{,}5$, also das Gewicht eines Cubikzolles Masse desselben, $\gamma = \frac{61{,}74 . 2{,}5}{1728} = 0{,}08934$ Pfd., so folgt die Winkelgeschwindigkeit beim Eintreten des Zerreißens:

$$\omega = \sqrt{\frac{3 . 12 . 31{,}25 . 750}{688 . 0{,}08934}} = \sqrt{\frac{210937}{15{,}367}} = 117{,}2 \text{ Zoll}.$$

Ist die Zahl der Umdrehungen in einer Minute $= u$, so hat man $\omega = \frac{2 \pi u}{60}$, daher umgekehrt $u = \frac{30\, \omega}{\pi}$, hier aber $= \frac{30 . 117{,}2}{\pi} = 1119$. Die gewöhnliche Umdrehungszahl eines solchen Mühlsteines ist nur 120, also 9mal so klein.

Für ein Schwungrad läßt sich $r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2 = 3 r^2$ setzen, wenn r den mittleren Halbmesser seines Ringes bezeichnet. Daher ist hier

$$\omega = \sqrt{\frac{g K}{r^2 \gamma}} \text{ oder } v = \omega r = \sqrt{\frac{g K}{\gamma}}.$$

§. 307 Befinden sich die sämmtlichen Theile M_1, M_2 eines Massensystemes, Fig. 507, oder die Schwerpunkte der Elemente eines Körpers in

einer durch die Umdrehungsaxe gehenden Ebene, so bilden die Centrifugalkräfte ein System von Parallelkräften und es lassen sich daher dieselben in der Regel auf eine einzige Kraft zurückführen. Sind die Entfernungen der Massentheile oder Elemente von der Umdrehungsaxe $\overline{ZZ}$:

Fig. 507.

$O_1 M_1 = r_1$, $O_2 M_2 = r_2$ u. s. w.,

so erhält man für ihre Centrifugalkräfte:

$P_1 = \omega^2 M_1 r_1$, $P_2 = \omega^2 M_2 r_2$

u. s. w., und daher die mittlere Centrifugalkraft:

$$P_1 = \omega^2 (M_1 r_1 + M_2 r_2 + \cdots)$$
$$= \omega^2 M r,$$

wofern r den Abstand des Schwerpunktes der ganzen Masse M von der Umdrehungsaxe bezeichnet. Es ist also auch hier der Abstand des Schwerpunktes von der Umdrehungsaxe als Drehungshalbmesser anzusehen. Um aber den Angriffspunkt O der resultirenden Centrifugalkraft P zu finden, setzen wir die Abstände der Massentheile von der Normalebene: $C O_1 = z_1$, $C O_2 = z_2$ u. s. w. in die Formel:

$$C O = z = \frac{M_1 r_1 z_1 + M_2 r_2 z_2 + \cdots}{M_1 r_1 + M_2 r_2 + \cdots}.$$

Mit Hülfe der Formel $P = \omega^2 M r$ lassen sich die Centrifugalkräfte von Rotationskörpern und von anderen Körpern der Geometrie finden, wenn die Axen dieser Körper mit der Umdrehungsaxe in eine Ebene fallen.

Für eine Stange $A B$, Fig. 508, deren Länge $A C = l$ und Neigungswinkel $A C Z$ gegen die Umdrehungsaxe $C Z$, $= \alpha$ ist, hat man:

Fig. 508.

$$r = \overline{KS} = \tfrac{1}{2} l \sin. \alpha,$$

und folglich die Centrifugalkraft:

$$P = \omega^2 . \tfrac{1}{2} M l \sin. \alpha;$$

um aber den Angriffspunkt O dieser Kraft zu finden, setzen wir in dem Ausdrucke

$$\omega^2 \cdot \frac{M}{n} x \sin. \alpha . x \cos. \alpha$$
$$= \omega^2 \cdot \frac{M}{n} x^2 \sin. \alpha \cos. \alpha$$

für das Moment vom Elemente $\frac{M}{n}$ der

Stange, statt x nach und nach $\frac{l}{n}, \frac{2l}{n}, \frac{3l}{n}$ u. s. w. und vereinigen die Ergebnisse durch Addition. Auf diese Weise ergiebt sich das Moment der ganzen Stange:

$$Pu = \omega^2 \frac{M}{n} \sin.\alpha \cos.\alpha \frac{l^2}{n^2} (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2)$$
$$= \frac{1}{3} \omega^2 M l^2 \sin.\alpha \cos.\alpha,$$

daher der Hebelarm $CL = O_0 O$, oder:

$$u = \frac{1}{3} \omega^2 M l^2 \sin.\alpha \cos.\alpha : \frac{1}{2} \omega^2 M l \sin.\alpha = \frac{2}{3} l \cos.\alpha,$$

und die Entfernung des Angriffspunktes O von dem in der Axe liegenden Stangenende C:

$$CO = \frac{2}{3} l.$$

Reicht die Stange AB, Fig. 509, nicht bis zur Axe, so hat man:

$$P = \frac{1}{2} \omega^2 F l_1^2 \sin.\alpha - \frac{1}{2} \omega^2 F l_2^2 \sin.\alpha$$
$$= \frac{1}{2} \omega^2 F \sin.\alpha (l_1^2 - l_2^2),$$

und das Moment:

$$Pu = \frac{1}{3} \omega^2 F \sin.\alpha \cos.\alpha (l_1^3 - l_2^3),$$

weil die Masse von CA (= Querschnitt mal Länge) $= Fl_1$ und die Masse von CB, $= Fl_2$ ist. Es folgt daher die Entfernung des Angriffspunktes O vom Durchschnitte C mit der Axe:

$$CO = \frac{2}{3} \frac{l_1^3 - l_2^3}{l_1^2 - l_2^2}, \text{ oder } CO = l + \frac{(l_1 - l_2)^2}{12 l},$$

wenn l die Entfernung CS des Schwerpunktes und $l_1 - l_2$ die Länge der Stange AB ausdrückt.

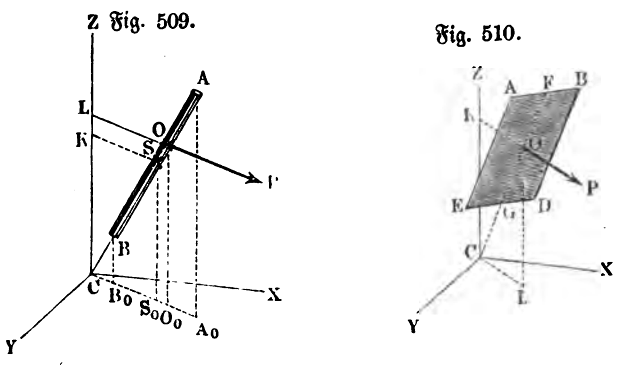


Fig. 509. Fig. 510.

Diese Formel gilt auch für ein rectanguläres Blatt $ABDE$, Fig. 510, welches sich durch die Axenebene COZ in zwei congruente Rechtecke theilen läßt und dessen Ebene rechtwinkelig gegen diese Axenebene steht, weil die Centrifugalkraft von jedem der Elemente, welche sich durch Schnitte normal

zu CZ ergeben, in der Mittellinie FG angreift. Sind also die Entfernungen CF und CG der beiden Grundlinien AB und DE von dem Axenpunkte C, l_1 und l_2, so hat man auch hier

$$CO = {}^2/_3 \cdot \frac{l_1^3 - l_2^3}{l_1^2 - l_2^2} = l + \frac{(l_1 - l_2)^2}{12\,l}.$$

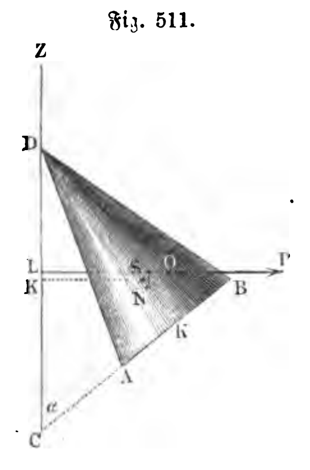
Ebenso ergiebt sich die Centrifugalkraft eines geraden Kreiskegels ABD, Fig. 511, welcher sich um eine durch die Spitze D desselben gehende Axe CZ dreht, wenn man in der Formel $P = \omega^2 Mr$, statt r den Abstand KS des Schwerpunktes S dieses Körpers von CZ einsetzt. Bezeichnet h die Höhe KD des Kegels und α den Winkel BCZ, um welchen die Basis AB desselben von der Umdrehungsaxe abweicht, so hat man

$$KS = \overline{DS} \cos. DSK = {}^3/_4\, h \cos. \alpha,$$

und daher die gesuchte Centrifugalkraft

$$P = \omega^2 M \,.\, {}^3/_4\, h \cos. \alpha.$$

Fig. 511.



Der Angriffspunkt O dieser Kraft ist durch die Coordinaten $DL = u$ und $LO = v$ bestimmt, für welche die höhere Analysis unter der Voraussetzung, daß die Umdrehungsaxe CZ nicht durch die Kegelmasse hindurchgeht, folgende Ausdrücke findet:

$$u = {}^4/_5\, h \sin. \alpha \left[1 - \left(\frac{r}{2\,h}\right)^2\right] \text{ und}$$

$$v = {}^4/_5\, h \cos. \alpha \left[1 + \left(\frac{r \tang. \alpha}{2\,h}\right)^2\right]$$

findet, worin r den Halbmesser $KA = KB$ der Basis bezeichnet.

§. 308 In dem Falle, wenn die Körpertheile weder in einer Normalebene zur Umdrehungsaxe, noch in einer Ebene durch die Umdrehungsaxe enthalten sind, lassen sich die resultirenden Centrifugalkräfte

$Q = \omega^2 (M_1 x_1 + M_2 x_2 + \cdots)$ und $R = \omega^2 (M_1 y_1 + M_2 y_2 + \cdots)$ nicht in eine einzige Kraft verwandeln, wohl aber ist es möglich, diese Kräfte durch eine im Schwerpunkte angreifende Kraft

$$P = \sqrt{Q^2 + R^2} = \omega^2 Mr$$

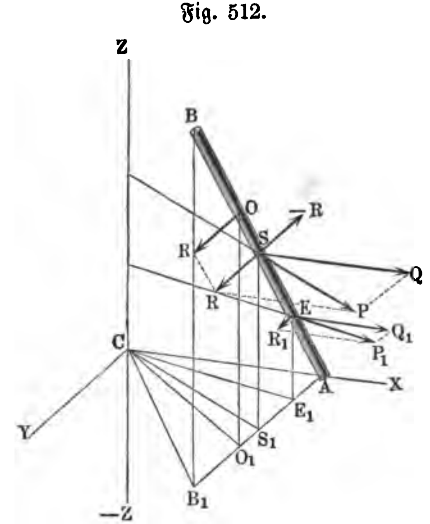
und durch ein aus Q und R zusammengesetztes Kräftepaar zu ersetzen. Bringen wir nämlich im Schwerpunkte S vier sich das Gleichgewicht haltende Kräfte $+ Q$ und $- Q$, sowie $+ R$ und $- R$ an, so geben die positiven Theile die Mittelkraft

$$P = \omega^2 \sqrt{Q^2 + R^2},$$

wogegen die negativen Theile $-Q$ und $-R$ mit den in U und V (s. Fig. 501) angreifenden Centrifugalkräften die Kräftepaare $(Q, -Q)$ und $(R, -R)$ bilden, die sich zu einem einzigen Kräftepaare zusammensetzen lassen.

Um mit dieser Zurückführung der Centrifugalkräfte eines umlaufenden Körpers auf eine Kraft und ein Kräftepaar bekannt zu werden, ziehen wir folgenden einfachen Fall in Betracht. Die Stange AB, Fig. 512, welche sich um die Axe $Z\overline{Z}$ dreht, liege parallel zur Ebene YZ und ruhe mit dem Ende A in der Axe CX. Setzen wir die Länge AB dieser Stange $= l$, das Gewicht derselben $= G$, den Winkel ABB_1, um welchen diese Stange von der Drehaxenrichtung abweicht, $= \alpha$, und ihren Abstand CA von der Ebene YZ, welches auch ihr kürzester Abstand von der Axe $Z\overline{Z}$ ist, $= a$. Ist nun E ein Element $\frac{M}{n}$ der Stange,

Fig. 512.



und $y = AE_1$ die Horizontalprojection seines Abstandes AE vom Ende A, so hat man für die Componenten der Centrifugalkraft P_1 dieses Elementes:

$$Q_1 = \omega^2 \cdot \frac{M}{n} \cdot \overline{CA} = \omega^2 \cdot \frac{M}{n} a \text{ und } R_1 = \omega^2 \cdot \frac{M}{n} \cdot \overline{AE_1} = \omega^2 \cdot \frac{M}{n} y,$$

dagegen ihre Momente in Beziehung auf die Grundebene XCY, da der Abstand dieses Elementes von der Ebene XY:

$$E_1 E = \overline{AE_1}\ cotg.\,\alpha = y\ cotg.\,\alpha \text{ ist,}$$

$$Q_1 z_1 = \omega^2 \cdot \frac{M}{n} \cdot \overline{CA} . \overline{E_1 E} = \omega^2 \cdot \frac{M}{n} a\, y\, cotg.\,\alpha \text{ und}$$

$$R_1 z_1 = \omega^2 \cdot \frac{M}{n} y^2 \cdot cotg.\,\alpha.$$

Die sämmtlichen Seitenkräfte parallel zur Ebene XZ geben die Resultirende:

$$Q = Q_1 + Q_2 + \cdots = n \cdot \omega^2 \cdot \frac{M}{n} a = \omega^2 . Ma,$$

und das Moment derselben:

$$Qu = Q_1 z_1 + Q_2 z_2 + \cdots = \omega^2 \cdot \frac{M}{n} a\, cotg.\, \alpha\, (y_1 + y_2 + \cdots),$$

oder, da $y_1 = \frac{l\, sin.\, \alpha}{n}$, $y_2 = 2\frac{l\, sin.\, \alpha}{n}$, $y_3 = \frac{3\, l\, sin.\, \alpha}{n}$ u. s. w. zu nehmen, und $cotg.\, \alpha\, sin.\, \alpha = cos.\, \alpha$ ist,

$$Qu = \omega^2 \cdot \frac{M}{n} a\, cos.\, \alpha \cdot \frac{l}{n}(1 + 2 + 3 + \cdots + n) = \omega^2 \cdot \frac{M}{n} a\, cos.\, \alpha \cdot \frac{l}{n} \cdot \frac{n^2}{2}$$
$$= \tfrac{1}{2}\, \omega^2 .\, M\, a\, l\, cos.\, \alpha.$$

Es ist also der Abstand des Angriffspunktes dieser Seitenkraft von der Grundebene XY:

$$S_1 S = u = \frac{\tfrac{1}{2}\, \omega^2\, M\, a\, l\, cos.\, \alpha}{\omega^2\, M\, a} = \tfrac{1}{2}\, l\, cos.\, \alpha,$$

d. h. es fällt dieser Punkt mit dem Schwerpunkte der Stange zusammen. Die Seitenkräfte, welche parallel zu YZ wirken, geben die Resultirende:

$$R = R_1 + R_2 + \cdots = \omega^2 \cdot \frac{M}{n} (y_1 + y_2 + \cdots)$$
$$= \omega^2 \cdot \frac{M}{n}\, \frac{l\, sin.\, \alpha}{n} \cdot \frac{n^2}{2} = \tfrac{1}{2}\, \omega^2\, M l\, sin.\, \alpha \text{ mit dem Momente}$$

$$Rv = \omega^2 \cdot \frac{M}{n} \cdot cotg.\, \alpha\, (y_1^2 + y_2^2 + \cdots)$$
$$= \omega^2 \cdot \frac{M}{n}\, cotg.\, \alpha \cdot \left(\frac{(l\, sin.\, \alpha)^2}{n^2} + \frac{(2\, l\, sin.\, \alpha)^2}{n^2} + \cdots\right)$$
$$= \omega^2 \cdot \frac{M}{n}\, \frac{l^2}{n^2}\, (sin.\, \alpha)^2\, cotg.\, \alpha\, (1 + 4 + 9 + \cdots + n^2)$$
$$= \omega^2 \cdot \frac{M}{n} \cdot \frac{l^2}{n^2}\, sin.\, \alpha\, cos.\, \alpha \cdot \frac{n^3}{3}$$
$$= \tfrac{1}{3}\, \omega^2\, M\, l^2\, sin.\, \alpha\, cos.\, \alpha.$$

Es ist hiernach der Abstand des Angriffspunktes O dieser Kraft von der Grundebene XY:

$$O_1\, O = v = \frac{\tfrac{1}{3}\, \omega^2\, M\, l^2\, sin.\, \alpha\, cos.\, \alpha}{\tfrac{1}{2}\, \omega^2\, M\, l\, sin.\, \alpha} = \tfrac{2}{3}\, l\, cos.\, \alpha,$$

d. i. dieser Angriffspunkt liegt um $(\tfrac{2}{3} - \tfrac{1}{2})\, l\, cos.\, \alpha = \tfrac{1}{6}\, l\, cos.\, \alpha$ senkrecht, oder überhaupt um SO = ein Sechstel der Stangenlänge AB über dem Schwerpunkte S der Stange.

Aus den Kräften $Q = \omega^2\, M a$ und $R = \tfrac{1}{2}\, \omega^2\, Ml\, sin.\, \alpha$ folgt die im Schwerpunkte der Stange angreifende Endresultirende:

$$P = \sqrt{Q^2 + R^2} = \omega^2\, M \sqrt{a^2 + \tfrac{1}{4}\, l^2\, sin.\, \alpha^2},$$

und das Kräftepaar $(R, -R)$ mit dem Momente

$$R.\overline{SO} = {}^1/_2\, \omega^2\, M l \sin.\alpha\,.\,{}^1/_6\, l \cos.\alpha$$
$$= {}^1/_{12}\, \omega^2\, M l^2 \sin.\alpha \cos.\alpha = {}^1/_{24}\, \omega^2\, M l^2 \sin. 2\,\alpha.$$

§. 309 **Freie Axen.** Im Allgemeinen üben zwar die Centrifugalkräfte eines sich um eine Axe gleichförmig umdrehenden Körpers einen Druck auf die Axe aus, es ist jedoch auch möglich, daß diese Kräfte sich gegenseitig aufheben und deshalb die Axe gar keinen Druck auszuhalten hat. Dieser Fall kommt z. B. vor bei jedem sich um seine geometrische oder symmetrische Axe drehenden Rotationskörper, bei einer Radwelle und einem Wasserrade insbesondere, u. s. w. Wenn auf einen unter diesen Umständen sich umdrehenden Körper oder auf ein solches Massensystem keine äußeren Kräfte einwirken, so bleibt der Körper ohne Ende in dieser Umdrehung begriffen, ohne daß es nöthig ist, die Umdrehungsaxe festzuhalten. Man nennt deshalb diese Umdrehungsaxe eine freie Axe (franz. axe libre; engl. free axis). Aus dem Vorhergehenden folgen sogleich die Bedingungen, unter welchen eine Drehaxe eine freie Axe ist. Es ist nöthig, daß nicht nur die Mittelkräfte Q und R aus den parallel den Axenebenen XZ und YZ wirkenden Componenten der Centrifugalkräfte, sondern auch die Summe der Momente von jedem der beiden Kräftesysteme = Null ist, also hiernach:

1) $M_1 x_1 + M_2 x_2 + \cdots = 0,$
2) $M_1 y_1 + M_2 y_2 + \cdots = 0,$ ferner
3) $M_1 x_1 z_1 + M_2 x_2 z_2 + \cdots = 0,$ und
4) $M_1 y_1 z_1 + M_2 y_2 z_2 + \cdots = 0.$

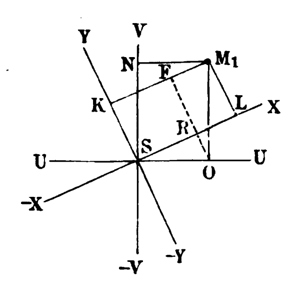
Die beiden ersten Gleichungen bedingen, daß die freie Axe durch den Schwerpunkt des Körpers oder Massensystemes geht. Die beiden letzteren aber liefern die Elemente zur Bestimmung der Lage dieser Axe. Es läßt sich übrigens nachweisen, daß jeder Körper oder jedes Massensystem mindestens drei freie Axen hat, und daß diese Axen im Schwerpunkte des Systemes unter rechten Winkeln zusammenstoßen.

Die höhere Mechanik unterscheidet von den freien Axen noch andere Axen, welche sich in irgend einem Punkte des Systemes durchkreuzen, und nennt diese Axen Hauptaxen (franz. axes principaux; engl. principal axes). Man beweist auch, daß das Trägheitsmoment eines Körpers in Beziehung auf eine der Hauptaxen ein Maximum, und in Beziehung auf die zweite ein Minimum ist und daß es in Hinsicht auf die dritte Axe einen Mittelwerth hat, sowie daß für einen Punkt, welcher in einer der freien Axen liegt, die Hauptaxen mit den freien Axen, oder den durch den Schwerpunkt gehenden Hauptaxen parallel laufen.

§. 310 **Freie Axen eines ebenen Massensystemes.** Befinden sich die Theile einer Masse in einer Ebene, bildet z. B. die Masse eine dünne

Platte oder ebene Figur, so ist die gerade Linie durch den Schwerpunkt der ganzen Masse, und normal zur Ebene derselben eine freie Axe der Masse, denn es ist in diesem Falle die Masse ohne Drehungshalbmesser, und daher die einzig mögliche Centrifugalkraft = Null. Um noch die beiden anderen freien Axen zu finden, schlagen wir folgenden Weg ein. Sei S, Fig. 513, der Schwerpunkt einer Masse, und seien $U\overline{U}$ und $V\overline{V}$ zwei in der Massenebene befindliche Coordinatenaxen, bestimmen wir die Massentheile durch Coordinaten parallel zu diesen Axen, z. B. das Massentheilchen M_1 durch die Coordinaten $M_1 N = u_1$ und $M_1 O = v_1$. Sei dagegen $X\overline{X}$ eine freie Axe, $Y\overline{Y}$ eine Axe winkelrecht gegen dieselbe, ferner der zu bestimmende Winkel USX, um welchen die freie Axe von der Coordinatenaxe SU abweicht, $= \varphi$, und setzen wir die Coordinaten der Massentheile in Hinsicht auf die Axen $X\overline{X}$ und $Y\overline{Y}$: $x_1, x_2 \ldots$ und $y_1, y_2 \ldots$, also für den Massentheil M_1:

Fig 513.



$$M_1 K = x_1 \text{ und } M_1 L = y_1.$$

Hiernach ergiebt sich sehr leicht:

$$x_1 = M_1 K = SR + RL = SO\,cos.\varphi + OM_1\,sin.\varphi = u_1 cos.\varphi + v_1 sin.\varphi,$$
$$y_1 = M_1 L = -OR + OF = -SO\,sin.\varphi + OM_1\,cos.\varphi$$
$$= -u_1\,sin.\varphi + v_1\,cos.\varphi;$$

und daher das Product:

$$x_1 y_1 = (u_1\,cos.\varphi + v_1\,sin.\varphi).(-u_1\,sin.\varphi + v_1\,cos.\varphi)$$
$$= -(u_1^2 - v_1^2)\,sin.\varphi\,cos.\varphi + u_1 v_1\,(cos\,\varphi^2 - sin.\varphi^2)$$

oder, da $sin.\varphi\,cos.\varphi = \frac{1}{2}\,sin.2\varphi$ und $cos.\varphi^2 - sin.\varphi^2 = cos.2\varphi$ ist,

$$x_1 y_1 = -\tfrac{1}{2}\,(u_1^2 - v_1^2)\,sin.2\varphi + u_1 v_1\,cos\,2\varphi,$$

und daher das Moment des Massentheiles M_1:

$$M_1 x_1 y_1 = -\frac{M_1}{2}\,(u_1^2 - v_1^2)\,sin.2\varphi + M_1 u_1 v_1\,cos.2\varphi,$$

ebenso das Moment des Massentheiles M_2:

$$M_2 x_2 y_2 = -\frac{M_2}{2}\,(u_2^2 - v_2^2)\,sin.2\varphi + M_2 u_2 v_2\,cos.2\varphi$$

u. s. w., und die Summe der Momente aller Massentheile, oder das Moment der ganzen Masse:

$$M_1 x_1 y_1 + M_2 x_2 y_2 + \cdots = -\tfrac{1}{2}\,sin.2\varphi\,[(M_1 u_1^2 + M_2 u_2^2 + \cdots)$$
$$- (M_1 v_1^2 + M_2 v_2^2 + \cdots)] + cos.2\varphi\,(M_1 u_1 v_1 + M_2 u_2 v_2 + \cdots).$$

Damit $X\overline{X}$ eine freie Axe werde, muß aber nach dem vorigen Paragraphen dieses Moment = Null sein; wir müssen daher setzen

$$\frac{1}{2} \sin. 2\varphi\, [(M_1 u_1^2 + M_2 u_2^2 + \cdots) - (M_1 v_1^2 + M_2 v_2^2 + \cdots)] - \cos. 2\varphi\, (M_1 u_1 v_1 + M_2 u_2 v_2 + \cdots) = 0,$$

und erhalten hiernach als Bedingungsgleichung:

$$tang. 2\varphi = \frac{\sin. 2\varphi}{\cos. 2\varphi} = \frac{2\,(M_1 u_1 v_1 + M_2 u_2 v_2 + \cdots)}{(M_1 u_1^2 + M_2 u_2^2 + \cdots) - (M_1 v_1^2 + M_2 v_2^2 + \cdots)}$$

$$= \frac{\text{Doppeltes Moment der Centrifugalkraft}}{\text{Differenz der Trägheitsmomente}}.$$

Durch diese Formel ergeben sich zwei Werthe für 2φ, welche von einander um 180°, und also auch zwei Werthe von φ, welche von einander um 90° abweichen; es ist deshalb nicht allein die durch diesen Winkel φ bestimmte Axe $X\overline{X}$ eine freie Axe, sondern auch die gegen sie winkelrecht gerichtete Axe $Y\overline{Y}$.

§. 311 Von vielen Flächen und Körpern lassen sich die freien Axen ohne alle Rechnung angeben. Bei einer symmetrischen Figur ist z. B. die Symmetrieaxe eine freie Axe, das Perpendikel im Schwerpunkte die zweite, und die Axe winkelrecht gegen die Ebene der Figur die dritte freie Axe. Bei einem Rotationskörper AB, Fig. 514, ist die Rotationsaxe $Z\overline{Z}$ eine freie Axe, ebenso auch jede Normale $X\overline{X}$, $Y\overline{Y}$ . . . zu dieser Linie durch den Schwerpunkt S. Bei einer Kugel ist jeder Durchmesser eine freie Axe, bei einem geraden, von sechs Rechtecken begrenzten Parallelepipede ABD, Fig. 515, aber sind es die drei durch den Schwerpunkt S gehenden und auf

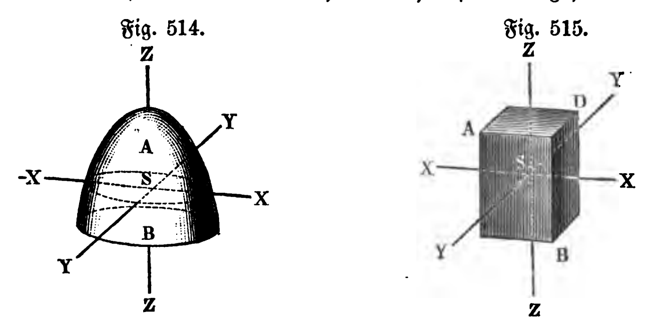


Fig. 514. Fig. 515.

den Seitenflächen BD, AB und AD normal stehenden oder mit den Kanten parallel laufenden Axen $X\overline{X}$, $Y\overline{Y}$ und $Z\overline{Z}$.

Bestimmen wir noch die freien Axen von einem schiefwinkeligen Parallelogramme $ABCD$, Fig. 516. Legen wir durch den Schwerpunkt S desselben die unter sich rechtwinkelig stehenden Coordinatenaxen $U\overline{U}$ und $V\overline{V}$ so, daß die eine der Seite AB des Parallelogrammes parallel läuft, und zerlegen wir das Parallelogramm durch Parallellinien in $2n$ gleiche

Streifen, wie z. B. FG. Ist nun die eine Seite $AB = 2a$, die andere Seite $AD = 2b$, und der spitze Winkel ADC zwischen je zwei Seiten, $= \alpha$, so erhalten wir für den um $SE = x$ von $U\overline{U}$ abstehenden Streifen FG die Länge des einen Theiles EG,

Fig. 516.

$= KG + EK = a + x\, cotg.\, \alpha$,

sowie die des anderen Theiles EF

$= a - x\, cotg.\, \alpha$,

und, da $\frac{b}{n} sin.\, \alpha$ die Breite beider ist, die Inhalte dieser Streifen

$$= \frac{b\, sin.\, \alpha}{n}(a + x\, cotg.\, \alpha) \text{ und } \frac{b\, sin.\, \alpha}{n}(a - x\, cotg.\, \alpha);$$

auch folgen die Maße der Centrifugalkräfte von diesen Theilen in Hinsicht auf die Axe $V\overline{V}$:

$$= \frac{b\, sin.\, \alpha}{n}(a + x\, cotg.\, \alpha) \cdot {}^1\!/_2\,(a + x\, cotg.\, \alpha) = \frac{b\, sin.\, \alpha}{2n}(a + x\, cotg.\, \alpha)^2$$

und

$$\frac{b\, sin.\, \alpha}{2n}(a - x\, cotg.\, \alpha)^2,$$

sowie ihre Momente in Hinsicht auf die Axe $U\overline{U}$:

$$\frac{b\, sin.\, \alpha}{2n}(a + x\, cotg.\, \alpha)^2 x \text{ und } \frac{b\, sin.\, \alpha}{2n}(a - x\, cotg.\, \alpha)^2 x.$$

Da beide Kräfte in Hinsicht auf $V\overline{V}$ einander entgegengesetzt wirken, so giebt die Vereinigung ihrer Momente die Differenz:

$$\frac{b\, x\, sin.\, \alpha}{2n}[(a + x\, cotg.\, \alpha)^2 - (a - x\, cotg.\, \alpha)^2] = \frac{2}{n} a\, b\, x^2 \cos.\, \alpha.$$

Setzen wir in der Formel für x nach und nach $\frac{b\, sin.\, \alpha}{n}$, $\frac{2\, b\, sin.\, \alpha}{n}$, $\frac{3\, b\, sin.\, \alpha}{n}$ u. s. w. ein, und addiren wir die dadurch erhaltenen Ergebnisse, so bekommen wir das Maß für das Moment der Centrifugalkraft des halben Parallelogrammes:

$$\frac{2ab}{n} \cos.\, \alpha \cdot \frac{b^2 sin.\, \alpha^2}{n^2}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) = 2\, a b^3 sin.\, \alpha^2 \cos.\, \alpha \cdot \frac{n^3}{3\, n^3}$$

$$= {}^2\!/_3\, a\, b^3 sin.\, \alpha^2 \cos.\, \alpha,$$

und also für das ganze Parallelogramm, oder:

$$M_1 u_1 v_1 + M_2 u_2 v_2 + \cdots = {}^4/_3\, a b^3 \sin.\alpha^2 \cos.\alpha.$$

Das Trägheitsmoment in Hinsicht auf die Axe $V\overline{V}$ ist für einen Streifen FG

$$= \frac{b \sin.\alpha}{n}\left(\frac{(a + x \operatorname{cotg}.\alpha)^3}{3} + \frac{(a - x \operatorname{cotg}.\alpha)^3}{3}\right)$$

$$= \frac{2\, b \sin.\alpha}{3\, n}\,(a^3 + 3\, a\, x^2 \operatorname{cotg}.\alpha^2) = {}^2/_3\, \frac{a\, b}{n} \sin.\alpha\, (a^2 + 3\, x^2 \operatorname{cotg}.\alpha^2).$$

Setzt man nun für x successiv $\frac{b \sin.\alpha}{n}, \frac{2\, b \sin.\alpha}{n}, \frac{3\, b \sin.\alpha}{n}$ u. s. w., und summirt man die sich ergebenden Werthe, so folgt das Trägheitsmoment der einen Hälfte

$$= {}^2/_3\, a\, b \sin.\alpha\, (a^2 + b^2 \cos.\alpha^2),$$

und daher das des Ganzen

$$= {}^4/_3\, a\, b \sin.\alpha\, (a^2 + b^2 \cos.\alpha^2).$$

In Hinsicht auf die Umdrehungsaxe $U\overline{U}$ ist hingegen das Trägheitsmoment des Parallelogrammes

$$= 4\, a\, b \sin.\alpha \cdot \frac{b^2 \sin.\alpha^2}{3} = {}^4/_3\, a\, b^3 \sin.\alpha^3 \text{ (§. 287)};$$

es ergiebt sich daher die gesuchte Differenz der Trägheitsmomente, d. i.:

$$\begin{aligned}
&(M_1 u_1^2 + M_2 u_2^2 + \cdots) - (M_1 v_1^2 + M_2 v_2^2 + \cdots),\\
&= {}^4/_3\, a\, b \sin.\alpha\, (a^2 + b^2 \cos.\alpha^2) - {}^4/_3\, a\, b^3 \sin.\alpha^3\\
&= {}^4/_3\, a\, b \sin.\alpha\, [a^2 + b^2 (\cos.\alpha^2 - \sin.\alpha^2)]\\
&= {}^4/_3\, a\, b \sin.\alpha\, (a^2 + b^2 \cos.2\,\alpha).
\end{aligned}$$

Endlich folgt für den Winkel $USX = \varphi$, welchen die freie Axe $X\overline{X}$ mit der Coordinatenaxe $U\overline{U}$ oder der Seite AB einschließt, nach §. 310:

$$\operatorname{tang}.2\,\varphi = \frac{2\,(M_1 u_1 v_1 + M_2 u_2 v_2 + \cdots)}{(M_1 u_1^2 + M_2 u_2^2 + \cdots) - (M_1 v_1^2 + M_2 v_2^2 + \cdots)}$$

$$= \frac{2 \,.\, {}^4/_3\, a\, b^3 \sin.\alpha^2 \cos.\alpha}{{}^4/_3\, a\, b \sin.\alpha\, (a^2 + b^2 \cos.2\,\alpha)} = \frac{b^2 \sin.2\,\alpha}{a^2 + b^2 \cos.2\,\alpha}.$$

Beim Rhombus ist $a = b$, daher:

$$\operatorname{tang}.2\,\varphi = \frac{\sin.2\,\alpha}{1 + \cos.2\,\alpha} = \frac{2 \sin.\alpha \cos.\alpha}{1 + \cos.\alpha^2 - \sin.\alpha^2} = \frac{2 \sin.\alpha \cos.\alpha}{2 \cos.\alpha^2} = tg.\alpha,$$

also:

$$2\,\varphi = \alpha, \text{ und } \varphi = \frac{\alpha}{2}.$$

Da dieser Winkel die Richtung der Diagonale angiebt, so folgt, daß die Diagonalen freie Axen des Rhombus sind.

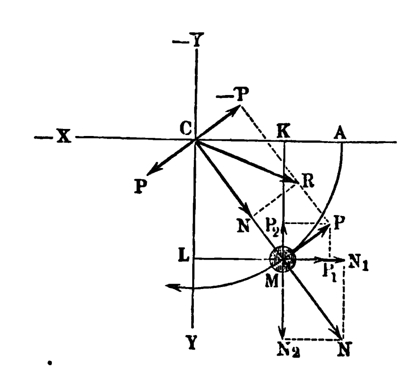
Beispiel. Bei dem schiefwinkeligen Parallelogramme $ABCD$, Fig. 516, messen die Seiten $AB = 2a = 16$ Zoll und $BC = 2b = 10$ Zoll, und ist der Umfangswinkel $ABC = \alpha = 60^0$, welche Richtungen haben dessen freie Axen? Es ist

$$tang.\, 2\varphi = \frac{5^2 . sin. 120^0}{8^2 + 5^2 . cos. 120^0} = \frac{25 . sin. 60^0}{64 - 25\, cos. 60^0} = \frac{25 . 0{,}86603}{64 - 25 . 0{,}5}$$
$$= 0{,}42040 = tang. 22^0{,}48', \text{ oder } tang. 202^0{,}48'.$$

Hiernach folgen $\varphi = 11^0{,}24'$ und $101^0{,}24'$ als Neigungswinkel der zwei ersten freien Axen gegen die Seite AB. Die dritte freie Axe steht auf der Ebene des Parallelogrammes rechtwinkelig. Diese Winkel bestimmen auch die freien Axen eines geraden Parallelepipedes mit rhomboidalen Grundflächen.

§. 312 **Wirkung auf die Umdrehungsaxe.** Wenn sich ein materieller Punkt M, Fig. 517, ungleichförmig um eine feste Axe C dreht, so hat dieselbe nicht bloß die Centrifugalkraft, sondern auch die Kraft der Trägheit dieses Punktes auszuhalten. Während die Centrifugalkraft radial auswärts wirkt, hat natürlich die Kraft der Trägheit eine tangentiale Richtung, und zwar entweder der der Umdrehungsbewegung entgegengesetzt, oder mit derselben zusammenfallend, je nachdem die Acceleration dieser Bewegung eine positive oder eine negative (Retardation) ist. Man kann daher auch annehmen, daß die Centrifugalkraft $\overline{MN} = \overline{CN} = N$ unmittelbar in der Axe C angreife

Fig. 517.



und daß die Kraft der Trägheit $\overline{MP} = -P$ aus einem Kräftepaare $(P, -P)$ und einer Axenkraft $\overline{CP} = -P$ bestehe, und folglich die ganze Axenkraft $\overline{CR} = R$ durch die Diagonale eines aus N und $-P$ construirten rechtwinkeligen Parallelogrammes bestimmen.

Ist r die Entfernung CM der Masse M von der Umdrehungsaxe C, sowie ω die Winkelgeschwindigkeit und $\varkappa$ die Winkelacceleration, so hat man nach §§. 302 und 282:

$$N = \omega^2 M r$$

und

$$P = \varkappa M r,$$

daher die gesuchte Mittelkraft:

$$R = \sqrt{N^2 + P^2} = \sqrt{\omega^4 + \varkappa^2} . M r,$$

und für den Winkel $RCN = \varphi$, um welchen die Richtung dieser Kraft von der Richtung CM der Centrifugalkraft abweicht,

$$tang.\,\varphi = \frac{-P}{N} = -\frac{P}{N} = -\frac{\varkappa}{\omega^2}.$$

Da in Folge der Acceleration $\varkappa$, ω veränderlich ist, so fällt natürlich auch die Centrifugalkraft N und die Mittelkraft R variabel aus.

Um die Centrifugal- und Trägheitskräfte eines Systems von Massen M_1, M_2 u. s. w. zu vereinigen, zerlegt man diese Kräfte nach zwei Axenrichtungen $\overline{X}X$ und $\overline{Y}Y$ in Seitenkräfte, vereinigt hierauf die in einer Axenrichtung wirkenden Kräfte durch algebraische Addition, und setzt endlich die hieraus resultirenden zwei Kräfte wie oben zu einer Mittelkraft zusammen. Sind x und y die Coordinaten CK und CL des materiellen Punktes M_1 in Hinsicht auf das Axensystem $\overline{X}X$, $\overline{Y}Y$, so hat man die beiden Componenten der Centrifugalkraft N:

$$N_1 = \frac{x}{r}\,N = \omega^2 M x \text{ und}$$

$$N_2 = \frac{y}{r}\,N = \omega^2 M y,$$

dagegen die der Trägheit:

$$P_1 = \frac{y}{r}\,P = \varkappa M y \text{ und}$$

$$P_2 = \frac{x}{r}\,P = \varkappa M x;$$

es folgt daher die Gesammtkraft in der Axe $\overline{X}X$:

$$Q = N_1 + P_1 = \omega^2 M x + \varkappa M y,$$

und die in der Axe $\overline{Y}Y$:

$$R = N_2 - P_2 = \omega^2 M y - \varkappa M x.$$

Hat man es nun mit einem sich um eine feste Axe C, Fig. 518, drehenden Systeme von materiellen Punkten oder Massen M_1, M_2 u. s. w. zu thun, deren Coordinaten in Hinsicht auf eine Coordinataxe $\overline{X}X$:

$$CK_1 = x_1,\ CK_2 = x_2 \text{ u. s. w.,}$$

und in Hinsicht auf die andere Coordinataxe $\overline{Y}Y$:

$$CL_1 = y_1,\ CL_2 = y_2 \text{ u. s. w.}$$

sind, so fällt folglich die Gesammtkraft in der ersten Axe:

$$Q = \omega^2 M_1 x_1 + \varkappa M_1 y_1 + \omega^2 M_2 x_2 + \varkappa M_2 y_2 + \cdots, \text{ d. i.:}$$

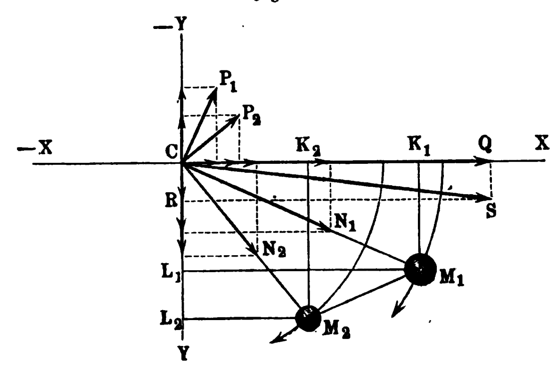
$$Q = \omega^2 (M_1 x_1 + M_2 x_2 + \cdots) + \varkappa (M_1 y_1 + M_2 y_2 + \cdots),$$

und dagegen die in der anderen Axe:

$$R = \omega^2 (M_1 y_1 + M_2 y_2 + \cdots) - \varkappa (M_1 x_1 + M_2 x_2 + \cdots) \text{ aus.}$$

Bezeichnet man endlich die ganze Masse $M_1 + M_2 + \cdots$ durch M und die Coordinaten ihres Schwerpunktes in Hinsicht auf die Axen $\overline{X}X$ und $\overline{Y}Y$ durch x und y, so hat man (siehe §. 305)

Fig. 518.



$$M_1 x_1 + M_2 x_2 + \cdots = M x \text{ und}$$
$$M_1 y_1 + M_2 y_2 + \cdots = M y;$$

daher einfacher:

$$Q = \omega^2 M x + \varkappa M y \text{ und}$$
$$R = \omega^2 M y - \varkappa M x.$$

Aus Q und R folgt nun die Mittelkraft:

$$S = \sqrt{Q^2 + R^2},$$

sowie für den Richtungswinkel $X C S = \varphi$ derselben:

$$tang.\, \varphi = \frac{R}{Q}.$$

Da $M x$ und $M y$ die statischen Momente des Schwerpunktes sind, so folgt, daß man bei Bestimmung des Axendruckes (S) eines in einer und derselben Umdrehungsebene befindlichen Massensystemes die ganze Masse in dem Schwerpunkte des Systemes vereinigt annehmen könne, und da die Entfernung des Schwerpunktes des Massensystemes von der Umdrehungsaxe,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

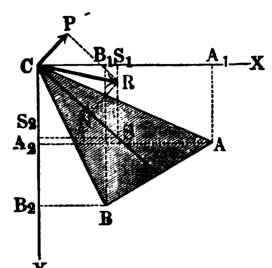
ist, so hat man auch

$$S = \sqrt{[(\omega^2 M x + \varkappa M y)^2 + (\omega^2 M y - \varkappa M x)^2]}$$
$$= M \sqrt{[\omega^4 (x^2 + y^2) + \varkappa^2 (x^2 + y^2)]}$$
$$= M \sqrt{\omega^4 + \varkappa^2} \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\omega^4 + \varkappa^2} . M r.$$

Anmerkung. Für ein Dreieck $A B C$, Fig. 519 (a. f. S.), welches sich um seinen Eckpunkt C dreht, und dessen Eckpunkte A und B durch die Coordinaten

(x_1, y_1) und (x_2, y_2) bestimmt sind, hat man nach §. 112 die Coordinaten seines Schwerpunktes S:

Fig. 519.



$$CS_1 = x = \frac{x_1 + x_2}{3}$$

und

$$CS_2 = y = \frac{y_1 + y_2}{3},$$

und die Masse, wenn man dieselbe durch den Flächeninhalt mißt,

$$M = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{2}.$$

Auch läßt sich das Trägheitsmoment desselben in Hinsicht auf die Umdrehungsaxe C durch den Ausdruck

$$W = \frac{M}{6}\left(\frac{x_1^3 - x_2^3}{x_1 - x_2} + \frac{y_1^3 - y_2^3}{y_1 - y_2}\right)$$

$$= \frac{M}{6}(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 + y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2)$$

bestimmen.

Diese Formeln finden auch ihre Anwendung auf ein gerades Prisma, dessen Grundfläche das Dreieck ABC ist.

Beispiel. Ein gerades Prisma mit der dreiseitigen Grundfläche ABC soll durch ein constant wirkendes Kräftepaar so schnell um die Seitenkante C gedreht werden, daß es im Verlaufe von $t = 1$ Secunde, $u = 5/2$ Umdrehungen macht, und man soll nicht allein das Moment dieses Kräftepaares, sondern auch noch die Wirkung dieser Bewegung auf die Axe C bestimmen. Es sei die Basis ABC dieses Körpers durch die Coordinaten

$$x_1 = 1{,}5,\ y_1 = 0{,}5;\ x_2 = 0{,}4,\ y_2 = 1{,}0 \text{ Fuß}$$

bestimmt, ferner die Höhe oder Länge desselben $l = 2$ Fuß, und seine Dichtigkeit $\gamma = 30$ Pfund. Hieraus berechnet sich zunächst der Inhalt der Basis:

$$F = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{2} = \frac{1{,}5\,.\,1{,}0 - 0{,}4\,.\,0{,}5}{2} = \frac{1{,}3}{2} = 0{,}65 \text{ Quadratfuß},$$

und daher die Masse des ganzen Körpers:

$$M = \frac{Fl\gamma}{g} = 0{,}032\,.\,0{,}65\,.\,2\,.\,30 = 1{,}248 \text{ Pfund}.$$

Nun ist ferner

$$x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 = 2{,}25 + 0{,}60 + 0{,}16 = 3{,}01,$$
$$y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2 = 0{,}25 + 0{,}50 + 1{,}00 = 1{,}75;$$

daher folgt das Trägheitsmoment des Körpers:

$$W = (3{,}01 + 1{,}75)\frac{M}{6} = 4{,}76\,.\,\frac{1{,}248}{6} = 0{,}99008 \text{ Fußpfund}.$$

Da in Folge der Beständigkeit des Umdrehungskräftepaares die Umdrehungsbewegung eine gleichförmig beschleunigte ist, so folgt die Winkelgeschwindigkeit des Körpers am Ende der Zeit t von 1 Secunde (s. §. 10):

$$\omega = \frac{2s}{t} = \frac{2\,.\,2\pi u}{t} = \frac{2\,.\,2\,.\,5\pi}{2} = 31{,}416 \text{ Fuß},$$

und es ist daher die erforderliche mechanische Arbeit:

$$A = \frac{1}{2}\,\omega^2\,T = \frac{1}{2}\,(31,416)^2\,.\,0,99008 = 488,6 \text{ Fußpfund.}$$

Die Winkelacceleration ist

$$\varkappa = \frac{\omega}{t} = \frac{31,416}{1} = 31,416 \text{ Fuß,}$$

daher das Moment des Kräftepaares:

$$Pa = \varkappa\,W = 31,416\,.\,0,99008 = 31,10 \text{ Fußpfund.}$$

Die Abstände des Schwerpunktes S der Basis von den Coordinataren $\overline{X}X$ und $\overline{Y}Y$ sind

$$x = \frac{x_1 + x_2}{3} = \frac{1,5 + 0,4}{3} = 0,6333 \text{ und}$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{3} = \frac{0,5 + 1,0}{3} = 0,5000,$$

folglich ergiebt sich der Abstand des Schwerpunktes von der Are:

$$CS = r = \sqrt{x^2 + y^2} = 0,6511.$$

Ferner ist

$$\omega^4 = 31,416^4 = 974090 \text{ und}$$
$$\varkappa^2 = 31,416^2 = 987;$$

daher folgt:

$$\sqrt{\omega^4 + \varkappa^2} = \sqrt{975077} = 987,36,$$

und es wächst demnach der Arendruck während der beschleunigten Umdrehung des Körpers, von

$$P = \varkappa\,M\,r = 31,416\,.\,1,248\,.\,0,6511 = 25,53 \text{ Pfund}$$

bis

$$R = \sqrt{\omega^4 + \varkappa^2}\,.\,M\,r = 987,46\,.\,0,8126 = 802,41 \text{ Pfund.}$$

Wenn nach Verlauf von einer Secunde Zeit das Kräftepaar zu wirken aufhört, so nimmt der Körper eine gleichförmige Umdrehungsbewegung an, und es besteht von nun an der von der Are auszuhaltende Druck nur in der Centrifugalkraft:

$$N = \omega^2\,M\,r = 986,96\,.\,0,8126 = 802,00 \text{ Pfund.}$$

Der von 25,53 bis 802,41 allmälig anwachsende Arendruck ist anfangs rechtwinkelig gegen die centrale Schwerlinie CS gerichtet, nähert sich aber während des Wachsens der Geschwindigkeit dieser Linie immer mehr und mehr, so daß er am Ende der Zeit $t = 1$ Secunde, nur noch um einen Winkel φ von dieser Linie abweicht, welcher durch

$$tang.\,\varphi = \frac{P}{N} = \frac{25,53}{802,00} = 0,03183$$

bestimmt ist und hiernach den Werth $\varphi = 1^0,49'$ hat. Wenn das Kräftepaar zu wirken aufhört, so fällt natürlich die Richtung der Arenkraft $N = 802,00$ Pfund ganz in die centrale Schwerlinie CS, und dreht sich folglich auch mit dieser Linie im Kreise herum.

Wenn man statt des Kräftepaares nur eine Kraft P am Hebelarme a auf den Körper wirken läßt, so gesellt sich zu dem obigen Arendrucke noch ein dieser Kraft gleicher Druck P.

§. 313 **Mittelpunkt des Stosses.** Befinden sich die einzelnen Theile M_1, $M_2 \cdots$, Fig. 520, eines rotirenden Massensystemes nicht in einer und derselben Umdrehungsebene, so fallen die Richtungen der Kräfte

Fig. 520.

$Q_1 = \omega^2 M_1 x_1 + \varkappa M_1 y_1$,
$Q_2 = \omega^2 M_2 x_2 + \varkappa M_2 y_2$ u.
nicht mehr in die Coordinatenaxe $\overline{X}X$, sondern in die Coordinatenebene XZ und ebenso die der Kräfte:
$R_1 = \omega^2 M_1 y_1 - \varkappa M_1 x_1$,
$R_2 = \omega^2 M_2 y_2 - \varkappa M_2 x_2$ u.
nicht mehr in die Coordinatenaxe $\overline{Y}Y$, sondern in die Coordinatenebene YZ. Es lassen sich nun zwar die Kräftesysteme Q_1, Q_2 u. s. w. und R_1, R_2 u. s. w. auf die bekannte Weise (§. 305) zu den Mittelkräften:
$Q = Q_1 + Q_2 + \cdots$ und
$R = R_1 + R_2 + \cdots$
vereinigen, da aber ihre Angriffslinien UQ und VR im Allgemeinen nicht in eine Ebene fallen, sondern die Drehungsaxe CZ in zwei verschiedenen Punkten U und V schneiden, so ist eine weitere Vereinigung dieser Kräfte zu einer Mittelkraft nicht, sondern nur eine Zurückführung derselben auf eine Kraft und ein Kräftepaar möglich. Die Seitenkräfte Q und R sind natürlich wie oben:

$$Q = \omega^2 (M_1 x_1 + M_2 x_2 + \cdots) + \varkappa (M_1 y_1 + M_2 y_2 + \cdots)$$
$$= \omega^2 Mx + \varkappa My, \text{ und}$$
$$R = \omega^2 (M_1 y_1 + M_2 y_2 + \cdots) - \varkappa (M_1 x_1 + M_2 x_2 + \cdots)$$
$$= \omega^2 My - \varkappa Mx,$$

wenn wieder M die ganze Masse $M_1 + M_2 + \cdots$ und x und y die Abstände ihres Schwerpunktes S von den Coordinatebenen YZ und XZ bezeichnen.

Setzen wir ferner die Abstände der Massen M_1, M_2 u. s. w. von der auf der Umdrehungsaxe CZ rechtwinkelig stehenden Umdrehungsebene XY, z_1,

z_2 u. s. w., so erhalten wir (wie in §. 305) für die Abstände der Angriffspunkte U und V der Kräfte Q und R von dem Anfangspunkte C:

$$u = \frac{Q_1 z_1 + Q_2 z_2 + \cdots}{Q_1 + Q_2 + \cdots}$$
$$= \frac{\omega^2 (M_1 x_1 z_1 + M_2 x_2 z_2 + \cdots) + \varkappa (M_1 y_1 z_1 + M_2 y_2 z_2 + \cdots)}{\omega^2 (M_1 x_1 + M_2 x_2 + \cdots) + \varkappa (M_1 y_1 + M_2 y_2 + \cdots)}$$

und

$$v = \frac{R_1 z_1 + R_2 z_2 + \cdots}{R_1 + R_2 + \cdots}$$
$$= \frac{\omega^2 (M_1 y_1 z_1 + M_2 y_2 z_2 + \cdots) - \varkappa' (M_1 x_1 z_1 + M_2 x_2 z_2 + \cdots)}{\omega^2 (M_1 y_1 + M_2 y_2 + \cdots) - \varkappa (M_1 x_1 + M_2 x_2 + \cdots)}.$$

Wird die Axe CZ in zwei Punkten A und B (Zapfenlagern) festgehalten, welche um die Coordinaten $CA = l_1$ und $CB = l_2$ vom Anfangspunkte abstehen, so zerlegt sich die Kraft Q in die Seitenkräfte:

$$X_1 = \left(\frac{l_2 - u}{l_2 - l_1}\right) Q \text{ und } X_2 = \left(\frac{u - l_1}{l_2 - l_1}\right) Q,$$

und die Kraft R in die Seitenkräfte:

$$Y_1 = \left(\frac{l_2 - v}{l_2 - l_1}\right) R \text{ und } Y_2 = \left(\frac{v - l_1}{l_2 - l_1}\right) R,$$

und es ist nun der Druck im Zapfen A:

$$S_1 = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2},$$

und der im Zapfen B:

$$S_2 = \sqrt{X_2^2 + Y_2^2}.$$

Wird die Acceleration der Umdrehungsbewegung nicht durch ein Kräftepaar, dessen Moment Pa ist, sondern durch eine excentrische Kraft P am Hebelarme a hervorgebracht, so tritt noch ein dieser Kraft P gleicher Druck zu den Axenkräften Q und R hinzu. Lassen wir diese Kraft P parallel zur Axe CY, und im Abstande $FO = a$ von der Umdrehungsaxe, rechtwinkelig gegen die Ebene XZ wirken, und nehmen wir noch an, daß ihre Angriffslinie um $CF = HO = b$ von der Coordinatebene XY abstehe, so wird durch dieselbe nur die Kraft R um P vergrößert, und zwar der Theil Y_1 im Stützpunkte A um

$$Y_3 = \left(\frac{l_2 - b}{l_2 - l_1}\right) P,$$

und der Theil Y_2 im Stützpunkte B um

$$Y_4 = \left(\frac{b - l_1}{l_2 - l_1}\right) P.$$

Wenn $M_1 x_1 + M_2 x_2 + \cdots = 0$, sowie
$M_1 y_1 + M_2 y_2 + \cdots = 0$, ferner:
$M_1 x_1 z_1 + M_2 x_2 z_2 + \cdots = 0$ und
$M_1 y_1 z_1 + M_2 y_2 z_2 + \cdots = 0$,

und folglich die Umdrehungsaxe CZ eine freie Axe ist, so fallen nicht allein die Kräfte Q und R, sondern auch ihre Momente Qu und Rv einzeln Null aus, und es ist daher (vergl. §. 309) zu folgern, daß bei Umdrehung eines Massensystemes um eine freie Axe sich nicht allein die Centrifugalkräfte, sondern auch die Trägheitskräfte einander das Gleichgewicht halten.

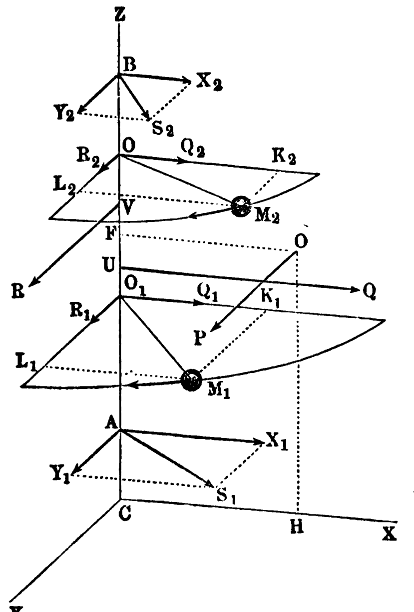
Nehmen wir an, daß sich das Massensystem in Ruhe befindet, daß also $\omega =$ Null ist, oder sehen wir von der Wirkung der Centrifugalkräfte auf die Umdrehungsaxe ab, so erhalten wir einfacher die Axendrücke:

$$Q = \varkappa M y = \varkappa (M_1 y_1 + M_2 y_2 + \cdots),$$
$$R = - \varkappa M x = - \varkappa (M_1 x_1 + M_2 x_2 + \cdots), \text{ sowie}$$
$$Qu = \varkappa (M_1 y_1 z_1 + M_2 y_2 z_2 + \cdots) \text{ und}$$
$$Rv = - \varkappa (M_1 x_1 z_1 + M_2 x_2 z_2 + \cdots).$$

Wenn die Ebene XZ Symmetrieebene und folglich auch Schwerebene des ganzen Massensystemes ist, so fällt

$$M_1 y_1 + M_2 y_2 + \cdots = 0 \text{ und}$$
$$M_1 y_1 z_1 + M_2 y_2 z_2 + \cdots = 0,$$

Fig. 521.



und daher auch

$$Q = 0,$$

sowie

$$Qu = 0$$

aus.

Machen wir nun noch die Forderung, daß die Umdrehungskraft:

$$P = \frac{\varkappa W}{a}$$

durch die Trägheitskraft R aufgehoben wird, ohne eine Wirkung auf die Umdrehungsaxe zurückzulassen, so können wir folglich:

$$P + R = 0$$

und

$$Pb + Rv = 0,$$

d. i.:

$$\frac{\varkappa W}{a} - \varkappa (M_1 x_1 + M_2 x_2 + \cdots) = 0, \text{ sowie}$$

$$\frac{\varkappa W b}{a} - \varkappa (M_1 x_1 z_1 + M_2 x_2 z_2 + \cdots) = 0$$

setzen, und es folgt hiernach:

$$a = \frac{W}{M x} = \frac{M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2 + \cdots}{M_1 x_1 + M_2 x_2 + \cdots} = \frac{\text{Trägheitsmoment}}{\text{statisches Moment}} \text{ und}$$

$$b = \left(\frac{M_1 x_1 z_1 + M_2 x_2 z_2 + \cdots}{W}\right) a = \frac{M_1 x_1 z_1 + M_2 x_2 z_2 + \cdots}{M_1 x_1 + M_2 x_2 + \cdots}$$

$$= \frac{\text{Centrifugalkraftmoment}}{\text{statisches Moment}}.$$

Diese Coordinaten bestimmen einen Punkt O, welcher der **Mittelpunkt des Stoßes** (franz. centre de percussion; engl. centre of percussion) genannt wird, weil jede durch denselben gehende und gegen die durch die Umdrehungs- oder feste Axe CZ gehende Symmetrieebene XZ des Körpers rechtwinkelig gerichtete Stoßkraft P beim Zusammenstoß dieses Körpers mit einem anderen Körper von der Trägheit der Masse des ersteren aufgehoben wird, ohne eine Wirkung auf die Axe des Körpers zurück zu lassen oder einen Druck auf dieselbe auszuüben.

Beispiele. 1) Für eine gerade Linie oder eine überall gleich dicke Stange CE, Fig. 522, welche an einem Ende C mit der Umdrehungsaxe CZ unter einem bestimmten Winkel ZCE zusammenstößt, ist, wenn M die Masse derselben und r den Abstand DE ihres zweiten Endes E von der Umdrehungsaxe bezeichnet, das Trägheitsmoment:

Fig. 522.

$$W = M k^2 = \tfrac{1}{3} M r^2 \text{ (s. §. 286)},$$

dagegen das statische Moment:

$$M x = \tfrac{1}{2} M r,$$

und endlich das Centrifugalmoment, da, wenn h die Projection CD der Stangenlänge CE in der Umdrehungsaxe CZ bezeichnet,

$$\frac{C O_1}{O_1 M_1} = \frac{z_1}{x_1} = \frac{h}{r},$$

also:

$$M_1 x_1 z_1 = \frac{h}{r} M_1 x_1^2,\; M_2 x_2 z_2 = \frac{h}{r} M_2 x_2^2$$

u. s. w. ausfällt:

$$M_1 x_1 z_1 + M_2 x_2 z_2 + \cdots = \frac{h}{r}(M_1 x_1^2 + M_2 x_2^2 + \cdots) = \frac{h}{r} \cdot \tfrac{1}{3} M r^2 = \tfrac{1}{3} M h r.$$

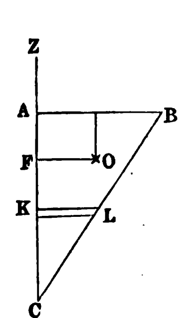
Daher sind die Coordinaten des Stoßmittelpunktes O dieser Stange durch

$$F O = a = \frac{\text{Trägheitsmoment}}{\text{statisches Moment}} = \frac{\tfrac{1}{3} M r^2}{\tfrac{1}{2} M r} = \tfrac{2}{3} r \text{ und}$$

$$C F = b = \frac{\text{Centrifugalmoment}}{\text{statisches Moment}} = \frac{\tfrac{1}{3} M h r}{\tfrac{1}{2} M r} = \tfrac{2}{3} h$$

bestimmt, und es ist demnach dieser Mittelpunkt um zwei Drittel der Stangenlänge CE vom Ende C und um ein Drittel derselben vom Ende E der Stange entfernt.

Fig. 523.



2) Das Trägheitsmoment einer rechtwinkeligen Dreiecksfläche ABC, Fig. 523, welche sich um eine Kathete CA dreht, ist, wenn man deren Masse durch M, und deren Katheten CA und AB durch h und r bezeichnet:

$$T = \frac{hr^3}{12} = \frac{hr}{2} \cdot \frac{r^2}{6} = \tfrac{1}{6} Mr^2 \text{ (s. §. 229)},$$

und das statische Moment derselben, da ihr Schwerpunkt S um $\frac{r}{3}$ von der Axe CA absteht,

$$Mx = \frac{Mr}{3},$$

folglich ist der Abstand des Stoßmittelpunktes O dieser Fläche von eben dieser Axe:

$$FO = a = \frac{\tfrac{1}{6} Mr^2}{\tfrac{1}{3} Mr} = \tfrac{1}{2} r.$$

Für ein streifenförmiges Element KL des Dreieckes, welches die Länge x und die Breite $\frac{h}{n}$ hat, und um $CK = z$ von der Spitze C absteht, ist das Centrifugalmoment:

$$Mxz = \frac{h}{n} x \cdot \tfrac{1}{2} xz,$$

oder, da $\frac{x}{z} = \frac{r}{h}$, also $x = \frac{r}{h} z$ ist,

$$Mxz = \tfrac{1}{2} \frac{h}{n} \left(\frac{r}{h}\right)^2 z^3.$$

Nimmt man nun für z nach und nach $1\left(\frac{h}{n}\right)$, $2\left(\frac{h}{n}\right)$, $3\left(\frac{h}{n}\right) \cdots n\left(\frac{h}{n}\right)$, und addirt die dadurch erhaltenen Werthe für Mxz, so ergiebt sich das ganze Centrifugalmoment:

$$M_1 x_1 z_1 + M_2 x_2 z_2 + \cdots = \tfrac{1}{2} \frac{h}{n} \left(\frac{r}{h}\right)^2 (1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3) \left(\frac{h}{n}\right)^3$$
$$= \tfrac{1}{2} \frac{h}{n} \left(\frac{r}{h}\right)^2 \cdot \frac{n^4}{4} \left(\frac{h}{n}\right)^3 = \tfrac{1}{8} r^2 h^2 = \tfrac{1}{4} \frac{rh}{2} rh$$
$$= \tfrac{1}{4} Mrh,$$

und daher der Abstand des Stoßmittelpunktes O vom Eckpunkt C:

$$CF = b = \frac{\tfrac{1}{4} Mrh}{\tfrac{1}{3} Mr} = \tfrac{3}{4} h.$$

Drittes Capitel.

Von den Wirkungen der Schwerkraft bei Bewegungen auf vorgeschriebenen Wegen.

Gleiten auf der geneigten Ebene. Ein schwerer Körper kann auf §. 314 mancherlei Weise verhindert werden, frei zu fallen; betrachten wir indessen im Folgenden nur zwei Fälle, nämlich den Fall, wenn der Körper von einer geneigten Ebene unterstützt wird, und den Fall, wenn er um eine horizontale Axe drehbar ist. In beiden Fällen sind die Wege des Körpers in einer Verticalebene enthalten. Befindet sich der Körper auf einer geneigten Ebene, so zerlegt sich das Gewicht desselben in zwei Seitenkräfte, von denen die eine normal gegen die Ebene gerichtet ist und von dieser aufgenommen wird, und die andere parallel zur Ebene und auf den Körper als bewegende Kraft wirkt. Ist G das Gewicht des Körpers $ABCD$, Fig. 524, und α die Neigung der schiefen Ebene FHR gegen den Horizont, so hat man nach §. 146 jenen Normaldruck:

Fig. 524.

$$N = G \cos. \alpha,$$

und diese bewegende Kraft:

$$P = G \sin. \alpha.$$

Die Bewegung des Körpers kann nun entweder gleitend oder wälzend sein; berücksichtigen wir zunächst nur die erstere. In diesem Falle nehmen alle Theile des Körpers gleichen Antheil an der Bewegung des Körpers, und haben daher auch eine gemeinschaftliche Acceleration p, die sich durch die bekannte Formel:

$$p = \frac{\text{Kraft}}{\text{Masse}}, = \frac{P}{M} = \frac{G \sin. \alpha}{G} \cdot g = g \sin. \alpha$$

ausdrücken läßt. Es ist also

$$p : g = \sin. \alpha : 1,$$

d. h. die Beschleunigung eines Körpers auf der schiefen Ebene verhält sich zur Beschleunigung des freien Falles wie der Sinus des Fallwinkels der schiefen Ebene zu Eins. Wegen der hinzutretenden Reibung gewährt aber diese Formel selten hinreichende Genauigkeit; es ist daher nothwendig, in vielen Fällen der Anwendung auch auf diese Rücksicht zu nehmen.

Bewegt sich ein Körper auf einer **krummen Fläche**, so ist die Acceleration veränderlich und an jeder Stelle gleich der Acceleration, welche der Berührungsebene an die krumme Fläche entspricht.

§. 315 Gleitet ein Körper mit der Anfangsgeschwindigkeit **Null** auf einer geneigten Ebene ohne Reibung herab, so ist nach §. 11 die Endgeschwindigkeit nach t Secunden:

$$v = g \sin.\alpha . t = 31{,}25 \sin.\alpha . t \text{ Fuß} = 9{,}81 \sin.\alpha . t \text{ Meter},$$

und der zurückgelegte Raum:

$$s = \frac{1}{2} g \sin.\alpha . t^2 = 15{,}625 \sin.\alpha . t^2 \text{ Fuß} = 4{,}905 \sin.\alpha . t^2 \text{ Meter}.$$

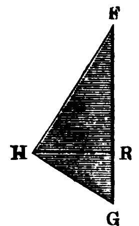
Beim freien Fall ist $v_1 = g\,t$ und $s_1 = \frac{1}{2} g\,t^2$, es läßt sich daher setzen:

$$v : v_1 = s : s_1 = \sin.\alpha : 1,$$

d. h. **es verhalten sich die Endgeschwindigkeit und der Raum beim Fallen auf der schiefen Ebene zur Endgeschwindigkeit und dem Raume beim freien Fallen, wie der Sinus des Neigungswinkels der schiefen Ebene zur Einheit.**

In dem rechtwinkeligen Dreiecke FGH, Fig. 525, mit verticaler Hypotenuse FG ist die Kathete:

Fig. 525.



$$FH = FG \sin.FGH = FG . \sin.FHR = \overline{FG} \sin.\alpha,$$

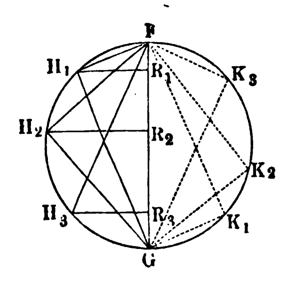
wenn α die Neigung FHR dieser Kathete gegen den Horizont bezeichnet; es ist daher:

$$FH : FG = \sin.\alpha : 1,$$

es durchläuft also ein Körper die verticale Hypotenuse FG und die geneigte Kathete FH in einer und derselben Zeit. Es läßt sich hiernach zu dem Fallraum auf der schiefen Ebene der entsprechende Raum des freien Falles, und zu dem letzteren der erstere durch Construction finden.

Da die auf dem Durchmesser FG, Fig. 526, stehenden Peripheriewinkel FH_1G, FH_2G u. s. w. lauter rechte sind, so schneidet der Halbkreis über FG von allen in F anfangenden schiefen Ebenen die mit dem Durchmesser, und deshalb auch unter sich, in gleichen Zeiten durchlaufenen Räume FH_1, FH_2 u. s. w. ab. Man sagt daher: **die Sehnen eines Kreises und der Durchmesser desselben werden gleichzeitig oder isochron durchfallen.** Uebrigens gilt dieser Isochronismus nicht allein für die Sehnen FH_1, FH_2 u. s. w., welche im höchsten Punkte F des Kreises anfangen, sondern auch für die Sehnen K_1G, K_2G u. s. w., welche in dem untersten Punkte

Fig. 526.



G desselben auslaufen; denn es lassen sich durch F Sehnen FK_1, FK_2 u. s. w. ziehen, welche mit den Sehnen GH_1, GH_2 u. s. w. gleiche Lage und gleiche Länge haben.

§. 316

Aus der Gleichung

$$s = \frac{v^2}{2p} = \frac{v^2}{2\,g\,.\,sin.\,\alpha} \text{ für den durchlaufenen Raum folgt:}$$

$$s\,sin.\,\alpha = \frac{v^2}{2\,g},$$

und umgekehrt:

$$v = \sqrt{2\,g\,s\,sin.\,\alpha}.$$

Nun ist aber $s\,sin.\,\alpha$ die Höhe FR (Fig. 527) der schiefen Ebene oder die Verticalprojection h des Weges $FH = s$ auf derselben; es sind daher die Endgeschwindigkeiten von Körpern, welche mit Null Anfangsgeschwindigkeit von verschieden geneigten, gleich hohen Ebenen FH, FH_1 u. s. w. herabfallen, unter sich gleich und auch gleich der Geschwindigkeit, welche ein Körper erlangt, wenn er von der Höhe FR dieser Ebenen frei herabfällt. (Hiermit ist sowohl §. 43, als auch §. 85 zu vergleichen).

Fig. 527.

Aus der Gleichung

$$s = \tfrac{1}{2}\,g\,sin.\,\alpha\,.\,t^2$$

folgt die Formel für die Zeit:

$$t = \sqrt{\frac{2\,s}{g\,sin.\,\alpha}} = \frac{1}{sin.\,\alpha}\sqrt{\frac{2\,s\,sin.\,\alpha}{g}} = \frac{1}{sin.\,\alpha}\,.\,\sqrt{\frac{2\,h}{g}}.$$

Für den freien Fall durch die Höhe $FR = h$ ist aber die Zeit:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2\,h}{g}},$$

es ergiebt sich demnach:

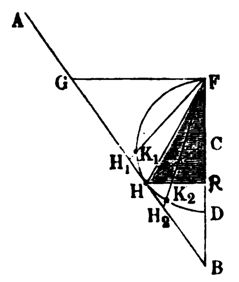
$$t : t_1 = 1 : sin.\,\alpha = s : h = FH : FR,$$

es verhält sich also die Zeit des Fallens auf der schiefen Ebene zur Zeit des freien Falles von der Höhe dieser Ebene wie die Länge zur Höhe der schiefen Ebene.

Beispiele. 1) Von einer schiefen Ebene FH, Fig. 528 (a. f. S.), ist der Anfangspunkt F gegeben und der Endpunkt H in einer gegebenen Linie AB so zu bestimmen, daß der Fall auf dieser Ebene in der kürzesten Zeit erfolge. Zieht man durch F die Horizontale FG bis zum Durchschnitt mit AB, und macht man $GH = GF$, so erhält man in H den gesuchten Punkt, und also in FH die Ebene der kürzesten Fallzeit; denn führt man durch F und H einen sich an

FG und FH tangential anlegenden Kreis, so sind dessen isochron durchlaufene Sehnen FK_1, FK_2 u. s. w. kürzer als die Längen FH_1, FH_2 u. s. w. der entsprechenden schiefen Ebenen; es ist folglich auch die Fallzeit für jene Sehnen kleiner, als für diese Längen, und die Fallzeit für die schiefe Ebene FH, welche mit einer Sehne zusammenfällt, die kürzeste.

Fig. 528.



2) Man soll die Neigung derjenigen schiefen Ebene FH, Fig. 527, angeben, von welcher ein Körper in derselben Zeit herabfällt, als wenn er erst von der Höhe FR frei herabfiele und dann mit der erlangten Geschwindigkeit horizontal bis H fortginge. Die Zeit zum Herabfallen von der senkrechten Höhe $FR = h$ ist:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}},$$

und die erlangte Geschwindigkeit in R ist:

$$v = \sqrt{2gh}.$$

Tritt nun beim Uebergange aus der verticalen Bewegung in die horizontale kein Geschwindigkeitsverlust ein, was erfolgt, wenn die Ecke R abgerundet ist, so wird der Weg $RH = h\, cotg.\, \alpha$ gleichförmig und in der Zeit

$$t_2 = \frac{h\, cotg.\, \alpha}{v} = \frac{h\, cotg.\, \alpha}{\sqrt{2gh}} = \frac{1}{2}\, cotg.\, \alpha \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

durchlaufen. Die Fallzeit für die schiefe Ebene ist:

$$t = \frac{1}{sin.\, \alpha} \sqrt{\frac{2h}{g}};$$

setzen wir daher $t = t_1 + t_2$, so erhalten wir die Bestimmungsgleichung:

$$\frac{1}{sin.\, \alpha} = 1 + \frac{1}{2}\, cotg.\, \alpha \quad \text{oder} \quad \frac{tang.\, \alpha}{sin.\, \alpha} = tang.\, \alpha + \frac{1}{2},$$

deren Auflösung auf $tang.\, \alpha = \frac{3}{4}$ führt. In der entsprechenden schiefen Ebene verhält sich hiernach die Höhe zur Basis zur Länge wie 3 zu 4 zu 5, und es ist der Neigungswinkel $\alpha = 36^0 52' 11''$.

3) Bei einer schiefen Ebene von der gegebenen Basis a ist die Zeit zum Herabgleiten:

$$t = \sqrt{\frac{2s}{g\, sin.\, \alpha}} = \sqrt{\frac{2a}{g\, sin.\, \alpha\, cos.\, \alpha}} = \sqrt{\frac{4a}{g\, sin.\, 2\alpha}};$$

sie fällt daher am kleinsten aus, wenn $sin.\, 2\alpha$ am größten, d. i. $= 1$, also $2\alpha^0 = 90^0$, oder $\alpha^0 = 45^0$ ist. Von Dächern mit 45^0 Neigung fließt daher das Wasser in der kürzesten Zeit herab.

§. 317 Geht die Bewegung auf einer schiefen Ebene mit einer gewissen **Anfangsgeschwindigkeit** c vor sich, so hat man die in §. 13 und §. 14 gefundenen Formeln in Anwendung zu bringen. Hiernach ist für einen auf der schiefen Ebene hinaufsteigenden Körper die Endgeschwindigkeit:

$$v = c - g\, sin.\, \alpha\, .\, t,$$

und der zurückgelegte Weg:

$$s = ct - \frac{1}{2} g \sin. \alpha . t^2,$$

dagegen für den von der schiefen Ebene herabsinkenden Körper:

$$v = c + g \sin. \alpha . t \text{ und } s = ct + \frac{1}{2} g \sin. \alpha . t^2.$$

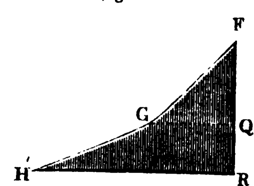
Uebrigens gilt in beiden Fällen der Bewegung die Formel:

$$s = \frac{v^2 - c^2}{2 g \sin. \alpha}, \text{ oder } s \sin. \alpha = h = \frac{v^2 - c^2}{2g} = \frac{v^2}{2g} - \frac{c^2}{2g}.$$

Es ist also stets die Verticalprojection (h) des auf der schiefen Ebene zurückgelegten Weges (s) gleich der Differenz der Geschwindigkeitshöhen.

Stoßen zwei schiefe Ebenen FGQ und GHR, Fig. 529, in einer abgerundeten Kante an einander, so findet beim Uebergang des fallenden Körpers von der einen Ebene zur anderen kein Stoß, und deshalb auch kein Geschwindigkeitsverlust statt; es gilt deshalb auch für das Herabfallen eines Körpers von dieser Verbindung zweier Ebenen die Regel: Fallhöhe (FR) gleich Differenz der Geschwindigkeitshöhen. Uebrigens ist leicht zu ermessen, daß diese Regel auch bei dem Sinken und Steigen auf einer derartigen Verbindung von beliebig vielen Ebenen, sowie beim Fallen und Aufsteigen auf krummen Linien oder Flächen ihre Richtigkeit behält (vergl. §. 85).

Fig. 529.



Beispiele. 1) Ein Körper steigt mit 21 Fuß Anfangsgeschwindigkeit auf einer schiefen Ebene von 22° Neigung hinauf, wie groß ist seine Geschwindigkeit und sein zurückgelegter Weg nach $1\frac{1}{2}$ Secunden?

Es ist die Geschwindigkeit:

$v = 21 - 31{,}25 . \sin. 22^0 . 1{,}5 = 21 - 31{,}25 . 0{,}3746 . 1{,}5 = 21 - 17{,}56$
$= 3{,}44$ Fuß,

und der Weg:

$$s = \frac{c + v}{2} \cdot t = \frac{21 + 3{,}44}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{24{,}44 . 3}{4} = 18{,}33 \text{ Fuß}.$$

2) Wie hoch erhebt sich ein Körper mit 36 Fuß Anfangsgeschwindigkeit auf der schiefen Ebene von 48° Ansteigen?

Es ist die senkrechte Höhe:

$$h = \frac{v^2}{2g} = 0{,}016 . v^2 = 0{,}016 . 36^2 = 20{,}736 \text{ Fuß}.$$

daher der ganze Weg auf der schiefen Ebene:

$$s = \frac{h}{\sin. \alpha} = \frac{20{,}736}{\sin. 48^0} = 27{,}903 \text{ Fuß}.$$

Die zur Zurücklegung desselben nöthige Zeit ist:

$$t = \frac{2 . s}{v} = \frac{2 . 27{,}903}{36} = \frac{27{,}903}{18} = 1{,}55 \text{ Secunden}.$$

Gleiten auf der geneigten Ebene mit Rücksicht auf Reibung. Die gleitende Reibung übt einen bedeutenden Einfluß auf das §. 318

Fallen und Steigen eines Körpers auf einer schiefen Ebene aus. Aus dem Gewichte G des Körpers und aus dem Neigungswinkel α der schiefen Ebene folgt der Normaldruck:

$$N = G \cos. \alpha,$$

und hieraus wieder die Reibung:

$$F = \varphi N = \varphi G \cos. \alpha.$$

Subtrahirt man diese von der Kraft $P = G \sin. \alpha$, mit welcher die Schwerkraft den Körper von der schiefen Ebene herabtreibt, so bleibt die bewegende Kraft:

$$P = G \sin. \alpha - \varphi G \cos. \alpha,$$

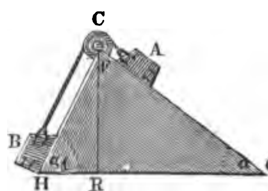
und es ergiebt sich die Beschleunigung des von der schiefen Ebene herabsinkenden Körpers:

$$p = \frac{\text{Kraft}}{\text{Masse}} = \left(\frac{G \sin. \alpha - \varphi G \cos. \alpha}{G}\right) g = (\sin. \alpha - \varphi \cos. \alpha)\ g.$$

Bei einem auf der schiefen Ebene hinaufsteigenden Körper ist die bewegende Kraft negativ und $= G \sin. \alpha + \varphi . G \cos. \alpha$, daher auch die Acceleration p negativ und $= -(\sin. \alpha + \varphi \cos. \alpha)\ g$.

Sind zwei auf verschiedenen Ebenen FG und FH, Fig. 530, befindliche Körper durch eine über eine Leitrolle C gelegte, vollkommen biegsame Schnur mit einander verbunden, so ist es möglich, daß der eine von beiden Körpern sinkt und den anderen mit emporzieht. Bezeichnen wir die Gewichte dieser Körper durch G und G_1, und die Neigungswinkel der schiefen Ebenen, auf welchen dieselben fortgleiten, durch α und α_1, und nehmen wir an, daß G sinke und G_1 mit emporziehe, so erhalten wir als bewegende Kraft:

Fig. 530.



$$P = G \sin. \alpha - G_1 \sin. \alpha_1 - \varphi G \cos. \alpha - \varphi G_1 \cos. \alpha_1$$
$$= G (\sin. \alpha - \varphi \cos. \alpha) - G_1 (\sin. \alpha_1 + \varphi \cos. \alpha_1),$$

und als bewegte Masse

$$M = \frac{G + G_1}{g},$$

daher die Acceleration, mit welcher G sinkt und G_1 steigt:

$$p = \frac{G (\sin. \alpha - \varphi \cos. \alpha) - G_1 (\sin. \alpha_1 + \varphi \cos. \alpha_1)}{G + G_1} \cdot g.$$

Da die Reibung als widerstehende Kraft keine Bewegung erzeugen kann, so ist für das Sinken von G und Steigen von G_1 nöthig, daß

$$G (\sin. \alpha - \varphi \cos. \alpha) > G_1 (\sin. \alpha_1 + \varphi \cos. \alpha_1),$$

also

$$\frac{G}{G_1} > \frac{sin.\,\alpha_1 + \varphi\,cos.\,\alpha_1}{sin.\,\alpha - \varphi\,cos.\,\alpha}, \text{ d. i. } \frac{G}{G_1} > \frac{sin.\,(\alpha_1 + \varrho)}{sin.\,(\alpha - \varrho)}$$

ist. Soll hingegen G_1 sinken und G mit emporziehen, so muß sein:

$$\frac{G_1}{G} > \frac{sin.\,\alpha + \varphi\,cos.\,\alpha}{sin.\,\alpha_1 - \varphi\,cos.\,\alpha_1}, \text{ oder:}$$

$$\frac{G}{G_1} < \frac{sin.\,\alpha_1 - \varphi\,cos.\,\alpha_1}{sin.\,\alpha + \varphi\,cos.\,\alpha}, \text{ d. i. } \frac{G}{G_1} < \frac{sin.\,(\alpha_1 - \varrho)}{sin.\,(\alpha + \varrho)}.$$

So lange aber $\frac{G}{G_1}$ innerhalb der Grenzen

$$\frac{sin.\,\alpha_1 + \varphi\,cos.\,\alpha_1}{sin.\,\alpha - \varphi\,cos.\,\alpha} \text{ und } \frac{sin.\,\alpha_1 - \varphi\,cos.\,\alpha_1}{sin.\,\alpha + \varphi\,cos.\,\alpha}, \text{ oder}$$

$$\frac{sin.\,(\alpha_1 + \varrho)}{sin.\,(\alpha - \varrho)} \text{ und } \frac{sin.\,(\alpha_1 - \varrho)}{sin.\,(\alpha + \varrho)}$$

liegt, so lange wird die Reibung jede Bewegung verhindern.

Beispiele. 1) Ein Schlitten gleitet auf einer 150 Fuß langen und 20 Grad fallenden Schneebahn herab und geht, unten angekommen, auf einer horizontalen Schneebahn fort, bis ihn die Reibung in Ruhe versetzt. Wenn nun der Coefficient der Reibung zwischen Schnee und Schlitten, $= 0{,}03$ ist, welchen Weg wird der Schlitten, ohne Rücksicht auf den Widerstand der Luft, auf der horizontalen Ebene zurücklegen?

Es ist die Acceleration des Schlittens:

$$p = (sin.\,\alpha - \varphi\,cos.\,\alpha)\,g = (sin.\,20^0 - 0{,}03\,.\,cos.\,20)\,.\,31{,}25$$
$$= (0{,}3420 - 0{,}03\,.\,0{,}9397)\,.\,31{,}25 = 0{,}3138\,.\,31{,}25 = 9{,}806 \text{ Fuß},$$

daher die Endgeschwindigkeit des Herabgleitens:

$$v = \sqrt{2ps} = \sqrt{2\,.\,9{,}806\,.\,150} = \sqrt{2941{,}8} = 54{,}24 \text{ Fuß}.$$

Auf der horizontalen Ebene ist die Acceleration:

$$p_1 = -\varphi g = -0{,}03\,.\,31{,}25 = -0{,}9375 \text{ Fuß, daher der Weg:}$$

$$s_1 = \frac{v^2}{2\varphi g} = \frac{2941{,}8}{1{,}875} = 1569 \text{ Fuß}.$$

Die Zeit zum Herabgleiten ist:

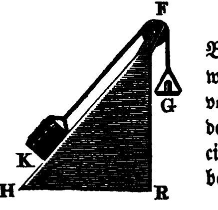
$$t = \frac{2s}{v} = \frac{300}{54{,}24} = 5{,}5 \text{ Secunden},$$

und zum Fortgleiten:

$$t_1 = \frac{2s_1}{v} = \frac{3138}{54{,}24} = 57{,}8 \text{ Secunden, daher die ganze Fahrzeit:}$$

$$t + t_1 = 63{,}3 \text{ Secunden} = 1 \text{ Minute } 3{,}3 \text{ Secunden}.$$

Fig. 531.



2) Ein gefüllter Kübel K, Fig. 531, mit 250 Pfund Bruttogewicht, soll durch ein senkrecht niederziehendes Gewicht G von 260 Pfund auf einer schiefen Ebene FH von 70 Fuß Länge und 50^0 Neigung emporgezogen werden; welche Zeit wird dazu nöthig sein, wenn der Coefficient der Reibung des Kübels auf der Leitung, 0,36 beträgt?

Es ist die bewegende Kraft:
$= G - (sin.\alpha + \varphi\ cos.\alpha) K = 260 - (sin. 50^0 + 0{,}36 . cos. 50^0) . 250$
$= 260 - 0{,}9974 . 250 = 10{,}6$ Pfund;
daher die Beschleunigung:

$$p = \frac{10{,}6}{250 + 260} = \frac{10{,}6}{510} = 0{,}0208 \text{ Fuß},$$

ferner die Zeit der Bewegung:

$$t = \sqrt{\frac{2s}{p}} = \sqrt{\frac{140}{0{,}0208}} = \sqrt{6731} = 82{,}04 \text{ Sec.} = 1 \text{ Min. } 22 \text{ Sec.},$$

und die Endgeschwindigkeit:

$$v = \frac{2s}{t} = \frac{140}{82} = 1{,}70 \text{ Fuß}.$$

§. 319 **Rollende Bewegung auf einer schiefen Ebene.** Bei einem von einer schiefen Ebene herabrollenden Wagen wirkt vorzüglich die Axenreibung der Beschleunigung entgegen; ist G das Gewicht des Wagens, r der Axen- und a der Radhalbmesser, so beträgt die Reibung:

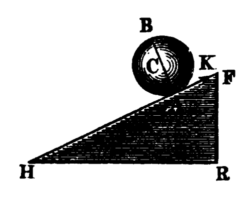
$$\frac{\varphi r}{a} N = \frac{\varphi r}{a} G\, cos.\alpha,$$

und daher die Beschleunigung:

$$p = \left(sin.\alpha - \frac{\varphi r}{a} cos.\alpha\right) g.$$

Wälzt sich ein runder Körper AB, z. B. ein Cylinder oder eine Kugel u. s. w., von einer schiefen Ebene FH, Fig. 532, herab, so hat man es mit einer progressiven und drehenden Bewegung zugleich zu thun. In der Regel ist die Acceleration p des Fortschreitens gleich der Acceleration des Drehens (§. 169); setzen wir daher das Trägheitsmoment des sich wälzenden Körpers, $= Gk^2$, und den Halbmesser CA des Wälzens, $= a$, so erhalten wir für die Kraft $\overline{AK} = K$, mit welcher die Walze in Folge des Eingreifens ihrer Theile in die Theile der schiefen Ebene in Umdrehung gesetzt wird:

Fig. 532.



$$K = p \cdot \frac{G k^2}{g a^2}.$$

Nun wirkt aber die Kraft K der Kraft $G sin.\alpha$ zum Herablaufen entgegen; es folgt daher die bewegende Kraft für die progressive Bewegung

$$P = G sin.\alpha - K,$$

und die Beschleunigung derselben:

$$p = \frac{G sin.\alpha - K}{G} \cdot g.$$

Eliminirt man K aus beiden Gleichungen, so erhält man:

$$G p = G g \sin. \alpha - \frac{G k^2}{a^2} \cdot p,$$

folglich die gesuchte Acceleration:

$$p = \frac{g \sin. \alpha}{1 + \frac{k^2}{a^2}}.$$

Bei einem sich wälzenden homogenen Cylinder ist $k^2 = \frac{1}{2} a^2$ (§. 288), daher

$$p = \frac{g \sin. \alpha}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3} g \sin. \alpha;$$

bei einer Kugel aber $k^2 = \frac{2}{5} a^2$ (§. 290), daher

$$p = \frac{g \sin. \alpha}{1 + \frac{2}{5}} = \frac{5}{7} g \sin. \alpha;$$

es ist also bei dem rollenden Cylinder die Beschleunigung nur $\frac{2}{3}$, und bei der rollenden Kugel nur $\frac{5}{7}$ mal so groß als bei einem ohne Reibung gleitenden Körper.

Die Kraft des Drehens ist:

$$K = \frac{g \sin. \alpha}{1 + \frac{k^2}{a^2}} \cdot \frac{G k^2}{g a^2} = \frac{G k^2 \sin. \alpha}{a^2 + k^2}.$$

So lange dieselbe kleiner ist als die gleitende Reibung $\varphi G \cos. \alpha$, so lange läuft auch der Körper vollkommen wälzend von der Ebene herab. Ist aber

$$K > \varphi G \cos. \alpha, \text{ d. i. } \operatorname{tang.} \alpha > \varphi \left(1 + \frac{a^2}{k^2}\right),$$

so reicht die Reibung nicht mehr aus, dem Körper eine der fortschreitenden Geschwindigkeit gleiche Umdrehungsgeschwindigkeit zu ertheilen; es ist daher dann die Acceleration des Fortschreitens wie bei der gleitenden Reibung:

$$p = \frac{G \sin. \alpha - \varphi G \cos. \alpha}{G} \cdot g = (\sin. \alpha - \varphi \cos. \alpha)\, g,$$

und die der Umdrehung:

$$p_1 = \frac{\varphi G \cos. \alpha}{G k^2 : a^2} \cdot g = \varphi \frac{a^2}{k^2} g \cos. \alpha.$$

Bei einem Wagen vom Gewichte G mit Rädern vom Halbmesser a und dem Trägheitsmomente $W_1 = G_1 k_1^2$ hat man:

$$K = p \frac{G_1 k_1^2}{g a^2} \text{ und } p = \frac{G \sin. \alpha - \varphi \frac{r}{a} G \cos. \alpha - K}{G} \cdot g,$$

d. i.:

$$p = \frac{g\left(sin.\alpha - \varphi \frac{r}{a} cos.\alpha\right)}{1 + \frac{G_1 k_1^2}{G a^2}}.$$

Beispiele. 1) Ein belasteter Wagen von 3600 Pfund Gewicht mit Rädern von 4 Fuß Höhe und 2000 Fußpfund Trägheitsmoment rollt von einer schiefen Ebene mit 12° Neigung herab; welches ist seine Acceleration, wenn der Coefficient der Axenreibung, $\varphi = 0,15$, und die Stärke der Radaxen, $2r = 3$ Zoll beträgt?

Es ist:

$$\frac{G_1 k_1^2}{G a^2} = \frac{2000}{3600 \,.\, 2^2} = \frac{5}{36} = 0,139 \text{ und } \varphi \frac{r}{a} = 0,15 \cdot \frac{1}{4\,.\,4} = 0,0094,$$

daher die gesuchte Beschleunigung:

$$p = \frac{31,25\,.\,(sin.\,12^0 - 0,0094\,.\,cos.\,12^0)}{1 + 0,139} = \frac{31,25\,.\,(0,2079 - 0,0094\,.\,0,978)}{1,139}$$

$$= \frac{31,25\,.\,0,1987}{1,139} = 5,452 \text{ Fuß}.$$

2) Mit welchen Accelerationen rollt eine massive Walze von einer schiefen Ebene herab, deren Fallwinkel $\alpha = 40^0$ beträgt?

Ist der Coefficient für die gleitende Reibung der Walze auf der Ebene, $\varphi = 0,24$ so hat man:

$$\varphi\left(1 + \frac{a^2}{k^2}\right) = 0,24\ (1 + 2) = 0,72;$$

nun ist aber $tang.\,40^0 = 0,839$; es fällt daher $tang.\,\alpha$ größer als $\varphi\left(1 + \frac{a^2}{k^2}\right)$, und die Acceleration der rollenden Bewegung kleiner als die der progressiven Bewegung aus. Die letztere ist

$$p = (sin.\,\alpha - \varphi\, cos.\,\alpha)\, g = (0,6428 - 0,24\,.\,0,7660)\,.\,31,25 = 0,459\,.\,31,25$$
$$= 14,34 \text{ Fuß},$$

die erstere aber nur

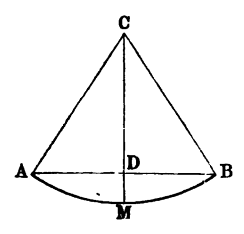
$$p_1 = 0,24\,.\,2\,.\,31,25\ cos.\,40^0 = 15\,.\,0,766 = 11,49 \text{ Fuß}.$$

§. 320 **Das Kreispendel.** Ein an einer horizontalen Axe hängender Körper ist im Gleichgewichte, so lange sein Schwerpunkt senkrecht unter der Axe liegt; bringt man aber den Schwerpunkt aus der die Axe enthaltenden Verticalebene, und überläßt man den Körper sich selbst, so nimmt derselbe eine schwingende Bewegung (franz. und engl. oscillation), d. i. eine hin- und hergehende Bewegung im Kreise, an. Im Allgemeinen heißt aber ein um eine horizontale Axe schwingender Körper ein Kreispendel oder Pendel (franz. pendule; engl. pendulum) schlechtweg. Ist der schwingende Körper ein materieller Punkt, und besteht die Verbindung desselben mit der Umdrehungsaxe in einer gewichtslosen Linie, so hat man es mit einem einfachen oder mathematischen Pendel (franz. p. simple und engl. simple p.) zu thun; besteht aber das Pendel in einem ausgedehnten Körper oder aus mehreren Körpern, so heißt dasselbe ein zusammengesetztes, physisches oder materielles Pendel (franz. pendule

composé; engl. composed pendulum). Ein solches Pendel läßt sich als eine feste Verbindung von lauter einfachen, um eine gemeinschaftliche Axe schwingenden Pendeln ansehen. Das einfache Pendel ist nur ein eingebildetes, seine Annahme gewährt aber besondere Vortheile, weil es leicht ist, die Theorie der Bewegung des zusammengesetzten Pendels auf die des einfachen Pendels zurückzuführen.

Wird das in C aufgehangene Pendel, Fig. 533, aus seiner verticalen Lage CM in die Lage CA gebracht und nun sich selbst überlassen, so geht es vermöge seiner Schwere mit einer beschleunigten Bewegung nach CM zurück, und es kommt dessen Masse im tiefsten Punkte M mit einer Geschwindigkeit c an, deren Höhe $\frac{c^2}{2g}$ der Fallhöhe DM gleich ist. In Folge dieser Geschwindigkeit durchläuft es nun auf der anderen Seite den Bogen $MB = MA$, und steigt dabei wieder auf die Höhe DM. Von B aus fällt es von Neuem nach M und A zurück, und so geht es wiederholt im Kreisbogen AB hin und her. Wäre der Widerstand der Luft und die Axenreibung ganz beseitigt, so würde diese schwingende Bewegung des Pendels ohne Ende fortgehen; weil aber diese Hindernisse nie ganz wegzubringen sind, so werden die Schwingungsbögen mit der Zeit immer kleiner und kleiner, und es geht das Pendel endlich zur Ruhe über.

Fig. 533.

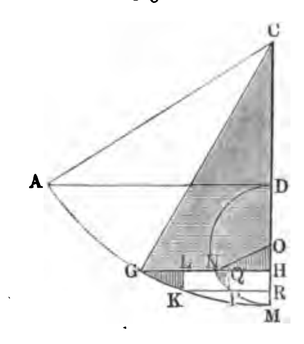


Die Bewegung des Pendels von A bis B nennt man einen **Schwung** oder **Pendelschlag** (franz. und engl. oscillation), den Bogen AB selbst aber den **Schwingungsbogen** (franz. und engl. amplitude); der den halben Schwingungsbogen messende Winkel, um welchen sich das Pendel zu beiden Seiten von der Lothlinie CM entfernt, heißt der **Elongationswinkel**, **Ausschlagswinkel** oder **Ausschlag** schlechtweg. Die Zeit, in welcher das Pendel eine Oscillation macht, heißt endlich **Schwingungszeit** oder **Schwingungsdauer** (franz. durée d'une oscillation; engl. time of oscillation).

§. 321 **Theorie des einfachen Kreispendels.** Wegen der häufigen Anwendung der Pendel im praktischen Leben, namentlich bei Uhren, ist es wichtig, die Schwingungszeiten derselben zu kennen; die Bestimmung derselben ist daher eine Hauptaufgabe der Mechanik. Setzen wir in der Absicht, diese Aufgabe zu lösen, die Pendellänge $AC = MC = r$, Fig. 534 (a. f. S.), und die einem ganzen Schwunge entsprechende Fall- oder Steighöhe $MD = h$. Nehmen wir nun an, daß das Pendel von A nach G gefallen sei, und setzen

wir die dieser Bewegung entsprechende Fallhöhe $DH = x$, so können wir die in G erlangte Geschwindigkeit

Fig. 534.



$$v = \sqrt{2gx},$$

und das Zeittheilchen, innerhalb dessen der Wegtheil GK durchlaufen wird,

$$\tau = \frac{GK}{v} = \frac{GK}{\sqrt{2gx}}$$

setzen. Beschreiben wir nun aus der Mitte O von $MD = h$ und mit dem Halbmesser $OM = OD = \frac{1}{2}h$ einen Halbkreis MND, so können wir von diesem einen Bogentheil NP angeben, welcher mit GK gleiche Höhe $PQ = KL = RH$ hat und in einfacher Beziehung zu diesem Wegtheile GK steht. Wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke GKL und CGH ist

$$\frac{GK}{KL} = \frac{CG}{GH},$$

und wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke NPQ und ONH ist

$$\frac{NP}{PQ} = \frac{ON}{NH};$$

dividiren wir daher diese beiden Proportionen durch einander und berücksichtigen wir, daß $KL = PQ$ ist, so erhalten wir das Verhältniß der genannten Bogentheile:

$$\frac{GK}{NP} = \frac{CG.NH}{GH.ON}.$$

Der Lehre vom Kreise, und insbesondere dem Theorem von der mittleren Proportionallinie zufolge ist aber

$$\overline{GH}^2 = MH\,(2\,CM - MH) \text{ und } \overline{NH}^2 = MH.DH,$$

es folgt daher:

$$\frac{GK}{NP} = \frac{CG.\sqrt{DH}}{ON.\sqrt{2\,CM - MH}} = \frac{r\sqrt{x}}{\frac{1}{2}h\sqrt{2r - (h - x)}},$$

und die Zeit zum Durchlaufen eines Wegelementes:

$$\tau = \frac{r\sqrt{x}}{\frac{1}{2}h\sqrt{2r - (h-x)}} \cdot \frac{NP}{\sqrt{2gx}} = \frac{2r}{h\sqrt{2g[2r - (h-x)]}} \cdot NP$$

$$= \sqrt{\frac{r}{g}} \frac{NP}{h\sqrt{1 - \frac{h-x}{2r}}}.$$

In den meisten Fällen der Anwendung gestattet man dem Pendel nur einen kleinen Ausschlag, und es ist deshalb $\frac{h}{2r}$, sowie $\frac{x}{2r}$, und also auch $\frac{h-x}{2r}$ eine so kleine Größe, daß wir sie selbst, sowie ihre höheren Potenzen, außer Acht lassen, und nun

$$\tau = \sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \frac{NP}{h}$$

setzen können. Die Dauer eines halben Schwunges, oder die Zeit, innerhalb welcher das Pendel den Bogen AM zurücklegt, ist gleich der Summe von allen, den Elementen GK oder NP entsprechenden Zeittheilchen, oder, da $\frac{1}{h} \cdot \sqrt{\frac{r}{g}}$ ein constanter Factor ist, gleich $\frac{1}{h}\sqrt{\frac{r}{g}}$ mal Summe aller den Halbkreis DNM bildenden Elemente, d. i. $= \frac{1}{h}\sqrt{\frac{r}{g}}$ mal Halbkreis $\left(\frac{\pi h}{2}\right)$ selbst, also

$$t_1 = \frac{1}{h}\sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \frac{\pi h}{2} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{r}{g}}.$$

Dieselbe Zeit braucht aber auch das Pendel beim Aufsteigen, weil hier die Geschwindigkeiten dieselben sind und nur in der Richtung entgegengesetzt vorkommen, und deshalb ist denn eine ganze Schwingungsdauer doppelt so groß, d. i.

$$t = 2t_1 = \pi\sqrt{\frac{r}{g}}.$$

Schärfere Formel für die Schwingungszeit des Kreispendels. (§. 322) Um die Schwingungsdauer mit größerer Genauigkeit zu bestimmen, welches zumal bei größeren Schwingungswinkeln nothwendig ist, verwandeln wir den Ausdruck:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{h-x}{2r}}} = \left(1 - \frac{h-x}{2r}\right)^{-1/2}$$

in die Reihe:

$$1 + 1/2 \cdot \frac{h-x}{2r} + 3/8 \cdot \left(\frac{h-x}{2r}\right)^2 + \cdots,$$

so daß wir die Zeit für ein Wegelement:

$$\tau = \left[1 + 1/2 \cdot \frac{h-x}{2r} + 3/8 \cdot \left(\frac{h-x}{2r}\right)^2 + \cdots\right]\sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \frac{NP}{h}$$

erhalten.

Setzen wir den Centriwinkel $DON = \varphi^0$, also den Bogen

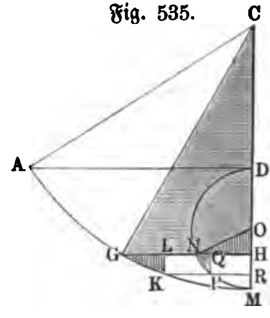


Fig. 535.

$$DN = \overline{DO} \,.\, \varphi = \frac{h\varphi}{2},$$

so erhalten wir die Höhe

$$MH = h - x = MO - HO = \frac{h}{2} + \frac{h}{2} \cos.\varphi = (1 + \cos.\varphi)\frac{h}{2};$$

daher das Zeitelement:

$$\tau = \left[1 + \tfrac{1}{2}\,.\,(1+\cos.\varphi)\frac{h}{4r} + \tfrac{3}{8}(1+\cos.\varphi)^2\left(\frac{h}{4r}\right)^2 + \cdots\right]\sqrt{\frac{r}{g}}\cdot\frac{NP}{h}$$ oder da

$$(1+\cos.\varphi)^2 = 1 + 2\cos.\varphi + (\cos.\varphi)^2 = 1 + 2\cos.\varphi + \frac{1+\cos.2\varphi}{2}$$
$$= \tfrac{3}{2} + 2\cos.\varphi + \tfrac{1}{2}\cos.2\varphi$$ ist,

$$\tau = \left[1 + \tfrac{1}{2}(1+\cos.\varphi)\frac{h}{4r} + \tfrac{3}{8}(\tfrac{3}{2} + 2\cos.\varphi + \tfrac{1}{2}\cos.2\varphi)\left(\frac{h}{4r}\right)^2 + \cdots\right]\sqrt{\frac{r}{g}}\cdot\frac{NP}{h}$$

$$= \left[1 + \tfrac{1}{2}\frac{h}{4r} + \tfrac{9}{16}\left(\frac{h}{4r}\right)^2 + \cdots + \left(\tfrac{1}{2}\frac{h}{4r} + \tfrac{3}{4}\left(\frac{h}{4r}\right)^2 + \cdots\right)\cos.\varphi + (\tfrac{3}{16}+\cdots)\left(\frac{h}{4r}\right)^2\cos.2\varphi + \cdots\right]\sqrt{\frac{r}{g}}\cdot\frac{NP}{h}$$

$$= \left(\left[1 + \tfrac{1}{2}\frac{h}{4r} + \tfrac{9}{16}\left(\frac{h}{4r}\right)^2 + \cdots\right]\frac{NP}{h} + \left[\tfrac{1}{2}\frac{h}{4r} + \tfrac{3}{4}\left(\frac{h}{4r}\right)^2 + \cdots\right] \cdot \frac{\overline{NP}\cos.\varphi}{h} + (\tfrac{3}{16}+\cdots)\left(\frac{h}{4r}\right)^2\frac{\overline{NP}\cos.2\varphi}{h}\right)\sqrt{\frac{r}{g}}.$$

Nun ist aber die Summe aller Elemente NP = Bogen $DNP = \frac{\varphi h}{2}$, ferner $\overline{NP}\cos.\varphi = NQ$, und die Summe aller NQ = Ordinate $NH = \frac{h}{2}\sin.\varphi$, sowie die Summe aller $\frac{2\overline{NP}\cos.2\varphi}{h} = \sin.2\varphi$, daher läßt sich die Fallzeit des Bogens AG:

$$t_1 = \left(\left[1 + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{h}{4r} + \tfrac{9}{16}\left(\frac{h}{4r}\right)^2 + \cdots\right]\varphi + \left[\tfrac{1}{2}\frac{h}{4r} + \tfrac{3}{4}\left(\frac{h}{4r}\right)^2 + \cdots\right]\sin.\varphi + (\tfrac{3}{16}+\cdots)\left(\frac{h}{4r}\right)^2\frac{\sin.2\varphi}{2}\right)\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{g}}$$ setzen.

Die Zeit zum Durchlaufen des Bogens AM ist, da hier $\varphi = \pi$, $sin.\,\varphi = sin.\,\pi$, sowie $sin.\,2\,\varphi = sin.\,2\,\pi, = 0$ wird,

$$t_1 = \left[1 + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{h}{4\,r} + \tfrac{3}{8} \cdot \tfrac{3}{2} \cdot \left(\frac{h}{4\,r}\right)^2 + \cdots\right] \pi \,.\, \tfrac{1}{2} \sqrt{\frac{r}{g}}$$

$$= \left[1 + (\tfrac{1}{2})^2 \cdot \frac{h}{2\,r} + \left(\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\right)^2 \cdot \left(\frac{h}{2\,r}\right)^2 + \cdots\right] \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{r}{g}}.$$

Da die Geschwindigkeit beim Steigen auf der anderen Seite genau so abnimmt, wie sie beim Durchfallen der Bogenhälfte AM wächst, so ist die Zeit zum Durchlaufen des ganzen Bogens, oder die sogenannte Schwingungsdauer:

$$t = 2\,t_1 = \left[1 + (\tfrac{1}{2})^2\, \frac{h}{2r} + \left(\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\right)^2 \left(\frac{h}{2\,r}\right)^2 + \left(\frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\right)^2 \left(\frac{h}{2\,r}\right)^3 + \cdots\right] \pi \sqrt{\frac{r}{g}}.$$

Schwingt das Pendel im Halbkreise, so hat man $h = r$, und daher die Schwingungszeit:

$$t = \left(1 + \tfrac{1}{8} + \frac{9}{256} + \frac{225}{18432} + \cdots\right) \pi \sqrt{\frac{r}{g}} = 1{,}180\,\pi \sqrt{\frac{r}{g}}.$$

In den meisten Fällen der Anwendung ist der Schwingungsbogen viel kleiner als der Halbkreis, und die Formel

$$t = \left(1 + \frac{h}{8\,r}\right) \pi \sqrt{\frac{r}{g}}$$

hinreichend genau.

Aus dem Elongationswinkel α folgt $cos.\,\alpha = \dfrac{r - h}{r} = 1 - \dfrac{h}{r}$, also $\dfrac{h}{r} = 1 - cos.\,\alpha$, und daher:

$$\frac{h}{8\,r} = \tfrac{1}{4} \cdot \frac{1 - cos.\,\alpha}{2} = \tfrac{1}{4} \left(sin.\,\frac{\alpha}{2}\right)^2;$$

es läßt sich folglich hiernach die einem gegebenen Elongationswinkel entsprechende Correction der Schwingungszeit finden. Ist z. B. dieser Winkel $\alpha = 15^0$, so hat man:

$$\frac{h}{8\,r} = \tfrac{1}{4} \left(sin.\,\frac{15^0}{2}\right)^2 = 0{,}00426,$$

dagegen für $\alpha = 5^0$:

$$\frac{h}{8\,r} = 0{,}00047;$$

bei dem letzten Elongationswinkel ist also die Schwingungsdauer:

$$t = 1{,}00047\,.\,\pi \sqrt{\frac{r}{g}}.$$

Man kann also bei einem Ausschlag unter 5° ziemlich genau die Schwingungsdauer

$$t = \pi \sqrt{\frac{r}{g}} = \frac{\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{r} = 0{,}562 \sqrt{r}$$

setzen.

§. 323 **Pendellängen.** Da in der Formel

$$t = \pi \sqrt{\frac{r}{g}}$$

der Ausschlagswinkel nicht vorkommt, so folgt auch, daß die Dauer kleiner Pendelschwingungen gar nicht von diesem Winkel abhängt, daß also verschiedene, jedoch nicht weit ausschlagende gleich lange Pendel isochron schwingen oder gleiche Schwingungszeiten haben. Ein Pendel mit 4 Grad Ausschlag hat also (fast) dieselbe Schwingungsdauer, als ein Pendel mit 1 Grad Ausschlag.

Vergleichen wir die Schwingungsdauer t mit der Zeit t_1 des freien Falles, so stoßen wir auf Folgendes. Die Zeit zum freien Fallen von der Höhe r ist

$$t_1 = \sqrt{\frac{2r}{g}} = \sqrt{2} \,.\, \sqrt{\frac{r}{g}},$$

daher folgt

$$t : t_1 = \pi : \sqrt{2};$$

die Zeit eines Pendelschwunges verhält sich also zur Zeit, in welcher ein Körper von einer der Pendellänge gleichen Höhe frei herabfällt, wie die Ludolph'sche Zahl π zur Quadratwurzel aus 2. Die Zeit zum Durchfallen von $2r$ ist

$$t_1 = \sqrt{\frac{2 \,.\, 2r}{g}} = 2 \sqrt{\frac{r}{g}};$$

daher verhält sich auch die Schwingungsdauer zur Zeit des Fallens von einer der doppelten Pendellänge gleichen Höhe wie π zu 2.

Setzen wir die den Pendellängen r und r_1 entsprechenden Schwingungszeiten t und t_1, so erhalten wir:

$$t : t_1 = \sqrt{r} : \sqrt{r_1};$$

es verhalten sich also bei einer und derselben Beschleunigung der Schwere die Schwingungszeiten wie die Quadratwurzeln aus den Pendellängen. Ist dagegen n die Zahl der Schwingungen, welche das eine Pendel in einer gewissen Zeit, z. B. in der Minute, macht, und n_1 die Zahl, welche in derselben Zeit vom anderen Pendel gemacht werden, so hat man:

$$t : t_1 = \frac{1}{n} : \frac{1}{n_1},$$

daher umgekehrt:

$$n : n_1 = \sqrt{r_1} : \sqrt{r},$$

d. h. die Schwingungszahlen verhalten sich umgekehrt, wie die Quadratwurzeln aus den Pendellängen. Das viermal so lange Pendel giebt also die halbe Schwingungszahl.

Ein Pendel heißt ein Secundenpendel (franz. pendule à seconde; engl. seconds pendulum), wenn seine Schwingungsdauer eine Secunde beträgt. Setzen wir in der Formel $t = \pi \sqrt{\frac{r}{g}}$, $t = 1$, so bekommen wir die Länge des Secundenpendels, $r = \frac{g}{\pi^2}$, für das preußische Fußmaß

$$r = 3{,}1662 \text{ Fuß} = 38 \text{ Zoll};$$

für das Metermaß aber

$$r = 0{,}9938 \text{ Meter}.$$

Aus der Formel $t = \pi \sqrt{\frac{r}{g}}$ folgt durch Umkehrung, $g = \left(\frac{\pi}{t}\right)^2 r$; es läßt sich also hiernach aus der Länge r eines Pendels und aus der Schwingungsdauer t desselben die Beschleunigung g der Schwere finden. Diese Methode ist sogar einfacher und sicherer als die Anwendung der Atwood'schen Fallmaschine.

Anmerkung. Durch Pendelbeobachtungen hat man auch die Abnahme der Schwerkraft, von den Polen nach dem Aequator zu, nachgewiesen und deren Größe bestimmt. Diese Abnahme hat ihren Grund in dem Einflusse der Centrifugalkraft, welche aus der täglichen Umdrehung der Erde um ihre eigene Axe entspringt, sowie in der Zunahme der Erdhalbmesser von den Polen nach dem Aequator zu. Die Centrifugalkraft vermindert z. B. im Aequator die Schwere um $\frac{1}{290}$ ihres Werthes (§. 302), während sie unter den Polen selbst Null ist. Ist β die geographische Breite des Beobachtungsortes, so hat man, Pendelbeobachtungen zufolge, an diesem Orte die Acceleration der Schwere:

$$g = 9{,}8056\,(1 - 0{,}00259\,\cos. 2\beta) \text{ in Metern},$$

also unter dem Aequator, wo $\beta = 0$, also $\cos. 2\beta = 1$ ist,

$$g = 9{,}8056\,(1 - 0{,}00259) = 9{,}780 \text{ Meter},$$

und unter den Polen, wo $\beta = 90^0$, also $\cos. 2\beta = \cos. 180^0 = -1$ ist,

$$g = 9{,}8056 \,.\, 1{,}00259 = 9{,}831 \text{ Meter}.$$

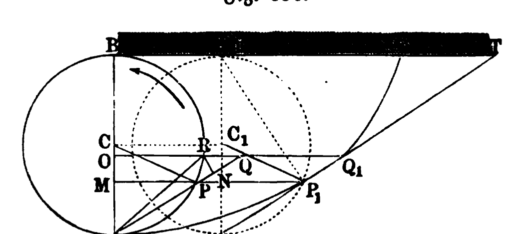
Uebrigens ist g auf Bergen kleiner als im Niveau des Meeres.

§. 324 **Cycloide.** Man kann auf unendlich mannigfaltige Weise einen Körper in Schwingungen oder hin- und hergehende Bewegungen versetzen, nennt wohl auch jeden in einem dieser Bewegungszustände befindlichen Körper ein Pendel, und unterscheidet hiernach verschiedene Arten von Pendeln, wie z. B. das Kreispendel, welches wir im Vorstehenden betrachtet haben, ferner das Cycloidenpendel, wo der Körper in Folge seiner Schwere in einem Cycloidenbogen hin- und herschwingt, ferner das Torsionspen-

del, wo der Körper in Folge der Torsion eines Fadens oder Drahtes schwingt, u. s. w. Hier möge nur noch vom Cycloidenpendel die Rede sein.

Die Cycloide (franz. cycloide; engl. cycloid) AP_1D, Fig. 536, ist eine krumme Linie, welche von jedem Punkte A eines Kreises APB beschrieben wird, der sich auf einer geraden Linie BD wälzt. Hat sich dieser Erzeugungskreis um $BB_1 = CC_1$ fortgewälzt, ist er also in die Lage $A_1 B_1$ gekommen, so hat er sich auch um den Bogen $AP = A_1 P_1 = BB_1 = PP_1$ gedreht, es ist folglich die irgend einer Abscisse AM entsprechende Ordinate MP_1 = Ordinate MP des Kreises plus Drehungsbogen AP. Bei diesem Wälzen dreht sich der Erzeugungskreis um den jedesmaligen Berührungspunkt in der Grundlinie BD, steht er also in $A_1 B_1$, so dreht er sich um B_1 und beschreibt dadurch das Bogenelement $P_1 Q_1$ der Cycloide; es ist folglich die Sehne $B_1 P_1$ die Richtung der Normale, und die Sehne $A_1 P_1$ die der Tangente $P_1 T$ im Punkte P_1 der Cycloide. Die bis zur Ordinate $O Q_1$ reichende Verlängerung PQ der Sehne AP ist auch gleich dem Cycloidenelemente $P_1 Q_1$; da ferner der Weg PR des Drehens gleich ist dem Wege RQ des Fortschreitens, so ist PQ Grundlinie eines gleichschenkeligen Dreieckes PRQ und gleich der doppelten Linie PN, welche das Perpendikel RN abschneidet; endlich ist aber PN die Differenz von zwei benachbarten Sehnen AR und AP, und folglich das Cycloidenelement $P_1 Q_1$ = der doppelten Sehnendifferenz $(AR - AP)$. Da die stetig auf einander folgenden Bogenelemente zusammen einen ganzen Bogen AP_1, und ebenso die sämmtlichen Sehnendifferenzen die ganze Sehne AP ausmachen, so ist hiernach die Länge des Cycloidenbogens AP_1 gleich dem Doppelten der ihm zugehörigen Kreissehne AP. Der halben Cycloide $AP_1 D$ entspricht der Durchmesser als Kreissehne; es ist daher die Länge der halben Cycloide gleich dem doppelten Durchmesser ($2\,AB$) des Erzeugungskreises.

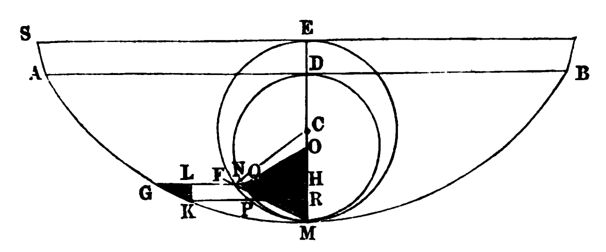
Fig. 536.



§. 325 **Cycloidenpendel.** Aus den im Vorstehenden entdeckten Eigenschaften der Cycloide läßt sich nun die Theorie des Cycloidenpendels, oder die Formel für die Zeit der Schwingung eines Körpers in einem Cycloidenbogen leicht entwickeln. Es sei AKM, Fig. 537, die Hälfte des Cycloidenbogens, in

welchem ein Körper fällt und steigt oder oscillirt, und ME sei der Erzeugungskreis, also $CE = CM = r$ der Halbmesser desselben. Hat der

Fig. 537.



Körper den Bogen AG durchlaufen, ist er also von der Höhe $DH = x$ herabgefallen (vergl. §. 321), so hat er die Geschwindigkeit $v = \sqrt{2gx}$ erlangt, mit welcher er das Bogenelement GK in der Zeit

$$\tau = \frac{GK}{v} = \frac{GK}{\sqrt{2gx}}$$

durchläuft. Wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke GLK und FHM ist aber

$$\frac{GK}{KL} = \frac{FM}{MH},$$

oder, da $\overline{FM}^2 = MH.ME$,

$$\frac{GK}{KL} = \frac{\sqrt{MH.ME}}{MH} = \frac{\sqrt{ME}}{\sqrt{MH}};$$

wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke NPQ und ONH ist

$$\frac{NP}{PQ} = \frac{ON}{NH},$$

oder, da $\overline{NH}^2 = MH.DH$,

$$\frac{NP}{PQ} = \frac{ON}{\sqrt{MH.DH}}.$$

Nun ist $KL = PQ$, daher folgt durch Division:

$$\frac{GK}{NP} = \frac{\sqrt{ME}}{\sqrt{MH}} \cdot \frac{\sqrt{MH.DH}}{ON} = \frac{\sqrt{ME.DH}}{ON},$$

oder, da ON die halbe Fallhöhe $= \frac{h}{2}$, $ME = 2r$ und $DH = x$ ist,

$$\frac{GK}{NP} = \frac{\sqrt{2rx}}{{}^1/_2 h} = \frac{2\sqrt{2rx}}{h}.$$

Setzt man nun $GK = \frac{2\sqrt{2rx}}{h} \cdot \overline{NP}$ in die Formel $\tau = \frac{GK}{\sqrt{2gx}}$, so erhält man:

$$\tau = \frac{2\sqrt{2rx}}{\sqrt{2gx}.h} \cdot NP = \frac{2}{h}\sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \overline{NP}.$$

Die Zeit des Fallens von A bis M ist nun die Summe aller Werthe von τ, welche man erhält, wenn man für NP nach und nach alle Theile des Halbkreises DNM einführt, also

$$= \frac{2}{h}\sqrt{\frac{r}{g}} \text{ mal Halbkreis } DNM\left(\frac{\pi}{2}h\right).$$

Auf diese Weise erhält man die Zeit zum Durchfallen des Bogens AM:

$$t_1 = \frac{\pi}{2}h \cdot \frac{2}{h}\sqrt{\frac{r}{g}} = \pi\sqrt{\frac{r}{g}},$$

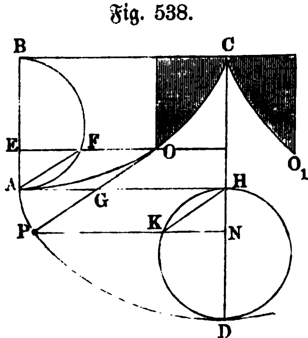
und da die Zeit des Steigens im Bogen MB ebenso groß ist, die Schwingungszeit oder Zeit zum Durchlaufen des ganzen Bogens AMB:

$$t = 2t_1 = 2\pi\sqrt{\frac{r}{g}} = \pi\sqrt{\frac{4r}{g}}.$$

Da diese Größe ganz unabhängig ist von der Bogenlänge, so folgt, daß mathematisch genau die Schwingungszeiten für alle Bögen einer und derselben Cycloide gleich sind, das Cycloidenpendel also vollkommen isochron schwingt. Vergleichen wir diese Formel mit der Formel für die Schwingungsdauer eines Kreispendels, so folgt, daß die Schwingungszeiten für beide Pendelarten einander gleich sind, wenn die Länge des Kreispendels gleich ist dem vierfachen Halbmesser von dem Erzeugungskreise des Cycloidenpendels.

Anmerkung. Um einen an einem biegsamen Faden hängenden Körper in einem Cycloidenbogen schwingen lassen zu können und dadurch ein Cycloidenpendel herzustellen, hängt man denselben zwischen zwei Cycloidenbögen CO und CO_1, Fig. 538, auf, so daß sich der Faden bei jedem Ausschlage von dem einen Bogen ab- und auf den anderen aufwickelt. Daß bei diesem Ab- und Aufwickeln des Fadens COP der Endpunkt P desselben eine der gegebenen Cycloide gleiche Curve beschreibt, daß also die Evolvente der Cycloide eine gleiche Cycloide in umgekehrter Lage ist, läßt sich einfach so darthun. So wie die Länge der halben Cycloide $COA = CD = 2AB$ ist, ebenso hat man den Bogen $OA =$ der abgewickelten Geraden OP; aber Bogen OA ist $=$ zweimal Sehne $AF = 2GO$, daher auch $PG = GO = AF$

Fig. 538.



und $HN = AE$. Beschreibt man nun über $DH = AB$ einen Halbkreis DKH, und zieht man die Ordinate NP, so hat man $KH = P G$, und daher auch

$PK = GH = AH - AG = AH - FO =$ Bog. AFB — Bog. AF
$=$ Bog. $BF =$ Bog. DK,

und endlich die Ordinate $NP =$ Kreisordinate NK plus entsprechender Bogen DK; es ist also NP die Ordinate einer Cycloide DPA, welche dem Erzeugungskreise DKH entspricht.

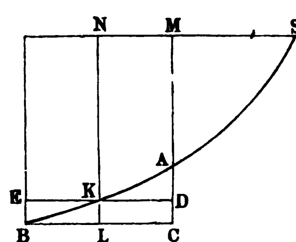
Ueber die Anwendung des Cycloidenpendels bei Uhren s. „Jahrbücher des polytechn. Institutes in Wien", Bd. 20, Art. II. Auch Prechtl's technologische Encyklopädie, Bd. 19.

Die Curve der kürzesten Fallzeit. Es läßt sich mittels des (§. 326) höheren Calcüls nachweisen, daß die Cycloide außer dieser Eigenschaft des Isochronismus oder Tautochronismus auch noch die des Brachystochronismus besitzt, daß sie nämlich diejenige Linie zwischen zwei gegebenen Punkten ist, in welcher ein Körper in der kürzesten Zeit von dem einen Punkte nach dem anderen herabfällt.

Der Beweis hierzu läßt sich, nach Jacob Bernoulli, auf folgende Weise führen.

Es sei die relative Lage zweier Punkte A und B, Fig. 539, durch den verticalen Abstand $AC = a$ und den horizontalen Abstand $BC = b$ und die einer horizontalen Linie DE durch den verticalen Abstand $AD = h$ gegeben; man sucht den Punkt K, in welchem ein von A nach B fallender Körper die Linie DE durchschneiden muß, um in der kürzesten Zeit von A nach B zu gelangen. Kommt der Körper in A mit der Geschwindigkeit v an, so ist die Geschwindigkeit in K:

Fig. 539.



$$v_1 = \sqrt{v^2 + 2gh};$$

setzen wir nun voraus, daß die Punkte A, K und B einander unendlich nahe liegen, oder daß a, b und h sehr klein sind gegen v, so können wir auch annehmen, daß AK gleichförmig mit der Geschwindigkeit v, und KB gleichförmig mit der Geschwindigkeit v_1 durchlaufen werde, daß also die Zeit zum Durchfallen des Weges AKB,

$$t = \frac{AK}{v} + \frac{KB}{v_1} \text{ sei.}$$

Bezeichnen wir DK durch z, so haben wir:

$$AK = \sqrt{h^2 + z^2} \text{ und } KB = \sqrt{(a-h)^2 + (b-z)^2},$$

und daher:

$$t = \frac{\sqrt{h^2 + z^2}}{v} + \frac{\sqrt{(a-h)^2 + (b-z)^2}}{v_1}.$$

Diese Zeit wird nun ein Minimum, wenn wir ihr erstes Differentialverhältniß, d. i.

$$\frac{\partial t}{\partial z} = \frac{z}{v\sqrt{h^2+z^2}} - \frac{b-z}{v_1\sqrt{(a-h)^2+(b-z)^2}} = \text{Null}$$

setzen.

Nun ist aber

$$\frac{z}{\sqrt{h^2+z^2}} = \frac{KD}{KA} = cos.\, AKD = cos.\, \varphi$$

und

$$\frac{b-z}{\sqrt{(a-h)^2+(b-z)^2}} = \frac{BL}{BK} = cos.\, KBL = cos.\, \varphi_1,$$

wofern wir die Neigungswinkel der Wege AK und KB gegen den Horizont mit φ und φ_1 bezeichnen; daher erhalten wir als Bedingungsgleichung

$$\frac{cos.\, \varphi}{v} = \frac{cos.\, \varphi_1}{v_1}.$$

Setzen wir die den Geschwindigkeiten v und v_1 entsprechenden Fallhöhen $MA = y$ und $NK = y_1$, also

$$v = \sqrt{2gy} \text{ und } v_1 = \sqrt{2gy_1},$$

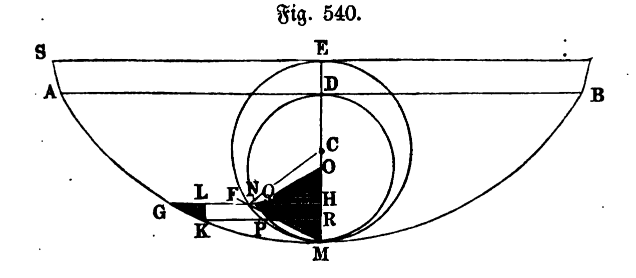
so geht unsere Gleichung in folgende

$$\frac{cos.\, \varphi}{\sqrt{y}} = \frac{cos.\, \varphi_1}{\sqrt{y_1}}$$

über, und wenden wir nun unseren Fall auf das Fallen in einer krummlinigen Bahn $SAKB$ an, so folgt hiernach, daß für jede Stelle in dieser Curve der Quotient $\frac{cos.\, \varphi}{\sqrt{y}}$ eine constante Zahl, etwa $= \frac{1}{\sqrt{2r}}$ ist.

Diese Eigenschaft entspricht aber einer Cycloide SGM, Fig. 540, denn es ist für ein Wegelement GK dieser Curve:

Fig. 540.



$$\cos.\varphi = \frac{GL}{GK} = \frac{FH}{FM} = \frac{\sqrt{MH.EH}}{\sqrt{MH.EM}} = \sqrt{\frac{EH}{EM}} = \sqrt{\frac{y}{2r}},$$

und daher:

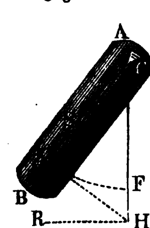
$$\frac{\cos.\varphi}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{2r}},$$

wobei r den Halbmesser $CM = CE$ des Erzeugungskreises EFM bezeichnet.

Es ist also ein Cycloidenbogen SG derjenige, in welchem ein Körper in der kürzesten Zeit von einem Punkte S nach einem anderen G herabfällt.

Das materielle Pendel. Um die Schwingungszeit eines zusammengesetzten Pendels oder irgend eines um eine horizontale Axe C schwingenden Körpers AB, Fig. 541, zu finden, suchen wir zunächst den Mittelpunkt des Schwunges oder Schwingungspunkt (franz. centre d'oscillation; engl. center of oscillation), d. i. denjenigen Punkt K des Körpers auf, welcher, wenn er für sich allein um C schwingt oder ein mathematisches Pendel ausmacht, dieselbe Schwingungsdauer hat wie der ganze Körper. Man sieht leicht ein, daß es dieser Erklärung zufolge mehrere Schwingungspunkte in einem Körper giebt; gewöhnlich meint man aber nur denjenigen von ihnen, welcher mit dem Schwerpunkte in einem und demselben Perpendikel zur Umdrehungsaxe liegt. §. 327

Fig. 541.



Aus dem veränderlichen Ausschlagswinkel $KCF = \varphi$ folgt die Beschleunigung des isolirten Punktes K:

$$= g \sin.\varphi,$$

weil man sich vorstellen kann, daß derselbe von einer schiefen Ebene mit der Neigung $KHR = KCF = \varphi$ herabgleitet. Ist aber Mk^2 das Trägheitsmoment des ganzen Körpers oder der Körperverbindung AB, Ms dessen statisches Moment, d. i. das Product aus der Masse und aus dem Abstande $CS = s$ ihres Schwerpunktes S von der Umdrehungsaxe C, und r die Entfernung CK des Schwingungspunktes K von der Umdrehungsaxe oder die Länge des einfachen Pendels, welches mit dem materiellen Pendel AB isochron schwingt, so hat man die auf K reducirte Masse:

$$= \frac{Mk^2}{r^2},$$

und die dahin reducirte Umdrehungskraft:

$$= \frac{s}{r} Mg \sin.\varphi;$$

folglich die Beschleunigung:

$$p = \frac{\text{Kraft}}{\text{Masse}} = \frac{s}{r} Mg \, sin. \varphi : \frac{Mk^2}{r^2} = \frac{Msr}{Mk^2} \cdot g \, sin. \varphi.$$

Damit dieses Pendel mit dem mathematischen einerlei Schwingungsdauer habe, ist nöthig, daß beide an jeder Stelle ihrer Bewegung einerlei Beschleunigung besitzen, daß also

$$\frac{Msr}{Mk^2} \cdot g \, sin. \varphi = g \, sin. \varphi$$

sei. Diese Gleichung giebt nun

$$r = \frac{Mk^2}{Ms} = \frac{\text{Trägheitsmoment}}{\text{statisches Moment}}.$$

Man findet also die Entfernung des Schwingungspunktes vom Drehungspunkte, oder die Länge des einfachen Pendels, welches mit dem zusammengesetzten gleiche Schwingungsdauer hat, wenn man das Trägheitsmoment des zusammengesetzten Pendels durch sein statisches oder Gewichtsmoment dividirt.

Setzt man diesen Werth von r in die Formel $t = \pi \sqrt{\frac{r}{g}}$, so erhält man für die Schwingungsdauer eines zusammengesetzten Pendels die Formel:

$$t = \pi \sqrt{\frac{Mk^2}{Mgs}} = \pi \sqrt{\frac{k^2}{gs}},$$

oder genauer:

$$t = \pi \left(1 + \frac{h}{8r}\right) \sqrt{\frac{k^2}{gs}}.$$

Umgekehrt läßt sich aus der Schwingungsdauer eines aufgehängten Körpers sein Trägheitsmoment finden, indem man setzt:

$$Mk^2 = \left(\frac{t}{\pi}\right)^2 \cdot Mgs \quad \text{oder} \quad k^2 = \left(\frac{t}{\pi}\right)^2 gs.$$

Anmerkung 1. Um das Trägheitsmoment Mk^2 eines Körpers aus der Schwingungsdauer desselben bestimmen zu können, ist nöthig, daß man das statische Moment $Mgs = Gs$ desselben kenne. Das letztere findet man dadurch, daß man den Körper AC, Fig. 542, durch ein Seil ABD aus seiner Gleichgewichtslage bringt, welches über eine Leitrolle gelegt und durch Gewichte P gespannt wird. Das Perpendikel CN von der Drehungsaxe C gegen die Richtung des Seiles AB ist der Hebelarm a des Gewichtes P, und Pa ist gleich dem Momente $G . \overline{CH}$ des im Schwerpunkte S niederziehenden Gewichtes G. Bezeichnet α den Winkel $VCS = CSH$, um welchen der Körper durch die Kraft P gehoben wird, so hat man noch:

$$\overline{CH} = \overline{CS} \, sin. \alpha = s \, sin. \alpha,$$

folglich:

$$Gs \, sin. \alpha = Pa,$$

und das gesuchte statische Moment:

$$Gs = \frac{Pa}{sin. \alpha}.$$

Anmerkung 2. Ein sehr einfaches und brauchbares Pendel ADF, Fig. 543, besteht in einer Bleikugel A von ungefähr 1 Zoll Durchmesser, und in einem

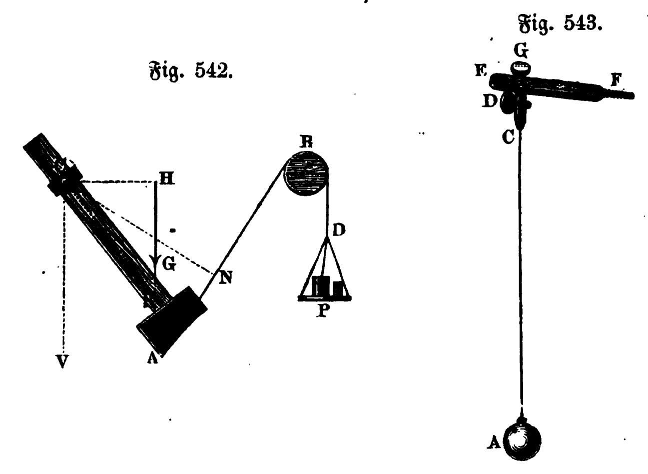


Fig. 542.

Fig. 543.

seidenen Faden, dessen oberes Ende C von einer Zwinge D mit einer Preßschraube festgehalten wird. Diese Zwinge wird durch einen Arm EF gesteckt und mit demselben durch eine Schraube G fest verbunden, nachdem man ihn mittels seines schraubenförmig zugeschnittenen Endes F in einen Thürstock oder einen anderen festen Punkt eingebohrt hat. Bei einer Länge $CA = 0{,}2485$, also nahe $^1/_4$ Meter, schlägt dieses Pendel halbe Secunden, und zwar fast eine Stunde lang, wiewohl in immer kleineren und kleineren Bögen.

Beispiele. 1) Für eine gleichförmig dichte prismatische Stange AB, Fig. 544, deren Drehpunkt C um $CA = l_1$ und $CB = l_2$ von den Enden A und B absteht, hat man, wenn F den Querschnitt dieser Stange bezeichnet, das Trägheitsmoment nach §. 286:

$$Mk^2 = \frac{1}{3} F (l_1^3 + l_2^3),$$

und das statische Moment:

$$Ms = \frac{1}{2} F (l_1^2 - l_2^2);$$

es ist daher die Länge des mathematischen Pendels, welches mit dieser Stange isochron schwingt:

Fig. 544.

B

A

$$r = \frac{Mk^2}{Ms} = \frac{2}{3} \cdot \frac{l_1^3 + l_2^3}{l_1^2 - l_2^2} = \frac{l^2 + 3d^2}{6d},$$

wenn l die Summe $l_1 + l_2$, und d die Differenz $l_1 - l_2$ bezeichnet. Soll diese Stange halbe Secunden schlagen, so hat man:

$$r = \frac{1}{4} \cdot \frac{g}{\pi^2} = \frac{1}{4} \cdot 38 = 9{,}5 \text{ Zoll},$$

beträgt aber die ganze Länge l der Stange 12 Zoll, so ist zu setzen

$$9{,}5 = \frac{144 + 3d^2}{6d} \text{ oder } d^2 - 19d = -48,$$

es folgt daher:

$$d = \frac{19 - \sqrt{169}}{2} = 3,$$

und hieraus:

$l_1 = \frac{l + d}{2} = {^{15}/_2} = 7^1/_2$ Zoll, sowie $l_2 = \frac{l - d}{2} = {^9/_2} = 4^1/_2$ Zoll.

2) Für ein Pendel mit kugelförmiger Linse AB, Fig. 545, ist, wenn G das Gewicht und l die Länge CA der Stange oder des Fadens, dagegen K das Gewicht der Kugel und r_1 ihren Halbmesser $MA = MB$ bezeichnet:

Fig. 545.

$$r = \frac{{^1/_3}\, G l^2 + K[(l + r_1)^2 + {^2/_5}\, r_1^2]}{{^1/_2}\, G l + K\,(l + r_1)}.$$

Wiegt nun der Draht 0,05 Pfund und die Kugel 1,5 Pfund, ist ferner die Länge des Drahtes 1 Fuß, und der Halbmesser der Kugel 1,15 Zoll, so hat man die Entfernung des Schwingungspunktes dieses Pendels von der Drehungsaxe:

$$r = \frac{{^1/_3} \cdot 0{,}05 \cdot 12^2 + 1{,}5 \cdot (13{,}15^2 + {^2/_5} \cdot 1{,}15^2)}{{^1/_2} \cdot 0{,}05 \cdot 12 + 1{,}5 \cdot 13{,}15} = \frac{2{,}4 + 260{,}177}{0{,}3 + 19{,}725}$$

$$= \frac{262{,}577}{20{,}025} = 13{,}112 \text{ Zoll}.$$

Ohne Rücksicht auf den Draht wäre $r = \frac{260{,}177}{19{,}725} = 13{,}190$ Zoll; und die träge Masse der Kugel, in ihrem Centro angenommen, wäre $r = 13{,}15$ Zoll. Die Schwingungszeit dieser Kugel ist:

$$t = \pi \sqrt{\frac{r}{g}} = 0{,}562 \sqrt{\frac{13{,}112}{12}} = 0{,}562 \sqrt{1{,}0926} \ldots = 0{,}5874 \text{ Secunden}.$$

§. 328 **Reciprocität des Aufhängepunktes und des Schwingungspunktes.** Der Aufhängepunkt und der Schwingungspunkt eines materiellen Pendels sind wechselseitig (franz. réciproque; engl. reciprocal), d. h. es kann der eine mit dem anderen vertauscht, also das Pendel im Schwingungspunkte aufgehangen werden, ohne daß die Schwingungszeit eine andere wird. Der Beweis dieses Satzes führt sich mit Hülfe des §. 284 auf folgende Weise. Ist W das Trägheitsmoment des zusammengesetzten Pendels AB, Fig. 546, in Hinsicht auf eine Umdrehung um den Schwerpunkt S, so hat man dasselbe für eine Umdrehung um die Axe C, welche um $CS = s$ vom Schwerpunkte S absteht,

Fig. 546.



$$W_1 = W + Ms^2,$$

und daher den Abstand des Schwingungspunktes K von der Drehungsaxe C:

$$r = \frac{W_1}{Ms} = \frac{W + Ms^2}{Ms} = \frac{W}{Ms} + s.$$

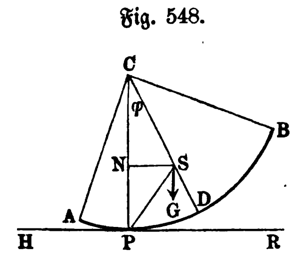
Bezeichnet man nun den Abstand $KS = r - s$ des Schwingungspunktes K vom Schwerpunkte durch s_1, so erhält man die einfache Gleichung $s s_1 = \frac{W}{M}$, in welcher s und s_1 auf gleiche Weise vorkommen, und daher auch mit einander vertauscht werden können. Diese Formel gilt also nicht allein für den Fall, wenn s den Abstand des Drehungspunktes, und s_1 den des Schwingungspunktes von dem Schwerpunkte bezeichnet,

sondern auch umgekehrt, wenn s den Abstand des Schwingungspunktes, und s_1 den des Drehungspunktes vom Schwerpunkte ausdrückt; es wird also C zum Schwingungspunkte, wenn K als Aufhängepunkt dient. Man benutzt Fig. 547. diese Eigenschaft bei dem sogenannten, zuerst von **Bohnenberger** vorgeschlagenen und später von **Kater** angewendeten **Reversionspendel** AB, Fig. 547, welches mit zwei schneidigen Axen C und K ausgerüstet ist, die so gegen einander gestellt sind, daß die Schwingungszeiten dieselben bleiben, das Pendel mag um die eine oder um die andere Axe schwingen. Um nicht die Axen gegen einander verstellen zu müssen, werden noch zwei Laufgewichte P und Q angebracht, wovon das kleinere durch eine feine Schraube gestellt werden kann. Hat man durch Verschieben oder Einstellen dieser Laufgewichte es dahin gebracht, daß die Schwingungsdauer dieselbe ist, das Pendel mag in C oder in K aufhängen, so bekommt man in der Entfernung CK beider Schneiden von einander die Länge r des einfachen Pendels, welches mit dem Reversionspendel gleichzeitig schwingt, und es ergiebt sich nun die Schwingungsdauer durch die Formel

$$t = \pi \sqrt{\frac{r}{g}}.$$

Wälzendes Pendel. Mit dem Schwingen eines Pendels läßt sich auch §. 329 das **Schaukeln oder Wiegen** eines Körpers mit walzenförmigem Fuße vergleichen. Dieses Wiegen ist zwar, wie jede andere wälzende Bewegung, aus einer progressiven und einer Drehbewegung zusammengesetzt, allein es läßt sich auch annehmen, daß es aus einer einfachen Drehung mit veränderlicher Drehaxe bestehe. Diese Drehaxe ist aber der Stützpunkt P, womit der schaukelnde Körper ABC, Fig. 548, auf der horizontalen Basis HR aufruhet. Ist der Halbmesser $CD = CP$ der walzenförmigen Basis ADB, $= r$, und der Abstand CS des Schwerpunktes S des ganzen Körpers vom Mittelpunkte C dieser Basis, $= s$, so hat man für die dem Drehungswinkel $SCP = \varphi$ entsprechende Entfernung $SP = y$ des Schwerpunktes vom Drehungspunkte:

Fig. 548.



$$y^2 = r^2 + s^2 - 2rs\cos.\varphi$$
$$= (r - s)^2 + 4rs\left(\sin.\frac{\varphi}{2}\right)^2;$$

bezeichnen wir daher noch das Trägheitsmoment des ganzen Körpers in Hinsicht auf den Schwerpunkt S durch Mk^2, so erhalten wir das Trägheitsmoment in Hinsicht auf den Stützpunkt P:

$$W = M(k^2 + y^2) = M\left[k^2 + (r-s)^2 + 4rs\left(sin.\frac{\varphi}{2}\right)^2\right],$$

wofür bei kleinen Schwingungswinkeln, $= M[k^2 + (r-s)^2 + rs\varphi^2]$ oder gar nur $M[k^2 + (r-s)^2]$ gesetzt werden kann. Da nun das Kraftmoment $= G.\overline{SN} = Mg.\overline{CS}\, sin.\varphi = Mgs\, sin.\varphi$ ist, so folgt die Winkelacceleration für die Drehung um P:

$$\varkappa = \frac{\text{Kraftmoment}}{\text{Trägheitsmoment}} = \frac{Mgs\, sin.\varphi}{M[k^2 + (r-s)^2]} = \frac{gs\, sin.\varphi}{k^2 + (r-s)^2}.$$

Beim einfachen Pendel ist dieselbe $= \frac{g\, sin.\varphi}{r_1}$, wenn r_1 dessen Länge bezeichnet; sollen daher beide isochron schwingen, so muß sein:

$$\frac{gs\, sin.\varphi}{k^2 + (r-s)^2} = \frac{g\, sin.\varphi}{r_1}, \text{ d. i. } r_1 = \frac{k^2 + (r-s)^2}{s}.$$

Die Schwingungszeit der Wiege ist hiernach:

Fig. 549.

$$t = \pi\sqrt{\frac{r_1}{g}} = \pi\sqrt{\frac{k^2 + (r-s)^2}{gs}}.$$



Diese Theorie läßt sich auch auf ein Pendel AB, Fig. 549, mit abgerundeter Umdrehungsaxe CM anwenden, wenn man statt r den Krümmungshalbmesser CM dieser Axe einführt. Wäre statt der runden Axe eine schneidige Axe D angebracht, so würde die Schwingungszeit

$$t_1 = \pi\sqrt{\frac{k^2 + \overline{DS}^2}{g.DS}} = \pi\sqrt{\frac{k^2 + (s-x)^2}{g(s-x)}}$$

betragen, wofern die Entfernung CD der Schneide D vom Mittelpunkte C der runden Axe durch x bezeichnet wird. Beide Pendel haben nun gleiche Schwingungszeiten, wenn

$$\frac{k^2 + (s-x)^2}{s-x} = \frac{k^2 + (r-s)^2}{s}, \text{ oder } \frac{k^2}{s-x} - x = \frac{k^2 + r^2}{s} - 2r$$

ist. Schreiben wir $\frac{k^2}{s-x} = \frac{k^2}{s} + \frac{k^2 x}{s^2}$ annähernd, und vernachlässigen wir r^2, so erhalten wir:

$$x = \frac{2rs^2}{s^2 - k^2}.$$

Anmerkung. Von dem conischen Pendel ist unter dem Artikel „Regulator" im dritten Theile die Rede.

Im Supplementbande wird von den schwingenden Bewegungen ausführlich gehandelt.

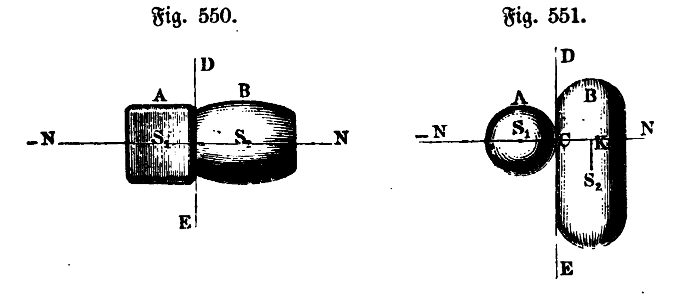
Viertes Capitel.

Die Lehre vom Stoße.

Stoss überhaupt. Vermöge der Undurchdringlichkeit der Materie können zwei Körper gleichzeitig nicht einen und denselben Raum einnehmen. Kommen aber zwei bewegte Körper so mit einander in Berührung, daß einer in den Raum des anderen einzudringen sucht, so findet eine Wechselwirkung zwischen beiden statt, welche eine Veränderung in den Bewegungszuständen dieser Körper zur Folge hat. Diese Wechselwirkung ist es, welche man Stoß (franz. choc; engl. impact, collision) nennt. §. 330

Die Verhältnisse des Stoßes hängen zunächst von dem Gesetze der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung (§. 65) ab; während des Stoßes drückt der eine Körper genau ebenso stark auf den anderen, wie dieser in entgegengesetzter Richtung auf jenen. Die gerade Linie, welche winkelrecht auf den Flächen steht, in welchen sich beide Körper berühren, und welche durch den Berührungspunkt selbst geht, ist die Richtung der Stoßkraft. Befinden sich die Schwerpunkte beider Körper in dieser Linie, so heißt der Stoß ein centrischer oder Centralstoß, außerdem aber ein excentrischer Stoß. Die Körper A und B in Fig. 550 geben einen centrischen Stoß,

Fig. 550.   Fig. 551.

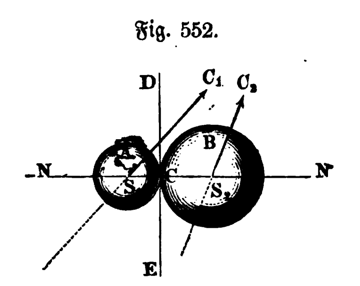


weil ihre Schwerpunkte S_1 und S_2 in der Normale $N\overline{N}$ zur Berührungsebene DE liegen; von den Körpern A und B in Fig. 551 stößt A centrisch und B excentrisch, weil S_1 in und S_2 außerhalb der Normal- oder Stoßlinie $N\overline{N}$ befindlich ist.

In Hinsicht auf die Bewegungsrichtung unterscheidet man den geraden Stoß (franz. choc direct; engl. direct impact) und den schiefen Stoß (franz. choc oblique; engl. oblique impact) von einander. Beim geraden

Stoße fällt die Bewegungsrichtung in die Stoßlinie, beim schiefen Stoße findet aber eine Abweichung zwischen beiden Richtungen statt. Bewegen sich z. B. die Körper A und B, Fig. 552, in Richtungen $S_1 C_1$ und $S_2 C_2$, welche von der Normalen oder Stoßlinie $N\overline{N}$ abweichen, so findet ein schiefer Stoß statt, während derselbe ein gerader wäre, wenn diese Bewegungsrichtungen mit $N\overline{N}$ zusammenfielen.

Fig. 552.



Außerdem unterscheidet man noch den Stoß **freier Körper** und den Stoß **ganz oder theilweise unterstützter Körper** von einander.

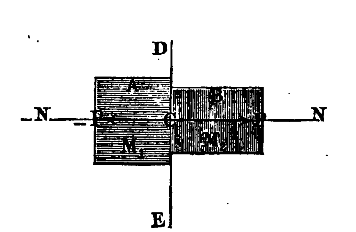
§. 331 Die Zeit während der Mittheilung oder Veränderung der Bewegung durch den Anstoß ist zwar sehr klein, aber keineswegs unendlich klein; sie hängt, sowie die Stoßkraft selbst, von Masse, Geschwindigkeit und Elasticität der zum Stoße gelangenden Körper ab. Man kann diese Zeit aus zwei Perioden bestehend annehmen. In der ersten Periode drücken die Körper einander zusammen und in der zweiten dehnen sich dieselben ganz oder zum Theil wieder aus. Durch das Zusammendrücken wird die Elasticität in Wirksamkeit gesetzt, welche sich mit der Trägheit ins Gleichgewicht setzt und eben dadurch den Bewegungszustand der zusammenstoßenden Körper verändert. Wird bei dem Zusammendrücken die Elasticitätsgrenze nicht überschritten, so geht der Körper am Ende des Stoßes in seine vorige Gestalt vollkommen zurück, und dann nennen wir den Körper einen **vollkommen elastischen**; nimmt aber der Körper am Ende des Stoßes seine vorige Form nicht vollständig wieder an, so nennen wir den Körper **unvollkommen elastisch**, und behält endlich der Körper die durch das Maximum des Zusammendrückens erhaltene Form, besitzt er also gar kein Bestreben zum Ausdehnen, so nennen wir den Körper einen **unelastischen**. Jedenfalls ist aber diese Eintheilung nur in Beziehung auf eine gewisse Stärke des Stoßes als richtig anzunehmen; denn es ist möglich, daß ein und derselbe Körper bei einem schwachen Stoße sich noch elastisch und bei einem starken Stoße unelastisch zeigt. Streng genommen giebt es aber weder einen vollkommen elastischen, noch einen vollkommen unelastischen Körper; doch nennen wir in der Folge solche Körper elastische, welche ihre Gestalt nach dem Stoße ziemlich wieder herstellen, und diejenigen unelastische, welche durch den Stoß bedeutende bleibende Formveränderungen erleiden (vergl. §. 201).

In der praktischen Mechanik werden die zum Stoße gelangenden Körper, wie z. B. Holz, Eisen u. s. w., sehr oft als unelastische angesehen, weil die-

selben entweder an und für sich eine kleine Elasticität besitzen, oder durch Wiederholung der Stöße ihre Elasticität größtentheils verlieren. Uebrigens ist es eine wichtige Regel, Stöße bei Maschinen und Bauwerken so viel wie möglich zu vermeiden oder zu mäßigen oder in elastische zu verwandeln, weil durch dieselben Erschütterungen und große Abnutzungen herbeigeführt werden und weil dieselben einen Theil der Leistung der Maschinen consumiren.

§. 332 **Centralstoss.** Entwickeln wir zunächst die Gesetze des geraden Centralstoßes frei beweglicher Körper. Denken wir uns die Stoßzeit aus lauter gleichen Theilen τ bestehend und nehmen wir an, daß die Stoßkraft während des ersten Zeittheilchens $= P_1$, während des zweiten P_2, während des dritten P_3 sei u. s. w. Ist nun die Masse des einen Körpers A, Fig. 553, $= M_1$, so hat man die entsprechenden Accelerationen:

Fig. 553.



$$p_1 = \frac{P_1}{M_1},\ p_2 = \frac{P_2}{M_1},$$

$$p_3 = \frac{P_3}{M_1} \text{ u. s. w.}$$

Nach §. 19 ist aber die einer Acceleration p und einem Zeittheilchen τ entsprechende Geschwindigkeitsveränderung:

$$\varkappa = p\,\tau;$$

es sind daher für den vorliegenden Fall die elementaren Geschwindigkeitszu- oder -abnahmen:

$$\varkappa_1 = \frac{P_1 \tau}{M_1},\ \varkappa_2 = \frac{P_2 \tau}{M_1},\ \varkappa_3 = \frac{P_3 \tau}{M_1} \text{ u. s. w.}$$

und es ist die in einer gewissen endlichen Zeit erfolgte Geschwindigkeitszu- oder -abnahme der Masse M_1:

$$\varkappa_1 + \varkappa_2 + \varkappa_3 + \cdots = (P_1 + P_2 + P_3 + \cdots)\frac{\tau}{M_1},$$

sowie die entsprechende Geschwindigkeitsveränderung der Masse B von der Größe M_2:

$$= (P_1 + P_2 + P_3 + \cdots)\frac{\tau}{M_2}.$$

Bei dem folgenden oder stoßenden Körper A wirkt die Stoßkraft der Geschwindigkeit c_1 entgegen, es findet folglich hier eine Geschwindigkeitsabnahme statt, und es ist die nach einer gewissen Zeit noch übrig bleibende Geschwindigkeit dieses Körpers:

$$v_1 = c_1 - (P_1 + P_2 + \cdots) \frac{\tau}{M_1};$$

bei dem vorangehenden oder gestoßenen Körper B hingegen wirkt die Stoßkraft in der Bewegungsrichtung, es erhält daher die Geschwindigkeit c_2 einen Zuwachs und es geht dieselbe in

$$v_2 = c_2 + (P_1 + P_2 + \cdots) \frac{\tau}{M_2}$$

über.

Eliminiren wir aus beiden Gleichungen $(P_1 + P_2 + \cdots)\, \tau$, so bleibt uns die allgemeine Formel:

$$\text{I.} \quad M_1 (c_1 - v_1) = M_2 (v_2 - c_2), \text{ oder}$$
$$M_1 v_1 + M_2 v_2 = M_1 c_1 + M_2 c_2.$$

Man bezeichnet wohl das Product aus Masse und Geschwindigkeit eines Körpers durch den Namen **Bewegungsmoment** (franz. quantité de mouvement; engl. momentum of body) und kann hiernach behaupten: **in jedem Augenblick der Stoßzeit ist die Summe der Bewegungsmomente ($M_1 v_1 + M_2 v_2$) beider Körper eben so groß wie vor dem Stoße.**

Im Augenblicke des größten Zusammendrückens haben beide Körper einerlei Geschwindigkeit v, setzen wir daher diesen Werth statt v_1 und v_2 in die gefundene Gleichung, so bleibt

$$M_1 v + M_2 v = M_1 c_1 + M_2 c_2,$$

und es ergiebt sich die Geschwindigkeit beider Körper im Augenblicke der **stärksten Zusammendrückung**:

$$v = \frac{M_1 c_1 + M_2 c_2}{M_1 + M_2}.$$

Sind die Körper A und B **unelastisch**, besitzen sie also nach dem Zusammendrücken kein Bestreben zum Sichwiederausdehnen, so hört alle Mittheilung oder Veränderung der Bewegung auf, wenn beide Körper bis aufs Maximum zusammengedrückt sind, und es gehen daher auch beide nach dem Stoße mit der gemeinschaftlichen Geschwindigkeit

$$v = \frac{M_1 c_1 + M_2 c_2}{M_1 + M_2}$$

fort.

Beispiele. 1) Bewegt sich ein unelastischer Körper B von 30 Pfund Gewicht mit 3 Fuß Geschwindigkeit, und trifft ihn ein anderer unelastischer Körper A von 50 Pfund mit 7 Fuß Geschwindigkeit, so gehen beide nach dem Zusammentreffen mit der Geschwindigkeit

$$v = \frac{50 \,.\, 7 + 30 \,.\, 3}{50 + 30} = \frac{350 + 90}{80} = \frac{44}{8} = \frac{11}{2} = 5\tfrac{1}{2} \text{ Fuß}$$

fort.

2) Um einen Körper von 120 Pfund Gewicht aus einer Geschwindigkeit $c_2 = 1^1/_2$ Fuß in eine Geschwindigkeit v von 2 Fuß zu versetzen, läßt man ihn von einem 50 Pfund schweren Körper stoßen; welche Geschwindigkeit muß dieser haben? Hier ist

$$c_1 = v + \frac{(v - c_2) M_2}{M_1} = 2 + \frac{(2 - 1{,}5) . 120}{50} = 2 + \frac{6}{5} = 3{,}2 \text{ Fuß}.$$

Elastischer Stoss. Sind die zum Stoße gelangenden Körper vollkommen elastisch, so dehnen sie sich, nachdem sie sich in der ersten Periode zusammengedrückt haben, in der zweiten Periode der Stoßzeit allmälig wieder aus; und wenn sie am Ende die erste Gestalt wieder angenommen haben, so setzen sie ihre Bewegungen mit verschiedenen Geschwindigkeiten fort. Da aber die mechanische Arbeit, welche aufzuwenden ist, um einen elastischen Körper zusammenzudrücken, gleich ist der Arbeit, welche derselbe bei seiner Ausdehnung wieder ausgiebt, so findet beim Stoße zwischen elastischen Körpern ein Verlust an lebendiger Kraft nicht statt, und es gilt daher auch für denselben noch folgende zweite Gleichung: §. 333

$$\text{II.} \quad M_1 v_1^2 + M_2 v_2^2 = M_1 c_1^2 + M_2 c_2^2, \text{ oder}$$
$$M_1 (c_1^2 - v_1^2) = M_2 (v_2^2 - c_2^2).$$

Aus den Gleichungen I. und II. lassen sich nun die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 der Körper nach dem Stoße finden. Zuerst folgt durch Division

$$\frac{c_1^2 - v_1^2}{c_1 - v_1} = \frac{v_2^2 - c_2^2}{v_2 - c_2},$$

d. i.:

$$c_1 + v_1 = v_2 + c_2 \text{ oder } v_2 - v_1 = c_1 - c_2;$$

setzt man nun den sich hieraus ergebenden Werth

$$v_2 = c_1 + v_1 - c_2$$

in die Gleichung I., so folgt:

$$M_1 v_1 + M_2 v_1 + M_2 (c_1 - c_2) = M_1 c_1 + M_2 c_2, \text{ oder}$$
$$(M_1 + M_2) v_1 = (M_1 + M_2) c_1 - 2 M_2 (c_1 - c_2),$$

wodurch sich nun herausstellt:

$$v_1 = c_1 - \frac{2 M_2 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2} \text{ und}$$

$$v_2 = c_1 - c_2 + c_1 - \frac{2 M_2 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2} = c_2 + \frac{2 M_1 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2}.$$

Während bei unelastischen Körpern der Verlust an Geschwindigkeit des einen Körpers

$$c_1 - v = c_1 - \frac{M_1 c_1 + M_2 c_2}{M_1 + M_2} = \frac{M_2 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2}$$

ist, fällt hiernach bei elastischen Körpern derselbe doppelt so groß, nämlich

$$c_1 - v_1 = \frac{2 M_2 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2},$$

aus, und während bei den unelastischen Körpern der Geschwindigkeitsgewinn des anderen Körpers

$$v - c_2 = \frac{M_1 c_1 + M_2 c_2}{M_1 + M_2} - c_2 = \frac{M_1 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2}$$

beträgt, stellt sich bei elastischen Körpern derselbe,

$$v_2 - c_2 = \frac{2 M_1 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2},$$

ebenfalls doppelt so groß heraus.

Beispiel. Zwei vollkommen elastische Kugeln, die eine von 10 Pfund, die andere von 16 Pfund Gewicht, stoßen mit den Geschwindigkeiten 12 Fuß und 6 Fuß gegen einander, welches sind ihre Geschwindigkeiten nach dem Stoße? Es ist hier $M_1 = 10$ und $c_1 = 12$ Fuß, sowie $M_2 = 16$ und $c_2 = -6$ Fuß zu setzen, daher ergiebt sich der Geschwindigkeitsverlust des ersten Körpers:

$$c_1 - v_1 = \frac{2 \,.\, 16 (12 + 6)}{10 + 16} = \frac{2 \,.\, 16 \,.\, 18}{26} = 22{,}154 \text{ Fuß},$$

und der Geschwindigkeitsgewinn des anderen:

$$v_2 - c_2 = \frac{2 \,.\, 10 \,.\, 18}{26} = 13{,}846 \text{ Fuß};$$

es prallt hiernach der erste Körper nach dem Stoße mit $v_1 = 12 - 22{,}154 = -10{,}154$ Fuß, und der andere Körper mit $-6 + 13{,}846 = 7{,}846$ Fuß Geschwindigkeit zurück. Uebrigens ist das Maß der lebendigen Kraft beider Körper nach dem Stoße
$= M_1 v_1^2 + M_2 v_2^2 = 10 \,.\, 10{,}154^2 + 16 \,.\, 7{,}846^2 = 1031 + 985 = 2016$
ebenso groß wie vor dem Stoße, nämlich:
$M_1 c_1^2 + M_2 c_2^2 = 10 \,.\, 12^2 + 16 \,.\, 6^2 = 1440 + 576 = 2016.$

Wären diese Körper unelastisch, so würde der erste nur $\frac{c_1 - v_1}{2} = 11{,}077$ Fuß an Geschwindigkeit verlieren und der andere $\frac{v_2 - c_2}{2} = 6{,}923$ Fuß gewinnen; es würde also der erste Körper nach dem Stoße noch die Geschwindigkeit $12 - 11{,}077 = 0{,}923$ Fuß behalten, und der zweite die Geschwindigkeit $-6 + 6{,}923 = 0{,}923$ annehmen, übrigens aber der Arbeitsverlust
$[2016 - (10 + 16)\, 0{,}923^2] : 2g = (2016 - 22{,}2) \,.\, 0{,}016 = 31{,}9$ Fußpfund entstehen.

§. 334. **Besondere Fälle.** Die in den vorstehenden Paragraphen entwickelten Formeln für die Endgeschwindigkeiten des Stoßes gelten natürlich auch dann noch, wenn der eine Körper in Ruhe ist, oder wenn sich beide Körper einander entgegen bewegen, oder wenn eine Masse unendlich groß ist in Hinsicht auf die andere u. s. w. Ist die Masse M_2 in Ruhe, so hat man $c_2 = 0$, daher für unelastische Körper:

$$v = \frac{M_1 c_1}{M_1 + M_2},$$

und für elastische:

$$v_1 = c_1 - \frac{2 M_2 c_1}{M_1 + M_2} = \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2} c_1, \text{ und}$$

$$v_2 = 0 + \frac{2 M_1 c_1}{M_1 + M_2} = \frac{2 M_1}{M_1 + M_2} c_1.$$

Laufen die Körper einander entgegen, ist also c_2 negativ, so folgt für unelastische Körper:

$$v = \frac{M_1 c_1 - M_2 c_2}{M_1 + M_2},$$

und für elastische:

$$v_1 = c_1 - \frac{2 M_2 (c_1 + c_2)}{M_1 + M_2} \text{ und } v_2 = - c_2 + \frac{2 M_1 (c_1 + c_2)}{M_1 + M_2}.$$

Sind in diesem Falle die Bewegungsmomente einander gleich, ist also $M_1 c_1 = M_2 c_2$, so ist beim unelastischen Stoße, $v = 0$, d. h. die Körper versetzen einander in Ruhe; bei elastischen Körpern ist aber

$$v_1 = c_1 - \frac{2 (M_2 c_1 + M_1 c_1)}{M_1 + M_2} = c_1 - 2 c_1 = - c_1, \text{ und}$$

$$v_2 = - c_2 + \frac{2 (M_2 c_2 + M_1 c_2)}{M_1 + M_2} = - c_2 + 2 c_2 = + c_2;$$

dann kehren also die Körper nach dem Stoße mit entgegengesetzten Geschwindigkeiten zurück. Sind hingegen die Massen einander gleich, so hat man für unelastische Körper:

$$v = \frac{c_1 - c_2}{2},$$

dagegen für elastische:

$$v_1 = - c_2 \text{ und } v_2 = c_1,$$

d. h. dann gehen die Massen mit verwechselten Geschwindigkeiten zurück.

Laufen die Massen wieder in gleicher Richtung, und ist die vorausgehende Masse M_2 unendlich groß, so hat man für unelastische Körper:

$$v = \frac{M_2 c_2}{M_2} = c_2,$$

und für elastische:

$$v_1 = c_1 - 2 (c_1 - c_2) = 2 c_2 - c_1, \; v_2 = c_2 + 0 = c_2;$$

es wird also die Geschwindigkeit der unendlich großen Masse durch den Anstoß der endlichen Masse nicht abgeändert. Ist nun noch die unendlich große Masse in Ruhe, also $c_2 = 0$, so hat man für unelastische Körper:

$$v = 0,$$

und für elastische:

$$v_1 = - c_1, \; v_2 = 0;$$

dann bleibt also auch die unendlich große Masse in Ruhe, es verliert aber

im ersten Falle der anstoßende Körper seine Geschwindigkeit vollständig, und es wird dieselbe im zweiten Falle in die entgegengesetzte verwandelt.

Beispiele. 1) Mit welcher Geschwindigkeit ist ein Körper von 8 Pfund an einen ruhenden Körper von 25 Pfund anzustoßen, damit der letztere eine Geschwindigkeit von 2 Fuß annimmt? Wären die Körper unelastisch, so hätte man zu setzen:

$$v = \frac{M_1 c_1}{M_1 + M_2},$$

d. i.:

$$2 = \frac{8 \, . \, c_1}{8 + 25},$$

daher:

$$c_1 = {}^{33}/_4 = 8^1/_4 \text{ Fuß}$$

die gesuchte Geschwindigkeit; wären sie aber elastisch, so hätte man:

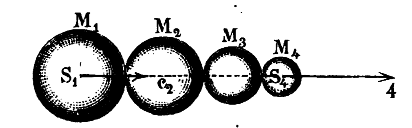
$$v_2 = \frac{2 M_1 c_1}{M_1 + M_2},$$

daher:

$$c_1 = {}^{33}/_8 = 4^1/_8 \text{ Fuß}.$$

2) Trifft eine Kugel M_1, Fig. 554, die ruhende Masse $M_2 = n M_1$ mit der Geschwindigkeit c_1, die zweite Masse eine dritte Masse $M_3 = n M_2 = n^2 M_1$ mit der durch den Stoß erlangten Geschwindigkeit, diese wieder eine Masse $M_4 = n M_3 = n^3 M_1$ u. s. w., so hat man bei vollkommener Elasticität dieser Massen die Geschwindigkeiten:

Fig. 554.



$$v_2 = \frac{2 M_1}{M_1 + n M_1} c_1 = \frac{2}{1+n} \cdot c_1, \; v_3 = \frac{2 M_2}{M_2 + n M_2} v_2 = \frac{2}{1+n} \cdot v_2 = \left(\frac{2}{1+n}\right)^2 c_1,$$

$$v_4 = \left(\frac{2}{1+n}\right)^3 c_1 \text{ u. s. w.}$$

Ist z. B. das Gewicht einer jeden Masse nur halb so groß, als das der nächst vorhergehenden, hat man also den Exponenten der von den Massen gebildeten geometrischen Reihe:

$$n = {}^1/_2,$$

so folgt:

$$v_2 = {}^4/_3 \, c_1, \; v_3 = ({}^4/_3)^2 c_1, \; v_4 = ({}^4/_3)^3 c_1 \ldots, \; v_{10} = ({}^4/_3)^9 c_1 = 13{,}32 \, . \, c_1.$$

§. 335 **Arbeitsverlust.** Beim Zusammenstoßen unelastischer Massen findet stets ein Verlust an lebendiger Kraft statt, weshalb die Massen nach dem Stoße nicht so viel Arbeit zu verrichten vermögen, als vor dem Stoße. Vor dem Stoße enthalten die mit den Geschwindigkeiten c_1 und c_2 fortgehenden Massen M_1 und M_2 die lebendige Kraft:

$$M_1 c_1^2 + M_2 c_2^2,$$

nach dem Stoße haben aber die mit der Geschwindigkeit

$$v = \frac{M_1 c_1 + M_2 c_2}{M_1 + M_2}$$

fortgehenden Massen die lebendige Kraft:

$$M_1 v^2 + M_2 v^2;$$

es giebt daher die Subtraction dieser Kräfte den Verlust an lebendiger Kraft durch den Anstoß:

$$K = M_1 (c_1^2 - v^2) + M_2 (c_2^2 - v^2)$$
$$= M_1 (c_1 + v) (c_1 - v) - M_2 (c_2 + v) (v - c_2), \text{ aber}$$
$$M_1 (c_1 - v) = M_2 (v - c_2) = \frac{M_1 M_2 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2},$$

daher folgt:

$$K = (c_1 + v - c_2 - v) \frac{M_1 M_2 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2} = \frac{(c_1 - c_2)^2 M_1 M_2}{M_1 + M_2} = \frac{(c_1 - c_2)^2}{\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2}}.$$

Sind die Gewichte der Massen G_1 und G_2, ist also

$$M_1 = \frac{G_1}{g} \text{ und } M_2 = \frac{G_2}{g},$$

so hat man hiernach den Verlust an mechanischer Arbeit oder Leistung:

$$A = \frac{(c_1 - c_2)^2}{2g} \cdot \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2}.$$

Man nennt $\frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2}$ das harmonische Mittel aus G_1 und G_2, und kann hiernach behaupten: der Verlust an Leistung, welcher durch den Stoß zweier unelastischen Massen herbeigeführt und auf die Formveränderung derselben verwendet wird, ist gleich dem Producte aus dem harmonischen Mittel beider Massen und aus der Fallhöhe, welche der Differenz der Geschwindigkeiten dieser Massen entspricht.

Ist eine der Massen, z. B. M_2, in Ruhe, so hat man diesen Arbeitsverlust:

$$A = \frac{c_1^2}{2g} \cdot \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2},$$

und ist die bewegte Masse M_1 sehr groß gegen die ruhende, so verschwindet G_2 gegen G_1, und es bleibt:

$$A = \frac{c_1^2}{2g} \cdot G_2.$$

Uebrigens läßt sich auch setzen:

$$K = M_1 (c_1^2 - v^2) + M_2 (c_2^2 - v^2)$$
$$= M_1 (c_1^2 - 2c_1 v + v^2 + 2c_1 v - 2v^2) + M_2 (c_2^2 - 2c_2 v + v^2 + 2c_2 v - 2v_2^2)$$
$$= M_1 (c_1 - v)^2 + 2 M_1 v (c_1 - v) + M_2 (c_2 - v)^2 + 2 M_2 v (c_2 - v)$$
$$= M_1 (c_1 - v)^2 + M_2 (c_2 - v)^2,$$

weil $M_1 (c_1 - v) = M_2 (v - c_2)$ ist.

Hiernach ist also die durch die unelastischen Stöße verlorene lebendige Kraft gleich der Summe von den Producten aus den

Massen und den Quadraten ihrer Geschwindigkeitsverluste oder Geschwindigkeitsgewinne.

Beispiele. 1) Wenn bei einer Maschine in jeder Minute 16 Stöße zwischen den unelastischen Massen

$$M_1 = \frac{1000}{g} \text{ Pfd. und } M_2 = \frac{1200}{g} \text{ Pfd.}$$

mit den Geschwindigkeiten $c_1 = 5$ Fuß und $c_2 = 2$ Fuß erfolgen, so ist ihr Verlust an Leistung in Folge dieser Stöße:

$$A = {}^{16}/_{60} \cdot \frac{(5-2)^2}{2g} \cdot \frac{1000 \cdot 1200}{2200} = {}^{4}/_{15} \cdot 9 \cdot 0{,}016 \cdot {}^{6000}/_{11} = 0{,}576 \cdot {}^{400}/_{11}$$
$$= 20{,}94 \text{ Fußpfund per Secunde.}$$

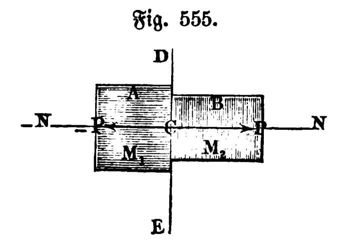
2) Wenn auf einer Eisenbahn zwei Wagenzüge von 120000 Pfund und 160000 Pfund Gewicht mit den Geschwindigkeiten $c_1 = 20$ und $c_2 = 15$ Fuß gegen einander stoßen, so entsteht ein auf die Zerstörung der Locomotive und Wagen verwendeter Arbeitsverlust, welcher bei vollständigem Mangel an Elasticität der zum Stoße gelangenden Theile

$$= \frac{(20+15)^2}{2g} \cdot \frac{120000 \cdot 160000}{280000} = 35^2 \cdot 0{,}016 \cdot \frac{1'920000}{28} = 1'344000 \text{ Fußpfd.}$$

beträgt.

§. 336 **Härte.** Kennt man die Elasticitätsmodel der zum Stoße gelangenden Körper, so kann man auch die Kraft des Zusammendrückens und die Größe desselben finden. Es seien von den Körpern A und B, Fig. 555, die Querschnitte F_1 und F_2, die Längen l_1 und l_2 und die Elasticitätsmodul E_1 und E_2. Stoßen beide mit einer Kraft P gegen einander, so sind die bewirkten Zusammendrückungen, nach §. 204:

Fig. 555.



$$\lambda_1 = \frac{P l_1}{F_1 E_1} \text{ und } \lambda_2 = \frac{P l_2}{F_2 E_2},$$

und es ist das Verhältniß derselben:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{F_2 E_2}{F_1 E_1} \cdot \frac{l_1}{l_2}.$$

Bezeichnen wir nun der Einfachheit wegen, $\frac{F_1 E_1}{l_1}$ durch H_1, sowie $\frac{F_2 E_2}{l_2}$ durch H_2, so erhalten wir:

$$\lambda_1 = \frac{P}{H_1} \text{ und } \lambda_2 = \frac{P}{H_2},$$

sowie:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{H_2}{H_1}.$$

Nennen wir nach dem Beispiele Whewell's (s. The Mechanics of

Engineering §. 207) die Größe $\frac{FE}{l}$ die **Härte** (franz. dureté, raideur; engl. hardness) eines Körpers, so folgt, daß die **Tiefen der Zusammendrückungen den Härten umgekehrt proportional sind.**

Stößt eine Masse $M = \frac{G}{g}$ mit der Geschwindigkeit c auf eine unbewegliche oder unendlich große Masse, so verwendet sie ihre ganze lebendige Kraft auf das Zusammendrücken, es ist daher (nach §. 206):

$$\frac{1}{2} P \sigma = \frac{Mc^2}{2} = \frac{c^2}{2g} G.$$

Nun ist aber der Weg σ gleich der Summe von den Zusammendrückungen λ_1 und λ_2, und $\lambda_1 = \frac{P}{H_1}$, sowie $\lambda_2 = \frac{P}{H_2}$, es folgt daher:

$$\sigma = \lambda_1 + \lambda_2 = P\left(\frac{1}{H_1} + \frac{1}{H_2}\right) = \frac{H_1 + H_2}{H_1 H_2} \cdot P,$$

sowie umgekehrt:

$$P = \frac{H_1 H_2}{H_1 + H_2} \sigma,$$

und die Bestimmungsgleichung:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{H_1 H_2}{H_1 + H_2} \cdot \sigma^2 = \frac{c^2}{2g} G,$$

also:

$$\sigma = c \sqrt{\frac{H_1 + H_2}{H_1 H_2} \cdot \frac{G}{g}},$$

woraus sich nun P, λ_1 und λ_2 berechnen lassen.

Beispiel. Schlägt man einen schmiedeeisernen Hammer von 4 Quadratzoll Basis und 6 Zoll Höhe mit einer Geschwindigkeit von 50 Fuß auf eine Bleiplatte von 2 Quadratzoll Basis und 1 Zoll Dicke, so stellen sich folgende Verhältnisse heraus. Der Elasticitätsmodul des Schmiedeeisens ist $E_1 = 29'000000$ und der des Bleies, $E_2 = 700000$, daher sind die Härten dieser Körper:

$$H_1 = \frac{F_1 E_1}{l_1} = \frac{4 . 29'000000}{6} = 19'333333 \text{ und}$$

$$H_2 = \frac{F_2 E_2}{l_2} = \frac{2 . 700000}{1} = 1'400000.$$

Setzt man diese Werthe in die Formel:

$$\sigma = c \sqrt{\frac{H_1 + H_2}{H_1 H_2} \cdot \frac{G}{g}},$$

und führt man das Gewicht des Hammers $= 4 . 6 . 0{,}29 = 7$ Pfd., also:

$$\frac{G}{g} = 7 . 0{,}032 = 0{,}224$$

ein, so erhält man den Weg des Hammers beim Zusammendrücken:

$$\sigma = 50 \sqrt{\frac{20733333 . 0{,}224}{19333333 . 1400000}} = 50 \sqrt{\frac{0{,}46443}{2706666}} = 0{,}0207 \text{ Zoll} = 0{,}248 \text{ Linien.}$$

Hieraus folgt die Stoßkraft:

$$P = \frac{H_1 H_2}{H_1 + H_2} \cdot \sigma = \frac{19333333 . 1400000}{20733333} \cdot 0,0207 = 27037 \text{ Pfund};$$

ferner die Zusammendrückung des Hammers:

$$\lambda_1 = \frac{P}{H_1} = \frac{27037}{19333333} = 0,0014 \text{ Zoll} = 0,016 \text{ Linien},$$

und die der Bleiplatte:

$$\lambda_2 = \frac{P}{H_2} = \frac{27037}{1400000} = 0,0193 \text{ Zoll} = 0,233 \text{ Linien}.$$

§. 337 **Elastisch-unelastischer Stoss.** Bewegen sich zwei Massen M_1 und M_2 mit den Geschwindigkeiten c_1 und c_2 hinter einander her, so ist im Augenblicke der größten Zusammendrückung die gemeinschaftliche Geschwindigkeit beider, nach §. 332:

$$v = \frac{M_1 c_1 + M_2 c_2}{M_1 + M_2},$$

und die auf die Zusammendrückung verwendete Arbeit, nach §. 335:

$$A = \frac{(c_1 - c_2)^2}{2} \cdot \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} = \frac{(c_1 - c_2)^2}{2g} \cdot \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2}.$$

Nun läßt sich diese Arbeit auch

$$= \frac{1}{2} P \sigma = \frac{1}{2} P (\lambda_1 + \lambda_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{H_1 H_2}{H_1 + H_2} \sigma^2$$

setzen, es ergiebt sich folglich die Summe der Zusammendrückungen beider Massen:

$$\sigma = (c_1 - c_2) \sqrt{\frac{G_1 G_2}{g(G_1 + G_2)} \cdot \frac{H_1 + H_2}{H_1 H_2}},$$

woraus sich nun die zusammendrückende Kraft P und die Zusammendrückungen der einzelnen Massen, nämlich λ_1 und λ_2, finden lassen.

Sind die Massen unelastisch, so bleiben diese Zusammendrückungen auch nach dem Stoße; ist aber nur eine von beiden Massen unelastisch, so dehnt sich die andere Masse in einer zweiten Periode wieder aus, und es erzeugt die daraus erwachsende Arbeit eine neue Geschwindigkeitsveränderung. Ist z. B. die Masse $M_1 = \frac{G_1}{g}$ elastisch, so wird in dieser zweiten Periode des Stoßes die Arbeit:

$$\frac{1}{2} P \lambda_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{P^2}{H_1} = \frac{1}{2 H_1} \left(\frac{H_1 H_2}{H_1 + H_2}\right)^2 \sigma^2$$

$$= \frac{(c_1 - c_2)^2}{2g} \cdot \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2} \cdot \frac{H_2}{H_1 + H_2}$$

frei; man hat daher in diesem Falle für die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 nach dem Stoße die Formeln:

$$M_1 v_1 + M_2 v_2 = M_1 c_1 + M_2 c_2 \text{ und}$$

$$M_1 v_1^2 + M_2 v_2^2 = M_1 v^2 + M_2 v^2 + (c_1 - c_2)^2 \cdot \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \cdot \frac{H_2}{H_1 + H_2}$$

$$= M_1 c_1^2 + M_2 c_2^2 - (c_1 - c_2)^2 \cdot \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} + (c_1 - c_2)^2 \cdot \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \cdot \frac{H_2}{H_1 + H_2},$$

d. i.:

$$M_1 v_1^2 + M_2 v_2^2 = M_1 c_1^2 + M_2 c_2^2 - (c_1 - c_2)^2 \cdot \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \cdot \frac{H_1}{H_1 + H_2}.$$

Setzt man den Geschwindigkeitsverlust $c_1 - v_1 = x$, so hat man den Geschwindigkeitsgewinn:

$$v_2 - c_2 = \frac{M_1 x}{M_2},$$

und es nimmt die letzte Gleichung die Form:

$$x(2c_1 - x) - x\left(2c_2 + \frac{M_1 x}{M_2}\right) - (c_1 - c_2)^2 \frac{M_2}{M_1 + M_2} \cdot \frac{H_1}{H_1 + H_2} = 0,$$

oder:

$$\frac{M_1 + M_2}{M_2} x^2 - 2(c_1 - c_2) x + (c_1 - c_2)^2 \cdot \frac{M_2}{M_1 + M_2} \cdot \frac{H_1}{H_1 + H_2} = 0 \text{ an.}$$

Multiplicirt man dieselbe durch $\frac{M_2}{M_1 + M_2}$ und setzt man

$$\frac{H_1}{H_1 + H_2} = 1 - \frac{H_2}{H_1 + H_2},$$

so erhält man die quadratische Gleichung:

$$x^2 - 2(c_1 - c_2) \frac{M_2}{M_1 + M_2} x + (c_1 - c_2)^2 \left(\frac{M_2}{M_1 + M_2}\right)^2$$
$$= (c_1 - c_2)^2 \left(\frac{M_2}{M_1 + M_2}\right)^2 \cdot \frac{H_2}{H_1 + H_2},$$

oder:

$$\left(x - (c_1 - c_2)\frac{M_2}{M_1 + M_2}\right)^2 = (c_1 - c_2)^2 \left(\frac{M_2}{M_1 + M_2}\right)^2 \cdot \frac{H_2}{H_1 + H_2},$$

deren Auflösung den Geschwindigkeitsverlust x des ersten Körpers giebt:

$$c_1 - v_1 = (c_1 - c_2) \frac{M_2}{M_1 + M_2} \left(1 + \sqrt{\frac{H_2}{H_1 + H_2}}\right),$$

und den Geschwindigkeitsgewinn des anderen Körpers:

$$v_2 - c_2 = (c_1 - c_2) \frac{M_1}{M_1 + M_2} \left(1 + \sqrt{\frac{H_2}{H_1 + H_2}}\right).$$

Beispiel. Wenn man annimmt, daß in dem Beispiele des vorigen Paragraphen der eiserne Hammer vollkommen elastisch und die Bleiplatte ganz unelastisch ist, so erhält man den Geschwindigkeitsverlust des mit 50 Fuß Geschwindigkeit auffallenden 7 Pfund schweren Hammers, da $c_2 = 0$ und $M_2 = \infty$ zu setzen ist:

$$c_1 - v_1 = c_1 \left(1 + \sqrt{\frac{H_2}{H_1 + H_2}}\right) = 50 \left(1 + \sqrt{\frac{1400000}{20733333}}\right)$$
$$= 50\,(1 + 0{,}26) = 63 \text{ Fuß},$$

daher die Geschwindigkeit des Hammers nach dem Stoße:

$$v_1 = c_1 - 63 = 50 - 63 = -13 \text{ Fuß}.$$

Die Geschwindigkeit der unterstützten Bleiplatte bleibt natürlich Null.

§. 338 **Unvollkommen elastischer Stoss.** Sind die an einander anstoßenden Körper unvollkommen elastisch, so dehnen sich dieselben in der zweiten Periode der Stoßzeit nur zum Theil wieder aus, es wird also auch die beim Comprimiren in der ersten Periode verbrauchte lebendige Kraft in der zweiten Periode nicht vollständig wieder ausgegeben. Sind wieder λ_1 und λ_2 die Tiefen der Eindrücke, und ist P die Stoßkraft, so hat man die Arbeitsverluste beim Comprimiren $= \frac{1}{2} P \lambda_1$ und $\frac{1}{2} P \lambda_2$, und wird nun beim Ausdehnen hiervon das μfache, oder allgemeiner, beim Ausdehnen des einen Körpers das μ_1- und beim Ausdehnen des zweiten das $\mu_2$fache zurückgegeben, so bleibt der gesammte Arbeitsverlust nach dem Stoße:

$$A = \frac{1}{2} P\,[(1 - \mu_1)\,\lambda_1 + (1 - \mu_2)\,\lambda_2],$$

oder $\lambda_1 = \frac{P}{H_1}$ und $\lambda_2 = \frac{P}{H_2}$ gesetzt:

$$A = \frac{1}{2} P^2 \left[\frac{1 - \mu_1}{H_1} + \frac{1 - \mu_2}{H_2}\right].$$

Nach dem vorigen Paragraphen ist aber

$$P = \frac{H_1 H_2 \sigma}{H_1 + H_2} \text{ und } \sigma = (c_1 - c_2) \sqrt{\frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \cdot \frac{H_1 + H_2}{H_1 H_2}},$$

daher ergiebt sich dann der in Frage gestellte Arbeitsverlust:

$$A = \frac{(c_1 - c_2)^2}{2} \cdot \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \cdot \frac{H_1 H_2}{H_1 + H_2} \left(\frac{1 - \mu_1}{H_1} + \frac{1 - \mu_2}{H_2}\right)$$
$$= \frac{(c_1 - c_2)^2}{2} \cdot \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \left(1 - \frac{\mu_1 H_2 + \mu_2 H_1}{H_1 + H_2}\right).$$

Um nun die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 nach dem Stoße zu finden, haben wir die Gleichungen:

$$M_1 v_1 + M_2 v_2 = M_1 c_1 + M_2 c_2 \text{ und}$$
$$M_1 v_1^2 + M_2 v_2^2 = M_1 c_1^2 + M_2 c_2^2$$
$$- (c_1 - c_2)^2 \cdot \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \cdot \frac{(1 - \mu_1) H_2 + (1 - \mu_2) H_1}{H_1 + H_2}$$

mit einander zu verbinden und aufzulösen. Ganz auf dieselbe Weise wie im vorigen Paragraphen ergiebt sich der Geschwindigkeitsverlust des ersten Körpers:

$$c_1 - v_1 = (c_1 - c_2) \frac{M_2}{M_1 + M_2} \left(1 + \sqrt{\frac{\mu_2 H_1 + \mu_1 H_2}{H_1 + H_2}}\right),$$

und der Geschwindigkeitsgewinn des vorangehenden Körpers:

$$v_2 - c_2 = (c_1 - c_2) \frac{M_1}{M_1 + M_2} \left(1 + \sqrt{\frac{\mu_2 H_1 + \mu_1 H_2}{H_1 + H_2}}\right).$$

Diese beiden allgemeinen Formeln enthalten auch die Gesetze des vollkommen elastischen und des unelastischen Stoßes. Setzt man in ihnen $\mu_1 = \mu_2 = 1$, so erhält man die schon oben gefundenen Formeln für den Stoß zwischen vollkommen elastischen Körpern, nimmt man aber $\mu_1 = \mu_2 = 0$ an, so erhält man die Formeln des unelastischen Stoßes u. s. w. Sind beide Körper von gleichem Grade der Elasticität, ist also $\mu_1 = \mu_2$, so hat man einfacher:

$$c_1 - v_1 = (c_1 - c_2) \frac{M_2}{M_1 + M_2} (1 + \sqrt{\mu})$$

und

$$v_2 - c_2 = (c_1 - c_2) \frac{M_1}{M_1 + M_2} (1 + \sqrt{\mu}).$$

Ist noch die Masse M_2 in Ruhe und unendlich groß, so folgt:

$c_1 - v_1 = c_1 (1 + \sqrt{\mu})$, d. i.:

$v_1 = - c_1 \sqrt{\mu}$, sowie umgekehrt:

$$\mu = \left(\frac{v_1}{c_1}\right)^2.$$

Läßt man die Masse M_1 von einer Höhe h auf eine fest unterstützte gleichartige Masse M_2 herabfallen, und steigt dieselbe nach dem Aufschlagen auf eine Höhe h_1 zurück, so kann man aus beiden Höhen den Coefficienten der unvollkommenen Elasticität durch die Formel

$$\mu = \frac{h_1}{h}$$

finden. Schon Newton fand auf diese Weise für Elfenbein:

$$\mu = (8/9)^2 = 64/81 = 0{,}79,$$

für Glas:

$$\mu = (15/16)^2 = 0{,}9375^2 = 0{,}879,$$

für Kork, Stahl, Wolle:

$$\mu = (5/9)^2 = 0{,}555^2 = 0{,}309.$$

Hierbei wird jedoch vorausgesetzt, daß der stoßende oder auffallende Körper die Kugel- und der gestoßene Körper oder die Unterlage eine Plattenform hat.

Der General Morin ließ Geschützkugeln von 6 bis 20 Kilogramm Gewicht auf verschiedene Massen von Thon, Holz, Gußeisen, welche an einem Federdynamometer oder einer Federwage aufgehangen waren, herabfallen, und fand, daß für Thon und für Holzstücke μ nahe $= 0$,

dagegen für Gußeisen μ nahe $= 1$ ist, daß also der Stoß mit den ersteren Körpern als unelastisch, und der mit dem letzteren als vollkommen elastisch angesehen werden kann (s. A. Morin, Notions fondamentales de Mécanique, Art. 67 — 70).

Beispiel. Welche Geschwindigkeiten nehmen zwei Stahlplatten nach dem Stoße an, wenn dieselben vor dem Stoße die Geschwindigkeiten $c_1 = 10$ und $c_2 = -6$ Fuß besitzen, die eine 30 und die andere 40 Pfund wiegt? Hier ist

$$c_1 - v_1 = (10 + 6) \cdot {}^{40}/_{70}\, (1 + {}^5/_9) = 16 \cdot {}^4/_7 \cdot {}^{14}/_9 = \frac{16 \cdot 8}{9} = 14{,}22 \text{ Fuß},$$

daher sind die gesuchten Geschwindigkeiten:

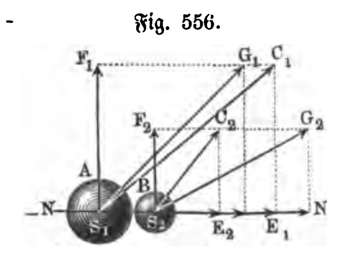
$$v_1 = c_1 - 14{,}22 = 10 - 14{,}22 = -4{,}22 \text{ Fuß}$$

und

$$v_2 = c_2 + 10{,}66 = -6 + 10{,}66 = 4{,}66 \text{ Fuß}.$$

§. 339 **Schiefer Stoss.** Weichen die Bewegungsrichtungen $\overline{S_1 C_1}$ und $\overline{S_2 C_2}$ zweier Körper A und B, Fig. 556, von der Normale $N\overline{N}$ zur Berührungsebene ab, so ist deren Anstoß ein schiefer. Wir führen die Theorie desselben auf die des geraden Stoßes zurück, wenn wir die Geschwindigkeiten $S_1 C_1 = c_1$ und $S_2 C_2 = c_2$ nach der Normale und nach einer Tangentialrichtung zerlegen; die Seitengeschwindigkeiten in der Richtung der Normale $N\overline{N}$ geben einen Centralstoß und werden daher auch genau so verändert, wie beim Centralstoß, die mit der Berührungsebene parallelen Geschwindigkeiten hingegen verursachen gar keinen Stoß und bleiben daher unverändert. Vereinigt man die nach den Regeln des Centralstoßes veränderte Normalgeschwindigkeit eines jeden Körpers mit der unverändert gebliebenen Tangentialgeschwindigkeit, so erhält man die resultirenden Geschwindigkeiten dieser Körper nach dem Stoße. Setzen wir die Winkel, welche die Bewegungsrichtungen mit der Normale einschließen, α_1 und α_2, also $C_1 S_1 N = \alpha_1$ und $C_2 S_2 N = \alpha_2$, so erhalten wir für die Normalgeschwindigkeiten $S_1 E_1$ und $S_2 E_2$ die Werthe $c_1 \cos. \alpha_1$ und $c_2 \cos. \alpha_2$, dagegen für die Tangentialgeschwindigkeiten $S_1 F_1$ und $S_2 F_2$, $c_1 \sin. \alpha_1$ und $c_2 \sin. \alpha_2$. Durch den Stoß erleiden aber die ersteren Geschwindigkeiten Veränderungen, und es geht die erste über in:

Fig. 556.



$$v_1 = c_1 \cos. \alpha_1 - (c_1 \cos. \alpha_1 - c_2 \cos. \alpha_2) \frac{M_2}{M_1 + M_2} (1 + \sqrt{\mu})$$

und die zweite in:

$$v_2 = c_2 \cos. \alpha_2 + (c_1 \cos. \alpha_1 - c_2 \cos. \alpha_2) \frac{M_1}{M_1 + M_2} (1 + \sqrt{\mu}),$$

wofern, wie seither allemal, M_1 und M_2 die Massen beider Körper bezeichnen.

Aus v_1 und $c_1 \, sin. \alpha_1$ ergiebt sich die resultirende Geschwindigkeit $S_1 G_1$ des ersten Körpers:

$$w_1 = \sqrt{v_1^2 + c_1^2 \sin. \alpha_1^2},$$

und aus v_2 und $c_2 \sin. \alpha_2$ die Geschwindigkeit $S_2 \, G_2$ des zweiten Körpers:

$$w_2 = \sqrt{v_2^2 + c_2^2 \sin. \alpha_2^2};$$

auch ergeben sich die Abweichungen der Geschwindigkeitsrichtungen von der Normale durch die Formeln:

$$tang. \beta_1 = \frac{c_1 \sin. \alpha_1}{v_1} \text{ und } tang. \beta_2 = \frac{c_2 \sin. \alpha_2}{v_1},$$

wenn β_1 den Winkel $G_1 \, S_1 \, N$ sowie β_2 den Winkel $G_2 \, S_2 \, N$ bezeichnet.

Beispiel. Zwei Kugeln von 30 und 50 Pfd. Gewicht stoßen sich mit den Geschwindigkeiten $c_1 = 20$ und $c_2 = 25$ Fuß, deren Richtungen um die Winkel $\alpha_1 = 21^0\,35'$ und $\alpha_2 = 65^0\,20'$ von der Normale der Berührungsebene abweichen, in welchen Richtungen und mit welchen Geschwindigkeiten gehen diese Massen nach dem Stoße fort? Es sind die unveränderlichen Seitengeschwindigkeiten:

$c_1 \sin. \alpha_1 = 20 . \sin. 21^0\,35' = 7{,}357$ Fuß und
$c_2 \sin. \alpha_2 = 25 . \sin. 65^0\,20' = 22{,}719$ Fuß,

dagegen die veränderlichen:

$c_1 \cos. \alpha_1 = 20 . \cos. 21^0\,35' = 18{,}598$ Fuß und
$c_2 \cos. \alpha_2 = 25 . \cos. 65^0\,20' = 10{,}433$ Fuß.

Sind die Körper unelastisch, so hat man $\mu = 0$, daher die veränderten Normalgeschwindigkeiten:

$v_1 = 18{,}598 - (18{,}598 - 10{,}433) . {}^{50}/_{80} = 18{,}598 - 5{,}103 = 13{,}495$ Fuß und
$v_2 = 10{,}433 + 8{,}165 . {}^{3}/_{8} = 10{,}433 + 3{,}062 = 13{,}495$ Fuß.

Die resultirenden Geschwindigkeiten sind nun:

$$w_1 = \sqrt{13{,}495^2 + 7{,}357^2} = \sqrt{236{,}24} = 15{,}37 \text{ Fuß und}$$
$$w_2 = \sqrt{13{,}495^2 + 22{,}719^2} = \sqrt{698{,}27} = 26{,}42 \text{ Fuß};$$

für ihre Richtungen hat man:

$$tang. \beta_1 = \frac{7{,}357}{13{,}495},\ log.\ tang. \beta_1 = 0{,}73653 - 1,\ \beta_1 = 28^0\,36' \text{ und}$$

$$tang. \beta_2 = \frac{22{,}719}{13{,}495},\ log.\ tang. \beta_2 = 0{,}22622,\ \beta_2 = 59^0\,17'.$$

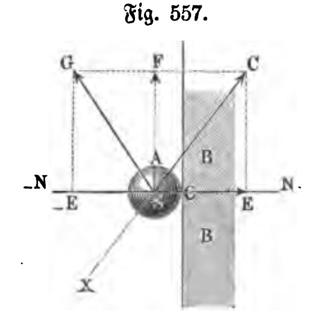
Stoss gegen eine unendlich grosse Masse. Trifft die Masse A, Fig. 557 (a. f. S.), gegen eine andere unendlich große Masse, oder gegen ein unbewegliches Hinderniß BB, hat man also $c_2 = 0$ und $M_2 = \infty$, so folgt: §. 340

$$v_1 = c_1 \cos. \alpha_1 - c_1 \cos. \alpha_1 (1 + \sqrt{\mu}) = - c_1 \cos. \alpha_1 \sqrt{\mu} \text{ und}$$

$$v_2 = 0 + c_1 \cos. \alpha_1 \cdot \frac{M_1 (1 + \sqrt{\mu})}{\infty} = 0 + 0 = 0;$$

ist nun noch $\mu = 0$, so wird auch $v_1 = 0$, ist aber $\mu = 1$, so folgt $v_1 = - c_1 cos. \alpha_1$, d. h. beim unelastischen Stoße geht die Normalgeschwindigkeit ganz verloren, beim elastischen hingegen wird sie in die entgegengesetzte verwandelt. Für den Winkel, um welchen die Bewegungsrichtung nach dem Stoße von der Normale abweicht, ist

Fig. 557.



$$tang.\beta_1 = \frac{c_1 sin.\alpha_1}{v_1} = - \frac{c_1 sin.\alpha_1}{c_1 cos.\alpha_1 \sqrt{\mu}}$$

$$= - tang.\alpha_1 \sqrt{\frac{1}{\mu}};$$

für unelastische Körper wird also:

$$tang.\beta_1 = - \frac{tang.\alpha_1}{0} = \infty \text{; d. i. } \beta_1 = 90^0,$$

und für elastische:

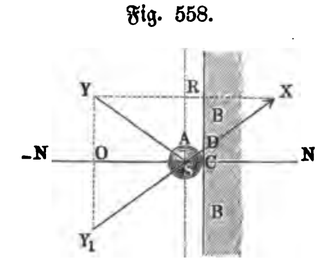
$$tang.\beta_1 = - tang.\alpha_1, \text{ d. i. } \beta_1 = - \alpha_1.$$

Nach dem Stoße eines unelastischen Körpers gegen ein unelastisches Hinderniß geht also der erstere mit der Tangentialgeschwindigkeit $c_1 sin.\alpha_1$ in der Richtung SF der Berührungsebene fort, nach dem Stoße eines elastischen Körpers gegen ein elastisches Hinderniß aber geht der Körper mit unveränderter Geschwindigkeit in einer Richtung SG fort, die mit der Normale $N\overline{N}$ und der anfänglichen Richtung XS in eine Ebene fällt, und mit der Normale denselben Winkel $GS\overline{N}$ einschließt, wie die Bewegungsrichtung vor dem Stoße mit ebenderselben auf der entgegengesetzten Seite. Man nennt den Winkel $XS\overline{N}$, welchen die Bewegungsrichtung vor dem Stoße mit der Normale oder dem Lothe einschließt, den **Einfallswinkel** (franz. angle d'incidence; engl. angle of incidence) und den Winkel $GS\overline{N}$, welchen die Bewegungsrichtung nach dem Stoße ebendamit bildet, den **Austritts-** oder **Reflexionswinkel** (franz. angle de réflexion; engl. angle of reflexion), und kann hiernach behaupten: **beim vollkommen elastischen Stoße fallen Reflexions- und Einfallswinkel mit dem Einfallslothe in einerlei Ebene und es sind beide Winkel einander gleich.**

Beim unvollkommen elastischen Stoße ist das Verhältniß $\sqrt{\mu}$ der Tangenten dieser Winkel gleich dem Verhältnisse der durch die Ausdehnung zurückgegebenen Geschwindigkeit zu der durch die Compression verlorenen Geschwindigkeit. Mit Hülfe dieses Gesetzes läßt sich nun leicht die Richtung finden, in welcher der Körper A, Fig. 558, gegen das unbewegliche Hinder-

niß BB zu stoßen ist, damit er nach dem Stoße eine gewisse Richtung SY verfolge. Ist der Stoß ein elastischer, so fällen wir von einem Punkte Y der gegebenen Richtung das Perpendikel YO gegen das Einfallsloth $N\overline{N}$, verlängern dasselbe, bis die Verlängerung OY_1 dem Perpendikel selbst gleich wird; SY_1 ist dann die in Frage stehende Stoßrichtung, denn es ist, dieser Construction zufolge, Winkel $\overline{N}SY_1 = \overline{N}SY$. Ist der Stoß unvollkommen elastisch, so mache man $OY_1 = \sqrt{\mu}\,.\,OY$; dann ist Y_1S ebenfalls die gesuchte Anfangsrichtung, da

Fig. 558.



$$\frac{tang.\,\alpha_1}{tang.\,\beta_1} = \frac{OY_1}{OY} = \sqrt{\mu} \text{ ausfällt.}$$

Fällt man ein Loth YR gegen die Linie SR parallel zur Berührungsebene und macht man dessen Verlängerung $RX = \sqrt{\frac{1}{\mu}}\,\overline{RY}$, so bekommt man aus leicht einzusehenden Gründen ebenfalls in SX die gesuchte Einfallsrichtung.

Anmerkung. Die Theorie des schiefen Stoßes findet ihre vorzüglichste Anwendung beim Billardspiel. S. Théorie mathématique des effets du jeu de billard, par Coriolis. Nach Coriolis ist beim Anstoße eines Billardballes gegen die Bande das Verhältniß der zurückgegebenen Geschwindigkeit zur Einfallsgeschwindigkeit, $= 0{,}5$ bis $0{,}6$, also $\mu = 0{,}5^2 = 0{,}25$ bis $0{,}6^2 = 0{,}36$. Mit Hülfe dieses Werthes läßt sich nun auch die Richtung angeben, in welcher ein Ball A gegen eine Bande BB zu stoßen ist, damit er nach einem gegebenen Punkte Y von dieser zurückgeworfen werde. Man fälle von dem gegebenen Punkte Y das Perpendikel YR gegen die mit der Bande parallel laufende Schwerlinie des Balles, verlängere dasselbe um $RX = \sqrt{\frac{1}{\mu}} = {}^{10}/_6$ bis ${}^{10}/_5$ seines Werthes und ziehe die Gerade Y_1X; der sich herausstellende Durchschnitt D ist die Stelle, nach welcher man den Ball A zu stoßen hat, damit er durch Bricol nach Y gelange. Durch die Drehbewegung des Balles wird dieses Verhältniß allerdings noch etwas geändert.

Stossreibung. Bei dem schiefen Stoße entsteht auch eine Reibung zwischen den sich stoßenden Körpern, welche die Seitengeschwindigkeiten in der Richtung der Berührungsebene abändert. Die Reibung F des Stoßes bestimmt sich wie die Reibung des Druckes; bezeichnet P die Stoßkraft und φ den Reibungscoefficienten, so ist sie $F = \varphi P$. Sie unterscheidet sich nur insofern von der Reibung des Druckes, als sie, wie der Stoß selbst, nur während einer sehr kleinen Zeit wirksam ist. Die durch sie hervorgebrachten §. 341

Geschwindigkeitsveränderungen sind aber deshalb nicht unmeßbar klein, denn die Stoßkraft P, und folglich auch der Theil φP derselben, ist in der Regel sehr groß. Bezeichnet man die stoßende Masse durch M und die durch die Stoßkraft P erzeugte Normalacceleration durch p, so hat man:

$$P = Mp, \text{ und daher } F = \varphi Mp,$$

sowie die Zögerung oder negative Acceleration der Reibung während des Stoßes:

$$\frac{F}{M} = \varphi p;$$

d. i. φmal so groß, als die der Normalkraft. Nun haben aber die Wirkungen beider Kräfte gleiche Zeitdauer; es ist daher auch die durch die Reibung erzeugte Geschwindigkeitsveränderung φmal so groß, als die durch den Stoß bewirkte Veränderung in der Normalgeschwindigkeit.

Fällt eine Masse M auf einen horizontal fortlaufenden Schlitten senkrecht herab, und wird durch diesen Zusammenstoß die Geschwindigkeit c dieser Masse ganz vernichtet, so erleidet die Bewegung des Schlittens, dessen Masse $= M_1$ sein möge, die Retardation

$$\frac{F}{M + M_1} = \frac{\varphi M p}{M + M_1},$$

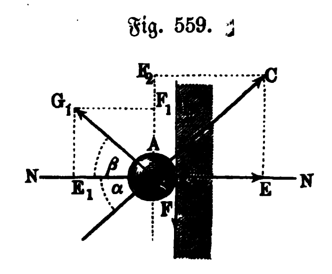
und folglich auch die Geschwindigkeit desselben den Verlust:

$$v = \frac{\varphi M}{M + M_1} c.$$

Die Richtigkeit dieser Theorie hat Morin durch Versuche dargethan (s. dessen Notions fondamentales de Mécanique).

In dem Falle, wenn ein Körper gegen eine unbewegliche Masse BB unter dem Einfallswinkel α, Fig. 559, stößt, ist nach dem vorigen Paragraphen die Veränderung in der Normalgeschwindigkeit:

Fig. 559.



$$w = c \cos. \alpha \, (1 + \sqrt{\mu});$$

daher die durch die Reibung bewirkte Veränderung in der Tangentialgeschwindigkeit:

$$= \varphi w = \varphi c \, (1 + \sqrt{\mu}) \cos \alpha.$$

Es geht also nach dem Stoße die Seitengeschwindigkeit $c \sin. \alpha$ in

$$c \sin. \alpha - \varphi c \, (1 + \sqrt{\mu}) \cos. \alpha$$
$$= [\sin. \alpha - \varphi \cos. \alpha (1 + \sqrt{\mu})] \, c$$

über und sie fällt bei vollkommen elastischen Körpern

$$= (\sin. \alpha - 2 \varphi \cos. \alpha) c,$$

dagegen bei unelastischen Körpern

$$= (\sin. \alpha - \varphi \cos. \alpha) c$$

aus.

Durch die Reibung während des Stoßes erhalten die Körper sehr oft eine Drehung um ihren Schwerpunkt, oder es wird, wenn eine Drehbewegung vor dem Stoße schon vorhanden war, dieselbe abgeändert. Ist das Trägheitsmoment des runden Körpers A, in Hinsicht auf seinen Schwerpunkt S, $= Mk^2$, und der Drehungshalbmesser $SC = a$, so hat man die auf den Berührungspunkt C reducirte Masse des Körpers

$$= \frac{Mk^2}{a^2},$$

daher die durch die Reibung F hervorgebrachte Drehbeschleunigung dieses Punktes:

$$p_1 = \frac{F}{Mk^2 : a^2} = \frac{\varphi M p}{Mk^2 : a^2} = \varphi p \cdot \frac{a^2}{k^2},$$

und die entsprechende Geschwindigkeitsveränderung:

$$w_1 = \varphi \frac{a^2}{k^2} \cdot w = \varphi \frac{a^2}{k^2} (1 + \sqrt{\mu})\, c \cos. \alpha.$$

Bei einem Cylinder ist $\frac{a^2}{k^2} = 2$, und bei einer Kugel $\frac{a^2}{k^2} = {}^5/_2$, daher folgt für diese runden Körper die durch den Stoß gegen eine Ebene hervorgebrachte Veränderung in der Umdrehungsgeschwindigkeit:

$$w_1 = 2 \varphi \left(1 + \sqrt{\mu}\right) c \cos. \alpha \text{ und } w_1 = {}^5/_2 \varphi \left(1 + \sqrt{\mu}\right) c \cos. \alpha.$$

Beispiel. Wenn ein Billardball mit 15 Fuß Geschwindigkeit und unter dem Einfallswinkel $\alpha = 45^0$ gegen die Bande stößt, welche Bewegungen nimmt derselbe nach dem Stoße an? Setzt man für $\sqrt{\mu}$ den mittleren Werth 0,55, so hat man die normale Seitengeschwindigkeit nach dem Stoße

$= - \sqrt{\mu} \,.\, c \cos. \alpha = - 0{,}55 \,.\, 15 \,.\, \cos. 45^0 = - 8{,}25 \,.\, \sqrt{{}^1/_2} = - 5{,}833$ Fuß,
und nimmt man mit Coriolis, $\varphi = 0{,}20$ an, so erhält man die Seitengeschwindigkeit parallel zur Bande,

$= c \sin. \alpha - \varphi\, (1 + \sqrt{\mu})\; c \cos. \alpha = (1 - 0{,}20 \,.\, 1{,}55) \,.\, 10{,}607 = 0{,}69 \,.\, 10{,}607$
$= 7{,}319$ Fuß,

auch folgt für den Reflexionswinkel β:

$$tang. \beta = \frac{7{,}319}{5{,}833} = 1{,}2548,$$

also: $\beta = 51^0 27'$,

und die Geschwindigkeit nach dem Stoße bleibt

$$= \frac{5{,}833}{\cos. 51^0 27'} = 9{,}360 \text{ Fuß}.$$

Außerdem nimmt der Ball auch noch die Umdrehungsgeschwindigkeit

$$\frac{5}{2}\varphi . 1{,}55 . 10{,}607 = 8{,}220 \text{ Fuß}$$

um seine verticale Schwerlinie an. Da der Ball sich nicht gleitend, sondern wälzend auf dem Billard fortbewegt, so ist anzunehmen, daß er außer der fortschreitenden Geschwindigkeit $c = 15$ Fuß auch noch eine gleichgroße Umdrehungsgeschwindigkeit besitze und daß sich diese ebenfalls in die Componenten

$$c \cos. \alpha = 10{,}607 \text{ und } c \sin. \alpha = 10{,}607$$

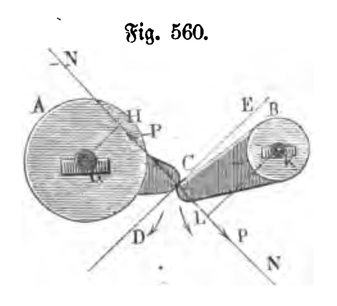
zerlegen lasse. Der erste Component entspricht einer Drehung um eine Axe parallel zur Bandenaxe und geht in

$$c \cos. \alpha - \frac{5}{2}\varphi (1 + \sqrt{\mu})\, c \cos. \alpha = 10{,}607 - 8{,}220 = 2{,}387 \text{ Fuß}$$

über, der andere Component $c \sin. \alpha = 10{,}607$ Fuß entspricht einer Drehung um eine Axe normal zur Bande und bleibt unverändert.

§. 342 **Stoss drehbarer Körper.** Stoßen zwei um feste Axen G und K drehbare Körper A und B, Fig. 560, gegen einander, so stellen sich Geschwindigkeitsveränderungen heraus, welche sich aus den Trägheitsmomenten $M_1 k_1^2$ und $M_2 k_2^2$ der Massen dieser Körper hinsichtlich der festen Axen und mit Hülfe der im Vorstehenden gefundenen Formeln bestimmen lassen. Sind die Perpendikel GH und KL, welche sich von den Drehungsaxen gegen die Stoßlinie fällen lassen, a_1 und a_2, so hat man die auf die Lothpunkte H und L in der Stoßlinie reducirten trägen Massen $= \frac{M_1 k_1^2}{a_1^2}$ und $\frac{M_2 k_2^2}{a_2^2}$, und führt man diese Werthe statt M_1 und M_2 in die Formeln für den freien Centralstoß ein, so bekommt man die Geschwindigkeitsveränderungen der Punkte H und L (§. 338)

Fig. 560.



$$c_1 - v_1 = (c_1 - c_2) \frac{M_2 k_2^2 : a_2^2}{M_1 k_1^2 : a_1^2 + M_2 k_2^2 : a_2^2} (1 + \sqrt{\mu})$$

$$= (c_1 - c_2) \frac{M_2 k_2^2 a_1^2}{M_1 k_1^2 a_2^2 + M_2 k_2^2 a_1^2} (1 + \sqrt{\mu}), \text{ sowie}$$

$$v_2 - c_2 = (c_1 - c_2) \frac{M_1 k_1^2 : a_1^2}{M_1 k_1^2 : a_1^2 + M_2 k_2^2 : a_2^2} (1 + \sqrt{\mu})$$

$$= (c_1 - c_2) \frac{M_1 k_1^2 a_2^2}{M_1 k_1^2 a_2^2 + M_2 k_2^2 a_1^2} (1 + \sqrt{\mu}),$$

wofern c_1 und c_2 die Geschwindigkeiten dieser Punkte vor dem Stoße waren.

Führen wir aber die Winkelgeschwindigkeiten ein, bezeichnen wir die Winkelgeschwindigkeiten vor dem Stoße durch ε_1 und ε_2 und die nach dem

Stoße durch ω_1 und ω_2, so haben wir $c_1 = a_1 \varepsilon_1$, $c_2 = a_2 \varepsilon_2$, sowie $v_1 = a_1 \omega_1$ und $v_2 = a_2 \omega_2$ zu setzen, und erhalten für den stoßenden Körper den Verlust an Winkelgeschwindigkeit

$$\varepsilon_1 - \omega_1 = a_1 (a_1 \varepsilon_1 - a_2 \varepsilon_2) \frac{M_2 k_2^2}{M_1 k_1^2 a_2^2 + M_2 k_2^2 a_1^2} (1 + \sqrt{\mu}),$$

und für den gestoßenen Körper, den Gewinn an Winkelgeschwindigkeit

$$\omega_2 - \varepsilon_2 = a_2 (a_1 \varepsilon_1 - a_2 \varepsilon_2) \frac{M_1 k_1^2}{M_1 k_1^2 a_2^2 + M_2 k_2^2 a_1^2} (1 + \sqrt{\mu}),$$

folglich die Winkelgeschwindigkeiten nach dem Stoße selbst:

$$\omega_1 = \varepsilon_1 - a_1 (a_1 \varepsilon_1 - a_2 \varepsilon_2)(1 + \sqrt{\mu}) \frac{M_2 k_2^2}{M_1 k_1^2 a_2^2 + M_2 k_2^2 a_1^2}$$

und

$$\omega_2 = \varepsilon_2 + a_2 (a_1 \varepsilon_1 - a_2 \varepsilon_2)(1 + \sqrt{\mu}) \frac{M_1 k_1^2}{M_1 k_1^2 a_2^2 + M_2 k_2^2 a_1^2}.$$

Sind beide Körper vollkommen elastisch, so hat man $\mu = 1$, also:

$$1 + \sqrt{\mu} = 2,$$

und sind sie unelastisch, so hat man $\mu = 0$, also:

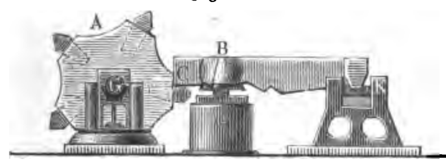
$$1 + \sqrt{\mu} = 1.$$

Im letzteren Falle ist der durch den Stoß hervorgebrachte Verlust an lebendiger Kraft

$$= (a_1 \varepsilon_1 - a_2 \varepsilon_2)^2 \cdot \frac{M_1 k_1^2 . M_2 k_2^2}{M_1 k_1^2 a_2^2 + M_2 k_2^2 a_1^2}.$$

Beispiel. Die armirte Welle AG, Fig. 561, hat das Trägheitsmoment in Hinsicht auf ihre Umdrehungsaxe G,

Fig. 561.



$= M_1 k_1^2 = 40000 : g$,
und der Stirnhammer BK dasselbe in Hinsicht auf seine Axe K,
$= 150000 : g$,
der Hebelarm GC der Welle ist 2 Fuß sowie der Hebelarm KC des Hammers 6 Fuß, und die Winkelgeschwindigkeit der Welle im Augenblicke des Stoßes an den Hammer = 1,05 Fuß. Wie groß ist diese Geschwindigkeit nach dem Stoße und welche Leistung geht durch jeden Stoß verloren, wenn gänzlicher Mangel an Elasticität vorhanden vorausgesetzt wird? Es ist die gesuchte Winkelgeschwindigkeit der Welle:

$$\omega_1 = 1{,}05 - \frac{4 . 1{,}05 . 150000}{40000 . 36 + 150000 . 4} = 1{,}05 \left(1 - \frac{60}{204}\right) = 1{,}05 . 0{,}706$$
$$= 0{,}741 \text{ Fuß},$$

und die des Hammers,

$$= \frac{2 . 6 . 1{,}05 . 4}{204} \text{ auch} = \omega_1 \cdot \frac{GC}{KC} = 0{,}741 . \tfrac{2}{6}, = 0{,}247 \text{ Fuß},$$

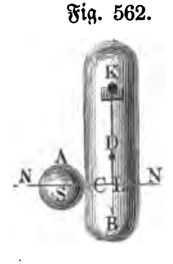
d. i. dreimal so klein, als die der Welle. Der Arbeitsverlust bei jedem Anstoße ist

$$A = \frac{(2\,.\,1{,}05)^2}{2g} \cdot \frac{40000\,.\,150000}{40000\,.\,36 + 150000\,.\,4} = 0{,}016\,.\,(2{,}1)^2 \cdot \frac{600000}{144 + 60}$$

$$= 0{,}016\,.\,4{,}41 \cdot \frac{150000}{51} = \frac{10584}{51} = 207{,}5 \text{ Fußpfund.}$$

§. 343 **Stoss eines schwingenden Körpers.** Kommt ein freier und in fortschreitender Bewegung befindlicher Körper A, Fig. 562, mit einem um eine feste Axe K drehbaren Körper BCK zum Stoße, so findet man die Geschwindigkeiten nach dem Stoße, indem man in den Formeln des vorigen Paragraphen statt $a_1\,\varepsilon_1$ und $a_1\,\omega_1$ die progressiven Geschwindigkeiten c_1 und v_1, und statt $\frac{M_1 k_1^2}{a_1^2}$ die träge Masse M_1 des ersten Körpers einsetzt, die übrigen Bezeichnungen aber unverändert läßt. Es ist hiernach die Geschwindigkeit der ersten Masse nach dem Stoße:

Fig. 562.



$$v_1 = c_1 - (c_1 - a_2\,\varepsilon_2)\,(1 + \sqrt{\mu}) \cdot \frac{M_2\,k_2^2}{M_1\,a_2^2 + M_2\,k_2^2},$$

und die Winkelgeschwindigkeit der zweiten:

$$\omega_2 = \varepsilon_2 + a_2\,(c_1 - a_2\,\varepsilon_2)\,(1 + \sqrt{\mu}) \cdot \frac{M_1}{M_1\,a_2^2 + M_2\,k_2^2}.$$

Ist die Masse M_2 in Ruhe, also $\varepsilon_2 = 0$, so hat man:

$$v_1 = c_1 - c_1\,(1 + \sqrt{\mu}) \cdot \frac{M_2\,k_2^2}{M_1\,a_2^2 + M_2\,k_2^2}$$

und

$$\omega_2 = c_1\,(1 + \sqrt{\mu}) \cdot \frac{M_1\,a_2}{M_1\,a_2^2 + M_2\,k_2^2}.$$

Ist hingegen M_1 in Ruhe, stößt also die oscillirende Masse, so hat man $c_1 = 0$, daher:

$$v_1 = a_2\,\varepsilon_2\,(1 + \sqrt{\mu}) \cdot \frac{M_2\,k_2^2}{M_1\,a_2^2 + M_2\,k_2^2}$$

und

$$\omega_2 = \varepsilon_2 \left(1 - (1 + \sqrt{\mu})\,\frac{M_1\,a_2^2}{M_1\,a_2^2 + M_2\,k_2^2}\right).$$

Die Geschwindigkeit, welche einer ruhenden Masse von einer anderen durch den Anstoß ertheilt wird, hängt nicht allein von der Geschwindigkeit des Anstoßes und von den Massen der Körper, sondern auch von dem Abstande $KL = a_2$ ab, um welchen die Stoßrichtung $N\overline{N}$ von der Axe K des drehbaren Körpers absteht. Stößt die freie Masse, so nimmt die drehbare Masse die Winkelgeschwindigkeit

$$\omega_2 = c_1 \, (1 + \sqrt{\mu}) \, \frac{M_1 \, a_2}{M_1 \, a_2^2 + M_2 \, k_2^2}$$

an, und trifft die schwingende Masse gegen die freie, so erhält diese die Geschwindigkeit

$$v_1 = \varepsilon_2 \, (1 + \sqrt{\mu}) \, \frac{M_2 \, k_2^2 \, . \, a_2}{M_1 \, a_2^2 + M_2 \, k_2^2};$$

es werden also beide Geschwindigkeiten um so größer, je größer

$$\frac{a_2}{M_1 \, a_2^2 + M_2 \, k_2^2} \text{ oder } \frac{1}{M_1 \, a_2 + \frac{M_2 \, k_2^2}{a_2}},$$

also je kleiner $M_1 \, a_2 + M_2 \, \frac{k_2^2}{a_2}$ ist.

Setzen wir statt a_2, $a \pm x$, wo x sehr klein ist, so bekommen wir den Werth des letzteren Ausdruckes:

$$M_1 \, (a \pm x) + \frac{M_2 \, k_2^2}{a \pm x} = M_1 \, a \pm M_1 \, x + \frac{M_2 \, k_2^2}{a} \left(1 \mp \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} \mp \cdots \right),$$

oder, wegen der Kleinheit der Potenzen von x,

$$= M_1 \, a + \frac{M_2 \, k_2^2}{a} \pm \left(M_1 - \frac{M_2 \, k_2^2}{a^2}\right) x + \cdots$$

Soll nun a dem kleinsten aller Werthe von $M_1 \, a_2 + \frac{M_2 \, k_2^2}{a_2^2}$ entsprechen, so muß das Glied $\pm \left(M_1 - \frac{M_2 \, k_2^2}{a^2}\right) x$ wegfallen, weil dasselbe bei einem Zusatze (x) ein anderes Zeichen erhält, als bei einer Abnahme $(- \, x)$.

Fig. 563.

Es muß also:

$$\left(M_1 - \frac{M_2 \, k_2^2}{a^2}\right) x = \text{Null, d. i.:}$$

$$\frac{M_2 \, k_2^2}{a^2} = M_1, \text{ folglich}$$

$$a = \sqrt{\frac{M_2 \, k_2^2}{M_1}} = k_2 \sqrt{\frac{M_2}{M_1}}$$

sein.

Wenn man also in diesem Abstande (a) den einen Körper gegen den anderen stößt, so nimmt dieser die größte Geschwindigkeit an, und zwar:

$$1) \; \omega_2 = (1 + \sqrt{\mu}) \, \frac{c_1}{2 \, k_2} \sqrt{\frac{M_1}{M_2}} = (1 + \sqrt{\mu}) \, \frac{c_1}{2 \, a},$$

in dem Falle, wenn der drehbare Körper gestoßen wird; und

$$2) \; v_1 = \tfrac{1}{2} \, k_2 \, \varepsilon_2 \, (1 + \sqrt{\mu}) \sqrt{\frac{M_2}{M_1}} = (1 + \sqrt{\mu}) \, \frac{\varepsilon_2 \, a}{2},$$

wenn der freie Körper einen Stoß erhält.

Man nennt den in der Stoßlinie befindlichen Endpunkt L des der größten Geschwindigkeit entsprechenden Abstandes oder Hebelarmes $a = k_2 \sqrt{\frac{M_2}{M_1}}$ zuweilen, jedoch unpassend, Mittelpunkt des Stoßes, angemessener vielleicht Stoßpunkt.

Es ist derselbe nicht mit dem oben (§. 313) gefundenen Mittelpunkte des Stoßes zu verwechseln, dessen Entfernung von der Umdrehungsaxe durch den Ausdruck

$$a = \frac{M_2 k_2^2}{M_2 s} = \frac{k_2^2}{s},$$

worin s den Abstand des Schwerpunktes der Masse M_2 von der Umdrehungsaxe bezeichnet, bestimmt ist. Wenn die Richtung $\overline{NN}$ des Zusammenstoßes der Massen M_1 und M_2 durch den Mittelpunkt des Stoßes geht, so fällt die Reaction auf die Umdrehungsaxe der letzteren Null aus.

Damit z. B. ein Hammer beim Aufschlagen nicht pralle, d. i. auf die Hand, welche ihn hält, oder auf die Hülse, um welche er sich dreht, nicht reagire, ist es nöthig, daß der Schlag durch den Mittelpunkt des Stoßes gehe.

Wird der aufgehangene Körper KB im Stoßpunkte, also im Abstande $a = k_2 \sqrt{\frac{M_2}{M_1}}$ von der Axe K, durch eine Masse M_1 mit der Kraft P gestoßen, so ist die Reaction auf die Axe:

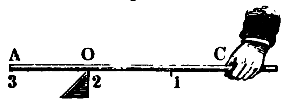
$$P_1 = P + R = P - \varkappa M_2 s \text{ (s. §. 313).}$$

Da $P = \frac{\varkappa M_2 k_2^2}{a}$ ist, so folgt die Winkelacceleration $\varkappa = \frac{Pa}{M_2 k_2^2}$ und $\varkappa M_2 s = \frac{M_2 s a}{M_2 k^2} P$, so daß nun die gesuchte Reaction:

$$P_1 = P\left(1 - \frac{M_2 s a}{M_2 k_2^2}\right) = P\left(1 - \frac{s a}{k_2^2}\right) = P\left(1 - \frac{s}{k_2}\sqrt{\frac{M_2}{M_1}}\right) \text{ folgt.}$$

Beispiele. 1) Bei einer prismatischen Stange CA, Fig. 564, die sich um einen ihrer Endpunkte dreht, steht der Mittelpunkt des Stoßes um

Fig. 564.



$$CO = a = \frac{\frac{1}{3} r^2}{\frac{1}{2} r} = \frac{2}{3} r = \frac{2}{3} CA$$

von der Axe ab. Wenn man also die Stange an einem Ende festhält, und mit dem in der Entfernung $CO = \frac{2}{3} CA$ befindlichen Punkte auf ein Hinderniß O aufschlägt, so wird man kein Prallen fühlen. Der Stoßpunkt dieser Stange steht dagegen um $r \sqrt{\frac{M_2}{3 M_1}}$ von C ab; ist z. B. die Masse des gestoßenen Körpers, $M_1 = M_2$, so hat man diesen Abstand $= \frac{r}{\sqrt{3}} = 0{,}5774\, r$. In diesem Abstande muß also die Stange CA an die ruhende Masse M_1 anschlagen, damit diese mit der größten Geschwindigkeit fortgeht.

2) Bei einem Parallelepipede BDE, Fig. 565, welches ſich um eine zu vier Seiten deſſelben parallel gehende und um $SA = s$ vom Schwerpunkt abſtehende Axe $X\overline{X}$ dreht, iſt der Abſtand AO des Stoßmittelpunktes O von der Axe:

$$a = \frac{s^2 + \frac{1}{3} d^2}{s},$$

Fig. 565.

wo d die halbe Diagonale CD der Seitenflächen bezeichnet, durch welche die Axe $X\overline{X}$ hindurchgeht (§. 287). Ginge die Stoßkraft P durch den Stoßpunkt, ſo hätte man:

$$a = k_2 \sqrt{\frac{M_2}{M_1}} = \sqrt{(s^2 + \frac{1}{3} d^2) \frac{M_2}{M_1}},$$

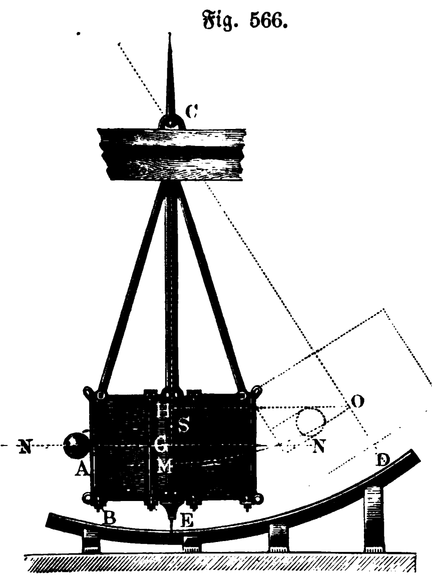
und daher die Reaction auf die Axe:

$$P_1 = P\left(1 - \frac{s\,a}{k_2^2}\right)$$

$$= P\left(1 - \frac{s}{\sqrt{s^2 + \frac{1}{3} d^2}} \sqrt{\frac{M_2}{M_1}}\right).$$

§. 344 **Ballistisches Pendel.** Eine Anwendung der im Vorſtehenden entwickelten Lehren findet man in der Theorie des balliſtiſchen Pendels oder des Pendels von Robins (franz. pendule ballistique; engl. ballistic pendulum). Daſſelbe beſteht in einer großen, um eine horizontale Axe C drehbaren Maſſe M, Fig. 566, welche durch gegen ſie abgeſchoſſene Geſchützkugeln A in Schwingungen verſetzt wird und dazu dient, die Geſchwindigkeiten derſelben zu ermitteln. Damit ein möglichſt unelaſtiſcher Stoß eintrete, iſt in der vorderen Seite, wo die Kugel anſchlägt, eine Oeffnung angebracht, die man von Zeit zu Zeit mit friſchem Holze oder Thon u. ſ. w. ausfüllt. Es bleibt dann auch die Kugel nach dem jedesmaligen Schuſſe in dieſen Maſſen ſtecken und ſchwingt mit dem ganzen Körper gemeinſchaftlich. Zur Ermittelung der Geſchwindigkeit der Kugel iſt es nöthig, den Elongationswinkel dieſes Pendels zu kennen; deshalb wird noch ein Gradbogen BD angebracht und ein Stift E unter dem Schwerpunkte des Pendels befeſtigt, der an dem erſteren hingleitet.

Fig. 566.



Nach dem vorſtehenden Paragraphen iſt die Winkelgeſchwindigkeit des balliſtiſchen Pendels nach dem Anſtoße der Kugel:

$$\omega = \frac{M_1 a_2 c_1}{M_1 a_2^2 + M_2 k_2^2},$$

wenn M_1 die Masse der Kugel, $M_2 k_2^2$ das Trägheitsmoment des Pendels, c_1 die Geschwindigkeit der Kugel und a_2 den Hebelarm CG des Stoßes oder den Abstand der Stoßlinie $N\overline{N}$ von der Drehungsaxe des Pendels bezeichnet. Ist die Entfernung CM des Schwingungspunktes M der ganzen Masse sammt Kugel vom Drehpunkte C, d. i. die Länge des einfachen Pendels, welches mit dem ballistischen gleiche Schwingungsdauer hat, $= r$, und der Elongationswinkel $ECD = \alpha$, so hat man die Steighöhe MH des isochron schwingenden Pendels:

$$h = CM - CH = r - r\cos.\alpha = r\,(1 - \cos.\alpha) = 2r\left(\sin.\frac{\alpha}{2}\right)^2,$$

und daher die Geschwindigkeit im untersten Punkte seiner Bahn:

$$v = \sqrt{2gh} = 2\sqrt{gr}\,\sin.\frac{\alpha}{2},$$

oder die entsprechende Winkelgeschwindigkeit:

$$\omega = \frac{v}{r} = 2\sqrt{\frac{g}{r}}\cdot\sin.\frac{\alpha}{2}.$$

Durch Gleichsetzen dieser beiden Werthe für die Winkelgeschwindigkeit folgt:

$$c_1 = \frac{M_1 a_2^2 + M_2 k_2^2}{M_1 a_2}\cdot 2\sqrt{\frac{g}{r}}\cdot\sin.\frac{\alpha}{2}.$$

Nun ist aber der Theorie des einfachen Pendels zufolge:

$$r = \frac{\text{Trägheitsmoment}}{\text{statisches Moment}} = \frac{M_1 a_2^2 + M_2 k_2^2}{(M_1 + M_2)\,s},$$

wenn s den Abstand CS des Schwerpunktes S von der Drehaxe bezeichnet; es folgt daher:

$$M_1 a_2^2 + M_2 k_2^2 = (M_1 + M_2)\,s r \text{ und}$$

$$c_1 = 2\left(\frac{M_1 + M_2}{M_1}\right)\cdot\frac{s}{a_2}\sqrt{gr}\,.\,\sin.\frac{\alpha}{2}.$$

Macht das Pendel in der Minute n Schwingungen, so ist die Schwingungsdauer:

$$\pi\sqrt{\frac{r}{g}} = \frac{60''}{n}, \text{ daher } \sqrt{gr} = \frac{60''.g}{n\pi},$$

und die gesuchte Kugelgeschwindigkeit:

$$c_1 = \frac{M_1 + M_2}{M_1}\cdot\frac{120gs}{n\pi a_2}\cdot\sin.\frac{\alpha}{2}.$$

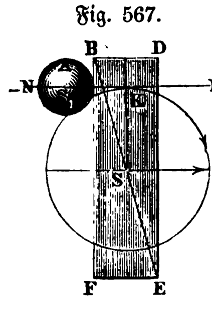
Beispiel. Wenn ein ballistisches Pendel von 3000 Pfund Gewicht durch eine angeschossene Kugel von 6 Pfund in Schwingungen versetzt wird, deren Elongation 15° mißt, wenn ferner der Abstand s des Schwerpunktes von der Axe, $= 5$ Fuß und der Abstand der Schußlinie von eben dieser Axe, $= 5\frac{1}{2}$ Fuß beträgt, und

endlich die Zahl der Schwingungen in einer Minute $n = 40$ ausfällt, so ist nach obiger Formel die Geschwindigkeit der Kugel im Augenblicke des Anstoßes:

$$c = \frac{3006}{6} \cdot \frac{120 \,.\, 31{,}25 \,.\, 5}{40 \,.\, 3{,}1416 \,.\, 5{,}5} \, sin. \, 7^1/_2{}^0 = \frac{501 \,.\, 3750 \,.\, sin. \, 7^0 \, 30'}{44 \,.\, 3{,}1416} = 1774 \text{ Fuß.}$$

Excentrischer Stoss. Untersuchen wir endlich noch einen einfachen Fall des excentrischen Stoßes, wenn beide Massen vollkommen frei sind. Wenn zwei Körper A und BE, Fig. 567, so zusammenstoßen, §. 345

Fig. 567.



daß die Richtung $N\overline{N}$ des Stoßes durch den Schwerpunkt S_1 des einen Körpers hindurch und vor dem Schwerpunkt S des anderen Körpers vorbeigeht, so ist der Stoß in Hinsicht auf den ersten Körper centrisch und in Hinsicht auf den anderen excentrisch. Die Wirkungen dieses excentrischen Stoßes lassen sich aber nach dem Lehrsatze in §. 281 finden, wenn man annimmt: erstens, der zweite Körper sei frei und die Stoßrichtung gehe durch den Schwerpunkt S selbst, und zweitens, dieser Körper werde im Schwerpunkte festgehalten und die Stoßkraft wirke als eine Umdrehungskraft. Ist nun c_1 die anfängliche Geschwindigkeit von A, c die des Schwerpunktes von BE, und gehen beide Geschwindigkeiten durch den Stoß in v_1 und v über, so bleibt, wie in §. 332, $M_1 v_1 + Mv = M_1 c_1 + Mc$. Ist ferner ε die anfängliche Winkelgeschwindigkeit des Körpers BE bei seiner Umdrehung um die Axe durch den Schwerpunkt und senkrecht gegen die Ebene $N\overline{N}S$, geht diese Geschwindigkeit durch den Stoß in ω über, und bezeichnet man das Trägheitsmoment dieses Körpers in Hinsicht auf S durch Mk^2, und die Excentricität oder den Abstand SK des Schwerpunktes S von der Stoßrichtung durch s, so hat man auch

$$M_1 v_1 + \frac{Mk^2}{s^2} \cdot s\,\omega = M_1 c_1 + \frac{Mk^2}{s^2} s\,\varepsilon.$$

Sind beide Körper unelastisch, so haben die Berührungspunkte beider am Ende des Stoßes gleiche Geschwindigkeit, es ist also noch $v_1 = v + s\,\omega$. Bestimmt man aus den vorigen Gleichungen v und ω durch v_1 und setzt man die erhaltenen Werthe in die letzte Gleichung, so erhält man:

$$v_1 = \frac{M_1 (c_1 - v_1)}{M} + c + \frac{M_1 s^2 (c_1 - v_1)}{Mk^2} + s\,\varepsilon,$$

und hieraus bestimmt sich der Geschwindigkeitsverlust des ersten Körpers:

$$c_1 - v_1 = \frac{Mk^2 (c_1 - c - s\,\varepsilon)}{(M_1 + M)\,k^2 + M_1 s^2},$$

der Gewinn an progressiver Geschwindigkeit des zweiten:

$$v - c = \frac{M_1 k^2 (c_1 - c - s\,\varepsilon)}{(M_1 + M)\,k^2 + M_1 s^2},$$

und der Gewinn an Winkelgeschwindigkeit desselben:

$$\omega - \varepsilon = \frac{M_1 s\,(c_1 - c - s\,\varepsilon)}{(M_1 + M)\,k^2 + M_1 s^2}.$$

Beim vollkommen elastischen Stoße sind diese Werthe doppelt und beim unvollkommen elastischen Stoße $(1 + \sqrt{\mu})$ mal so groß.

Beispiel. Trifft eine eiserne Kugel A von 65 Pfund Gewicht das anfänglich in Ruhe befindliche Parallelepiped BE, Fig. 567, aus Tannenholz mit 36 Fuß Geschwindigkeit, ist die Länge dieses Körpers 5 Fuß, die Breite 3 Fuß und die Dicke 2 Fuß, und weicht die Stoßrichtung $N\overline{N}$ um $SK = s = 1^3/_4$ Fuß von dem Schwerpunkte S ab, so ergeben sich folgende Geschwindigkeitswerthe nach dem Stoße. Das specifische Gewicht des Tannenholzes, $= 0{,}45$ angenommen, folgt das Gewicht des parallelepipedischen Körpers, $= 5\,.\,3\,.\,2\,.\,61{,}75\,.\,0{,}45 = 833{,}6$ Pfund. Das Quadrat der halben Diagonale BS der Seitenfläche BDF parallel zur Stoßrichtung ist:

$$(^5/_2)^2 + (^2/_2)^2 = 7{,}25,$$

daher folgt (nach §. 287):

$$k^2 = {}^1/_3\,.\,7{,}25 = 2{,}416\ldots,$$

ferner

$$g\,Mk^2 = 833{,}6\,.\,2{,}416\ldots = 2014{,}0$$

und

$$g\,(M_1 + M)\,k^2 = 898{,}6\,.\,2{,}416\ldots = 2171{,}1;$$

und es ist nun die Geschwindigkeit der Kugel nach dem Stoße:

$$v_1 = c_1 - \frac{Mk^2 c_1}{(M_1 + M)\,k^2 + M_1 s^2} = 36\left(1 - \frac{2014{,}0}{2171{,}1 + 65\,.\,1{,}75^2}\right)$$

$$= 36\left(1 - \frac{2014{,}0}{2370{,}2}\right) = 36\,.\,0{,}1503 = 5{,}410 \text{ Fuß},$$

ferner die Geschwindigkeit des Schwerpunktes des gestoßenen Körpers:

$$v = \frac{M_1 k^2 c_1}{(M_1 + M)\,k^2 + M_1 s^2} = \frac{157{,}08\,.\,36}{2370{,}2} = 2{,}386 \text{ Fuß},$$

und endlich die Winkelgeschwindigkeit desselben:

$$\omega = \frac{M_1 s c_1}{(M_1 + M)\,k^2 + M_1 s^2} = \frac{113{,}75\,.\,36}{2370{,}2} = 1{,}728 \text{ Fuß}.$$

§. 346 **Benutzung der Stosskraft.** Während das Gewicht eines Körpers eine nur von der Masse desselben abhängige und mit derselben gleichmäßig wachsende Kraft ist, hat man es dagegen bei dem Stoße mit einer Kraft zu thun, welche nicht allein mit der Masse, sondern auch mit der Geschwindigkeit und mit der Härte der zusammenstoßenden Körper wächst (s. §. 336 und §. 338) und daher auch beliebig gesteigert werden kann. Deshalb ist auch der Stoß ein vorzügliches Mittel zur Erzeugung größerer Kräfte mit Hülfe kleinerer Massen oder Gewichte, von welchen z. B. beim Zerschlagen oder Zerpochen der Steine, beim Schneiden und Zusammendrücken der Metalle, beim Einschlagen der Nägel, Einrammen der Pfähle u. s. w. vielfacher Gebrauch gemacht wird. Auf der anderen Seite ist aber auch der Stoß ein Mittel, wodurch nicht allein mechanisches Arbeitsvermögen aufgezehrt, sondern auch ein stärkeres Abführen oder Abnutzen der Maschinentheile herbeigeführt und überhaupt die Haltbarkeit

und Dauerhaftigkeit der Maschinen und Bauwerke beeinträchtigt wird, so daß es daher nöthig wird, denselben stärkere Dimensionen zu geben, als wenn sie Züge und Drücke, Gewichte u. s. w. ohne Stöße aufzunehmen hätten.

Schlägt ein fester Körper AB, Fig. 568, auf eine unbegrenzte weiche Masse CDC auf, so drückt er dieselbe mit einer gewissen Kraft zusammen, deren mittlerer Werth P sich mittels der Tiefe $KL = s$ der Eindringung bestimmen läßt, wenn man die Arbeit Ps des Eindringens gleich dem Arbeitsvermögen der trägen Masse des Körpers setzt. Ist M die Masse oder $G = gM$ das Gewicht dieses Körpers (AB) und v die Geschwindigkeit, mit welcher er auf CDC aufschlägt, so beträgt das Arbeitsvermögen seiner trägen Masse

Fig. 568.

$$1/_2\, Mv^2 = \frac{v^2}{2g} G,$$

und es ist daher die gesuchte Kraft, mit welcher die weiche Masse zusammengedrückt wird:

$$P = 1/_2\, \frac{Mv^2}{s} = \frac{v^2}{2gs} G.$$

Wenn man diese Kraft durch den Querschnitt F des Körpers dividirt, so erhält man die Kraft, mit welcher jede Flächeneinheit der lockeren Masse zusammengedrückt ist, und welche folglich auch eine solche Einheit, ohne nachzugeben, tragen kann:

$$p = \frac{P}{F} = \frac{v^2}{2g} \cdot \frac{G}{Fs}.$$

Der Sicherheit wegen belastet man jedoch eine solche Masse nur mit einem kleinen Theil von p, z. B. mit dem zehnten Theile $\left(\frac{p}{10}\right)$.

Die Geschwindigkeit v erhält der Körper M dadurch, daß man ihn von einer Höhe $h = \frac{v^2}{2g}$ frei herabfallen läßt. Führt man diese Höhe statt $\frac{v^2}{2g}$ in die vorige Formel ein, so erhält man einfach den Widerstand der weichen Masse:

$$P = \frac{Gh}{s}, \text{ also für die Flächeneinheit: } p = \frac{Gh}{Fs}.$$

Die Kraft oder der Widerstand P, welchen die lockere oder weiche Masse dem Eindringen eines starren Körpers AB entgegensetzt, ist in der Regel nicht constant, sondern wächst mit der Tiefe s des Eindringens. In vielen Fällen kann man annehmen, daß sie mit s gleichmäßig wächst, und zwar anfangs Null und am Ende des Eindringens doppelt so groß ist als im

Mittel. Da nun in den gefundenen Formeln P den mittleren Kraftwerth angiebt, so hat man folglich dann den Widerstand der weichen Masse oder die Tragkraft P_1 derselben doppelt so groß, als diese Formeln angeben, d. i.

$$P_1 = 2\,P = \frac{2\,G\,h}{s}$$

zu setzen.

Beispiel. Wenn eine Handramme AB, Fig. 568, deren Gewicht $G = 120$ Pfund ist, von einer Höhe $h = 4$ Fuß auf eine Erdmasse herabfällt, und diese beim letzten Schlage noch $^1/_4$ Zoll zusammendrückt, so ist die Tragkraft dieser Masse auf eine dem Querschnitt der Ramme gleiche Fläche:

$$P = \frac{G\,h}{s} = \frac{120.4}{^1/_{48}} = 23040 \text{ Pfund.}$$

Wäre nun noch der Querschnitt F der Ramme, $^5/_4$ Quadratfuß, so würde folglich das Tragvermögen der Erdmasse pr. Quadratfuß

$$p = \frac{P}{F} = \frac{23040}{1,15} = 18432 \text{ Pfund}$$

betragen, wofür jedoch der Sicherheit wegen, vielleicht nur $^1/_{10}\,P_1 = 1843,2$ Pfund anzunehmen ist.

§. 347 **Einrammen der Pfähle.** Durch Einrammen von Pfählen wie AB, Fig. 569, erhält der Erdboden CDC oder eine andere lockere Masse noch eine größere Tragfähigkeit als durch bloßes Zusammenstampfen. Solche Pfähle (franz. pieux; engl. piles) sind 10 bis 30 Fuß lang, 8 bis 20 Zoll dick, und erhalten einen zugespitzten eisernen Schuh B. Der Körper M, der sogenannte Rammklotz, Rammbär oder Hoyer (franz. mouton; engl. battering ram), welchen man 3 bis 30 Fuß hoch herabfallen und auf den Kopf des Pfahles aufschlagen läßt, besteht in der Regel aus Gußeisen, seltener aus Eichenholz, und wiegt 5 bis 20 Ctr.

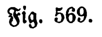
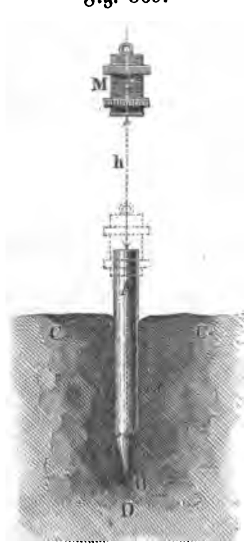


Fig. 569.



Fällt der Rammbär von der senkrechten Höhe h herab, so ist die Geschwindigkeit, mit welcher er auf den Pfahl aufschlägt,

$$c = \sqrt{2\,g\,h},$$

und ist das Gewicht desselben, $= G$, das des Pfahles aber, $= G_1$, so hat man unter der Voraussetzung, daß beide Körper unelastisch sind, die Geschwindigkeit derselben am Ende des Stoßes (s. §. 332):

$$v = \frac{G\,c}{G + G_1},$$

daher die entsprechende Geschwindigkeitshöhe:

$$\frac{v^2}{2g} = \left(\frac{G}{G + G_1}\right)^2 \cdot \frac{c^2}{2g} = \left(\frac{G}{G + G_1}\right)^2 h.$$

Sinkt nun der Pfahl beim letzten Schlage um die Tiefe s ein, so ist der Widerstand des Erdreichs, und also auch die Tragfähigkeit des Pfahles:

$$P = \frac{v^2}{2gs}(G + G_1) = \frac{h}{s} \cdot \frac{G^2}{G + G_1},$$

oder vielmehr, da auch das Gewicht $G + G_1$ des Pfahles sammt Rammbär dem Widerstande des Erdreiches entgegenwirkt:

$$P = \frac{h}{s} \cdot \frac{G^2}{G + G_1} + (G + G_1).$$

In den meisten Fällen ist $G + G_1$ so klein gegen P, daß der letzte Theil der Formel unbeachtet bleiben kann.

Ist das Gewicht G_1 des Pfahles viel kleiner als das Gewicht G des Rammbäres, so kann man

$$v = \frac{Gc}{G + G_1} = c$$

und einfach,

$$P = \frac{h}{s} G \text{ setzen.}$$

Die vorstehende Theorie reicht in der praktischen Anwendung nur dann aus, wenn der Widerstand P ein mäßiger und folglich die Tiefe s des Eindringens nicht sehr klein ist, so daß die Zusammendrückung des Pfahles u. s. w. außer Acht gelassen werden kann. Ist hingegen der Widerstand P sehr groß, und folglich die Tiefe s des Eindringens bei einem Schlage sehr klein, so läßt sich die Zusammendrückung σ des Pfahles nicht mehr als Null ansehen und muß daher mit in Betracht gezogen werden.

Der Pfahl fängt natürlich nicht eher an zu sinken, als bis die Kraft des Stoßes dem Widerstande P des Erdreichs gleich geworden ist. Sind nun $H = \frac{FE}{l}$ und $H_1 = \frac{F_1 E_1}{l_1}$ die Härten des Rammbäres und des Pfahles (im Sinne des §. 336), so beträgt bei der Stoßkraft P die Summe der Zusammendrückungen beider Körper zusammen:

$$\sigma = \frac{P}{H} + \frac{P}{H_1} = \left(\frac{1}{H} + \frac{1}{H_1}\right) P,$$

und es ist daher die auf diese Zusammendrückungen verwendete mechanische Arbeit:

$$L = P\sigma = \left(\frac{1}{H} + \frac{1}{H_1}\right) \frac{P^2}{2}.$$

Wird nun durch diesen ersten Zusammenstoß die Geschwindigkeit c des

Rammbäres in die Geschwindigkeit v umgeändert, so verrichtet Masse $M = \frac{G}{g}$ desselben die mechanische Arbeit

$$L = \frac{1}{2} M c^2 - \frac{1}{2} M v^2 = (c^2 - v^2) \frac{M}{2} = \left(\frac{c^2 - v^2}{2g}\right) G;$$

wir können folglich

$$\left(\frac{c^2 - v^2}{2g}\right) G = \left(\frac{1}{H} + \frac{1}{H_1}\right) \frac{P^2}{2}$$

setzen, und erhalten

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{c^2}{2g} - \left(\frac{1}{H} + \frac{1}{H_1}\right) \frac{P^2}{2G},$$

folglich die Geschwindigkeit des Rammbäres im Augenblicke, wenn der Pfahl einzudringen anfängt:

$$v = \sqrt{c^2 - 2g\left(\frac{1}{H} + \frac{1}{H_1}\right) \frac{P^2}{2G}}.$$

Es ist hiernach zu ermessen, daß dieses Eindringen des Pfahles (und ebenso auch eines Bolzens oder Nagels in eine Wand) nur dann vor sich gehen kann, wenn

$$\frac{c^2}{2g} G > \left(\frac{1}{H} + \frac{1}{H_1}\right) \frac{P^2}{2}$$

ist, wenn also das Gewicht des Rammbäres und die Geschwindigkeit desselben eine dem Widerstande des Erdreiches angemessene Größe haben.

Während der Pfahl eindringt, nimmt die Stoßkraft und folglich auch die Zusammendrückung des Pfahles u. s. w. so lange zu, als die Geschwindigkeit des Rammbäres noch größer ist als die des Pfahles; nachdem aber beide Körper eine gleiche Geschwindigkeit v_1 erlangt haben und die Stoßkraft ihr Maximum erreicht hat, fangen die Körper an, sich allmälig wieder auszudehnen. Bei diesem Ausdehnen geht nicht allein die Geschwindigkeit des Pfahles, sondern auch die des Rammbäres allmälig in Null, sowie auch der Druck zwischen beiden Körpern wieder in P über, und es ist folglich in dem Augenblicke, wenn das weitere Eindringen des Pfahles aufhört, das ganze mechanische Arbeitsvermögen $\frac{c^2}{2g} G$ des Rammbäres durch die Arbeit

$$\left(\frac{1}{H} + \frac{1}{H_1}\right) \frac{P^2}{2}$$

zum Zusammendrücken, und durch die Arbeit

$$Ps$$

zum Eintreiben des Pfahles um die Tiefe s, verbraucht.

Es ist also hiernach:

$$\frac{c^2}{2g} G = G h = \left(\frac{1}{H} + \frac{1}{H_1}\right) \frac{P^2}{2} + Ps,$$

und daher die der Eindringungstiefe s entsprechende Tragkraft:

$$P = \left(\frac{H H_1}{H + H_1}\right)\left(\sqrt{2\left(\frac{H + H_1}{H H_1}\right)\frac{c^2}{2g}\, G + s^2} - s\right).$$

Wäre die Zusammendrückung $\left(\frac{1}{H} + \frac{1}{H_1}\right)\frac{P^2}{2}$ bedeutend kleiner als der Weg s des Pfahles, so könnte man einfach

$$P = \frac{c^2}{2g}\,\frac{G}{s} = \frac{G h}{s} \text{ oder schärfer,}$$

$$P = \frac{G h}{s + \left(\frac{1}{H} + \frac{1}{H_1}\right)\frac{G h}{2 s}} \text{ setzen.}$$

Vergleicht man die Arbeit

$$P s = \frac{G h}{1 + \left(\frac{1}{H} + \frac{1}{H_1}\right)\frac{P}{2 s}}$$

des eindringenden Pfahles mit der Arbeit $G h$, welche das Aufheben des Rammbäres erfordert, so sieht man, daß sich dieselbe der letzteren um so mehr nähert, je kleiner $\left(\frac{1}{H} + \frac{1}{H_1}\right)\frac{P}{2s}$ ausfällt, je größer also die Härten $H = \frac{F E}{l}$ und $H_1 = \frac{F_1 E_1}{l_1}$ des Rammbäres und des Pfahles, d. i. je größer die Querschnitte F und F_1 sowie die Elasticitätsmodel E und E_1, und je kleiner die Längen l und l_1 dieser Körper sind.

Die Wirkungen dieser beiden Körper durch ihre Gewichte kann man ganz außer Acht lassen, da die letzteren in der Regel nur einen kleinen Theil von dem Widerstande P ausmachen. Ebenso läßt sich das Arbeitsvermögen beider Körper, welches dieselben in Folge ihrer, wenn auch nur unvollkommenen Elasticität besitzen, nachdem der Pfahl wieder zur Ruhe übergegangen ist, vernachlässigen, da der durch die weitere Ausdehnung der Körper zurückgeworfene Körper beim Zurückfallen und Wiederaufschlagen auf den Pfahl in der Regel nicht im Stande ist, P zu überwinden und den Pfahl in Bewegung zu setzen. Der Sicherheit wegen belastet man die eingerammten Pfähle nur mit $^1/_{10}$ des gefundenen Widerstandes P, oder nach Befinden noch schwächer. Nach neuerlich angestellten Versuchen vom Herrn Major John Sanders im Fort Delaware (briefliche Mittheilung) läßt sich der Widerstand annähernd einfach

$$P = \frac{G h}{3 s} \text{ setzen.}$$

Beispiel. Ein Pfahl von 1 Quadratfuß = 144 Quadratzoll Querschnitt, 25 Fuß = 25.12 = 300 Zoll Länge und 1200 Pfund Gewicht, ist durch einen 6 Fuß = 72 Zoll hoch herabfallenden Rammbär von 2000 Pfund Gewicht bei der

letzten Hitze von 10 Schlägen noch 2 Zoll tiefer eingetrieben worden, welche Größe hat der Widerstand des Erdreiches? Sieht man von der unbedeutenden Zusammendrückung des gußeisernen Rammbärs ganz ab, und setzt man (nach §. 212) den Elasticitätsmodul des Holzes $E_1 = 1'500000$ Pfund, so erhält man:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{H} + \frac{1}{H_1}\right) = 0 + \frac{l_1}{2 F_1 E_1} = \frac{300}{2 \,.\, 144 \,.\, 1'500000} = \frac{1}{1440000};$$

da nun noch $Gh = 2000 \,.\, 72 = 144000$ Zollpfund und die Tiefe des Eindringens nach einem Schlage, $s = \frac{2}{10} = 0{,}2$ Zoll ist, so erhält man zur Bestimmung des Widerstandes P folgende Gleichung:

$$\frac{P^2}{1440000} + 0{,}2\,P = 144000, \text{ oder } P^2 + 288000\,P = 207360000000.$$

Die Auflösung derselben giebt:

$$P = -144000 + \sqrt{228096000000} = 333590 \text{ Pfund.}$$

Nach der Sanders'schen Formel ist:

$$P = \frac{Gh}{3s} = \frac{144000}{0{,}6} = 290000 \text{ Pfund,}$$

wogegen der alten Formel zufolge,

$$P = \frac{G^2 h}{(G + G_1)s} = \frac{G}{G + G_1} \cdot \frac{Gh}{s} = \frac{2000}{3200} \cdot \frac{144000}{0{,}2} = \frac{5}{8} \,.\, 720000$$
$$= 450000 \text{ Pfund}$$

sein müßte.

Aus $P = 333590$ Pfund ergiebt sich

$$\left(\frac{1}{H} + \frac{1}{H_1}\right)\frac{P^2}{2} = 77269 \text{ Zollpfund,}$$

und daher die Höhe, von welcher der 2000 Pfund schwere Rammbär herabfallen muß, um den Pfahl bewegen zu können:

$$h = \left(\frac{1}{H} + \frac{1}{H_1}\right)\frac{P^2}{2G} = \frac{77269}{2000} = 38{,}6 \text{ Zoll.}$$

§. 348 **Absolute Stossfestigkeit.** Mit Hülfe der Arbeitsmodel der Elasticität und Festigkeit (s. §. 206) kann man nun auch leicht berechnen, unter welchen Bedingungen ein prismatischer Körper AB, Fig. 570, durch einen in der Axenrichtung geführten Stoß bis zur Elasticitätsgrenze ausgedehnt oder, nach Befinden, zerrissen werden kann. Ist G das Gewicht und c die Geschwindigkeit des stoßenden Körpers, so hat man die Arbeit, welche derselbe beim Aufschlagen auf den prismatischen Körper, dessen Gewicht wir mit G_1 bezeichnen wollen, entwickelt:

Fig. 570.

A, G, h, G_1, B

$$L = \frac{c^2}{2g} \cdot \frac{G^2}{G + G_1},$$

oder einfacher, wenn man die Geschwindigkeitshöhe $\frac{c^2}{2g}$ durch h bezeichnet,

$$L = \frac{G^2 h}{G + G_1}.$$

Diese Arbeit wird vorzüglich auf die Ausdehnung der Stange AB, woran der zweite Körper hängt, aufgewendet; ist daher H die Härte, l die Länge, F der Querschnitt und E der Elasticitätsmodul, sowie P die Stoßkraft und λ die durch dieselbe hervorgebrachte Ausdehnung dieser Stange, so hat man:

$$L = \frac{P\lambda}{2} = \frac{P^2}{2H} = \frac{1}{2} H \lambda^2 = \frac{FE}{2l} \lambda^2;$$

folglich:

$$\frac{FE}{2l} \lambda^2 = \frac{G^2 h}{G + G_1},$$

und es ist hiernach die durch dieses Zusammenstoßen bewirkte Ausdehnung λ der Stange leicht zu berechnen.

Soll die Stange hierbei nur bis zur Elasticitätsgrenze ausgedehnt werden, so hat man, wenn A den Arbeitsmodul der Elasticitätsgrenze bezeichnet (s. §. 206),

$$L = AV = AFl,$$

und daher

$$AFl = \frac{G^2 h}{G + G_1}$$

zu setzen, und es ist daher die Stoßgeschwindigkeit $c = \sqrt{2gh}$, bei welcher die Grenze der Elasticität eintritt, durch ihre Höhe

$$h = \frac{G + G_1}{G^2} \cdot AFl$$

bestimmt.

Kommt es darauf an, die Bedingung des Zerreißens der Stange zu finden, so hat man den Arbeitsmodul A der Elasticitätsgrenze durch den Arbeitsmodul B des Zerreißens zu ersetzen.

Man ersieht aus diesen Formeln, daß die Stange um so größere Stöße aushalten kann, je größer ihre Masse ist. Hieraus folgt die wichtige Regel, daß man den Stößen ausgesetzten Körpern möglichst große Massen geben soll.

Da G' und G_1 während des Stoßes noch um λ sinken, so ist richtiger

$$L = \frac{G^2 h}{G + G_1} + (G + G_1)\lambda,$$

also für den Fall, daß durch den Stoß die Elasticitätsgrenze erreicht wird,

$$AF = \frac{G^2}{G + G_1} \cdot \frac{h}{l} + (G + G_1) \frac{\lambda}{l},$$

wobei $\frac{\lambda}{l} = \sigma$ die dieser Grenze entsprechende Ausdehnung bedeutet.

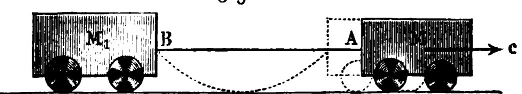
Will man endlich noch die Masse und das Gewicht G_2 der Stange mit in Betracht ziehen, so hat man, da der Schwerpunkt derselben nur um $\frac{1}{2}\lambda$ sinkt,

$$AF = \frac{G^2}{G + G_1 + G_2} \cdot \frac{h}{l} + (G + G_1 + \frac{1}{2} G_2)\sigma$$

zu setzen.

Ein ähnlicher Fall der Stoßwirkung kommt dann vor, wenn eine bewegte Masse $M = \frac{G}{g}$, Fig. 571, mittels einer Kette oder eines Seiles AB eine andere Masse $M_1 = \frac{G}{g}$ in Bewegung setzt. Ist c die Geschwindigkeit von

Fig. 571.



M, in dem Augenblicke, wenn das Seil gespannt wird, und v die Geschwindigkeit, mit welcher beide Massen nach dem Stoße zusammen fortgehen, so hat man wieder:

$$v = \frac{Mc}{M + M_1} = \frac{Gc}{G + G_1},$$

dagegen aber die Arbeit, welche auf die Ausdehnung der Kette verwendet wird:

$$L = \frac{1}{2} Mc^2 - \frac{1}{2} (M + M_1) v^2 = \left(M - \frac{M^2}{M + M_1}\right) \frac{c^2}{2}$$

$$= \frac{MM_1}{M + M_1} \cdot \frac{c^2}{2} = \frac{G G_1}{G + G_1} \cdot h.$$

Wenn daher die Kette u. s. w. bei diesem Zusammenstoßen nur bis zur Elasticitätsgrenze ausgedehnt werden soll, so läßt sich

$$AFl = \frac{G G_1}{G + G_1} h$$

setzen, wobei F den Querschnitt und l die Länge der Kette bezeichnen.

Beispiele. 1) Wenn bei einer Kettenbrücke zwei gegenüber befindliche Hängestangen zusammen ein constantes Gewicht von 5000 Pfund tragen und durch einen darüber wegfahrenden Wagen noch mit 6000 Pfund belastet werden, wenn ferner der Arbeitsmodul A der Elasticitätsgrenze des Schmiedeeisens, 7 Zollpfund, die Länge einer Hängestange, 200 Zoll, und der Querschnitt derselben, 1,5 Quadratzoll beträgt, so hat man die gefährliche Fallhöhe:

$$h = \frac{AFl(G + G_1)}{G^2} = \frac{7 . 2 . 1,5 . 200 . 11000}{36000000} = \frac{7.11}{60} = \frac{77}{60} = 1,28 \text{ Zoll}.$$

Rollt hiernach der Wagen über ein Hinderniß von 1,3 Zoll Höhe weg, so werden die Hängestangen schon Gefahr laufen, über die Elasticitätsgrenze hinaus ausgedehnt zu werden.

2) Wenn das gefüllte Fördergefäß oder die sogenannte Treibetonne in einem Schachte nicht allmälig aus der Ruhe in Bewegung gesetzt wird, sondern mittels des vorher schlaff herabhängenden Seiles plötzlich von dem umlaufenden Korbe in eine gewisse Geschwindigkeit versetzt wird, so dehnt sich dadurch das Seil oft bis

über die Elasticitätsgrenze aus und es wird dasselbe zuweilen auch ganz zerrissen. Ist z. B. die träge Masse der armirten Korbwelle, reducirt auf den Umfang derselben: $M = \frac{G}{g} = \frac{100000}{g}$, das Gewicht der gefüllten Tonne, $G_1 = 2000$ Pfund, das Gewicht des Treibeseiles, $= 400$ Pfund, das Gewicht eines Cubikzolles Seil, $= 0,3$ Pfund, folglich das Volumen dieses Seiles:

$$Fl = \frac{G_1}{\gamma} = \frac{400}{0,3} = \frac{4000}{3} \text{ Pfund},$$

und endlich der Arbeitsmodul für das Zerreißen desselben: $B = 350$ Pfund, so hat man die dem Zerreißen des Seiles entsprechende Geschwindigkeitshöhe:

$$h = BFl \cdot \frac{G + G_1}{G G_1} = 350 \cdot \frac{4000}{3} \cdot \frac{100000 + 2000}{100000 \,.\, 2000} = \frac{1'400000}{3} \cdot \frac{102}{200000}$$
$$= 238 \text{ Zoll} = 19,83 \text{ Fuß},$$

und daher die Geschwindigkeit des Seiles bei Beginn des Anspannens:

$$c = \sqrt{2gh} = \sqrt{62,5 \,.\, 19,83} = 35,2 \text{ Fuß}.$$

Relative Stossfestigkeit. Die vorstehende Theorie findet auch ihre Anwendung, wenn ein an beiden Enden unterstützter prismatischer Körper BB, Fig. 572, in seiner Mitte C den Schlag eines von einer Höhe $AC = h$ niederfallenden Körpers A aufnehmen muß. Ist $\frac{G}{g} = M$ die träge Masse des fallenden Körpers und M_1 die nach der Mitte C reducirte träge Masse des Körpers BB, so hat man wieder das Arbeitsvermögen, welches beide Körper nach dem Aufschlagen besitzen: §. 349

$$L = \frac{c^2}{2} \cdot \frac{M^2}{M + M_1} = \frac{c^2}{2g} \cdot \frac{M}{M + M_1} \cdot Mg = \frac{M}{M + M_1} Gh.$$

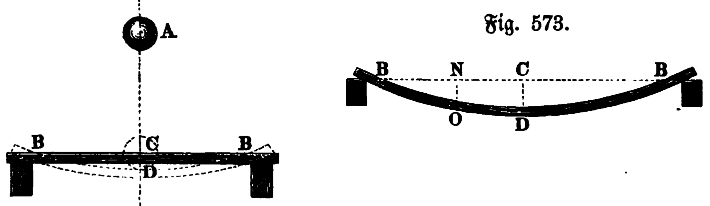


Fig. 572. Fig. 573.

Die träge Masse M_1 des Balkens BB_1 ist auf folgende Weise zu ermitteln. Es sei G_1 das Gewicht dieses Balkens, l die halbe Länge BD, Fig. 573, derselben, x eine Abscisse BN und y die entsprechende Ordinate NO der von BB im Augenblicke der größten Biegung gebildeten Curve; endlich bezeichne noch a die größte Bogenhöhe CD dieser Curve. Denken wir uns BC in n (unendlich viele) Theile zerlegt, so erhalten wir ein Element O des Stangengewichtes, $= \frac{G_1}{n}$, und daher ein Element der trägen Stangenmasse von N nach D reducirt:

$$= \frac{G_1}{ng} \cdot \left(\frac{NO}{CD}\right)^2 = \frac{G_1 y^2}{n g a^2}.$$

Nun ist aber nach §. 217:

$$y = \frac{Px}{2WE}\left(l^2 - \frac{x^2}{3}\right), \text{ also}$$

$$y^2 = \frac{P^2 x^2}{4 W^2 E^2}\left(l^4 - {}^2/_3\, l^2 x^2 + \frac{x^4}{9}\right), \text{ und } a^2 = \frac{P^2 l^6}{9 W^2 E^2},$$

daher folgt das gesuchte Element der trägen Stange:

$$= \frac{9\, G_1\, x^2 \left(l^4 - {}^2/_3\, l^2 x^2 + \frac{x^4}{9}\right)}{4 n g l^6}.$$

Wenn man nun statt x nach und nach $\frac{l}{n}$, $2\,\frac{l}{n}$, $3\,\frac{l}{n} \cdots \frac{nl}{n}$ einführt, und die dadurch erhaltenen Werthe addirt, u. s. w., so erhält man die nach der Mitte C reducirte träge Masse der Stange BB:

$$M_1 = \frac{9\, G_1}{4 g l^6}\left(l^4 \cdot \frac{l^3}{3} - {}^2/_3\, l^2 \cdot \frac{l^5}{5} + {}^1/_9\, \frac{l^7}{7}\right) = {}^{17}/_{35} \cdot \frac{G_1}{g}.$$

Dies vorausgesetzt, können wir nun die Arbeit des Stoßes

$$L = \frac{M}{M + M_1} \cdot G h = \frac{G^2 h}{G + {}^{17}/_{35}\, G_1}$$

setzen, und erhalten so die Bedingung des Ausbiegens bis zur Elasticitätsgrenze (s. §. 235):

$$A \cdot \frac{Wl}{3 e^2} = \frac{G^2 h}{G + {}^{17}/_{35}\, G_1},$$

also, wenn der Balken eine parallelepipedische Form hat,

$${}^1/_9\, A\, V_1 = \frac{G^2 h}{G + {}^{17}/_{35}\, G_1},$$

und daher

$$h = \frac{A\, V_1\, (G + {}^{17}/_{35}\, G_1)}{9\, G^2}, \text{ oder } V_1 = \frac{G_1}{\gamma} \text{ gesetzt,}$$

$$h = \frac{A\, G_1\, (G + {}^{17}/_{35}\, G)}{9\, \gamma\, G^2}.$$

Führt man B statt A ein, so giebt der Ausdruck

$$h = \frac{B\, G_1\, (G + {}^{17}/_{35}\, G_1)}{9\, \gamma\, G^2}$$

die Höhe an, von welcher das Gewicht G herabfallen muß, um den parallelepipedischen Stab zu zerbrechen.

Beispiel. Wie hoch muß ein eisernes Gewicht G von 200 Pfund herabfallen, um eine an beiden Enden aufliegende Gußeisenplatte von 36 Zoll Länge, 12 Zoll Breite und 3 Zoll Dicke in ihrer Mitte zu zerschlagen?

Es ist hier der Arbeitsmodul der Festigkeit des Zerreißens

$$B = 14{,}2 \text{ Zollpfund}$$

zu setzen (s. §. 211), ferner das Volumen der Platte:

$$V_1 = b\,h\,l = 12 \,.\, 3 \,.\, 36 = 1296 \text{ Cubikzoll},$$

und da ein Cubikzoll Gußeisen, $\gamma = 0{,}259$ Pfund wiegt, ihr Gewicht:

$$G_1 = 1296 \,.\, 0{,}259 = 335{,}7 \text{ Pfund};$$

daher folgt die fragliche Höhe:

$$h = \frac{14{,}2 \,.\, 335{,}7\,(200 + {}^{17}/_{35} \,.\, 356{,}4)}{9 \,.\, 0{,}275 \,.\, 40000} = 18 \text{ Zoll}.$$

§. 350 **Arbeit der Torsionsfestigkeit.** Es lassen sich auch noch die Wirkungen des Stoßes auf die Torsion der Wellen untersuchen. Nach §. 262 ist die mechanische Leistung, welche die Torsion α einer Welle von der Länge l und dem Drehungsmomente W erfordert:

$$L = \frac{P\alpha a}{2} = \frac{\alpha^2 \,.\, W C}{2\,l} = \frac{P^2 a^2 l}{2\,W C},$$

auch läßt sich setzen

$$L = \frac{S^2}{2\,C}\,\frac{W l}{e^2} \text{ (s. §. 264)},$$

wenn e den Abstand der entferntesten Faser von der neutralen Axe und S die Spannung dieser Faser bezeichnet.

Führt man statt S den Tragmodul T, und statt $\frac{T^2}{2\,C} = \frac{\sigma\,T}{2}$ den Arbeitsmodul A der Elasticität ein, so erhält man die Arbeit, welche aufzuwenden ist, um die äußersten Fasern bis zur Elasticitätsgrenze zu spannen:

$$L = A \cdot \frac{W l}{e^2},$$

und die mechanische Arbeit zum Abwürgen der Welle, wenn man den Arbeitsmodul A durch den Arbeitsmodul B des Abdrehens ersetzt:

$$L_1 = B \cdot \frac{W l}{e^2}.$$

Für eine cylindrische Welle ist $W = \frac{\pi r^4}{2}$ und $e = r$, daher

$$L = \frac{A}{2} \cdot \pi r^2 l = \frac{A}{2}\,V \text{ und } L_1 = \frac{B}{2} \cdot \pi r^2 l = \frac{B}{2}\,V,$$

wobei $V = \pi r^2 l$, das Volumen dieser Welle bezeichnet.

Für eine Welle mit quadratischem Querschnitte ist dagegen bei der Seitenlänge b dieses Querschnittes:

$$W = \frac{b^4}{6} \text{ und } e = b\sqrt{1/2},$$

folglich:

$$L = \frac{A}{3} b^2 l = \frac{A}{3} V, \text{ und } L_1 = \frac{B}{3} V.$$

Stößt eine umlaufende Radwelle, deren auf den Angriffspunkt des Stoßes reducirte Masse $M = \frac{G}{g}$ ist, an eine ruhende Masse $M_1 = \frac{G_1}{g}$, mit der Geschwindigkeit c, so daß sich beide nach dem Stoße mit der Geschwindigkeit

$$v = \frac{Mc}{M + M_1} = \frac{Gc}{G + G_1}$$

fortbewegen (s. §. 334), so geht hierbei die Arbeit

$$L = \frac{G G_1}{G + G_1} \cdot \frac{c^2}{2g}$$

verloren (s. §. 335), welche auf die Torsion der Welle und Biegung der Radarme u. s. w. verwendet wird.

Nun ist aber auch L die Summe der Arbeiten, welche auf die Torsion der Welle und Biegung der Radarme verwendet wird, d. i.:

$$L = A \cdot \frac{Wl}{e^2} + A_1 \frac{W_1 l}{e_1^2},$$

wobei A_1 den Arbeitsmodul, W_1 das Maß des Biegungsmomentes und e_1 den Abstand der äußersten Fasern von der neutralen Axe bezeichnet (s. §. 235), daher läßt sich setzen:

$$\frac{A\,Wl}{e^2} + \frac{A_1\,W_1\,l_1}{3\,e_1^2} = \frac{G G_1}{G + G_1}\,\frac{c^2}{2g}.$$

Ist die Welle cylindrisch, so hat man $\frac{Wl}{e^2} = \frac{V}{2}$, ist dagegen sie vierkantig, so hat man $\frac{Wl}{e^2} = \frac{V}{3}$, wenn V das Volumen derselben bezeichnet; für die vierkantigen Arme ist $\frac{W_1 l_1}{3\,e_1^2} = \frac{V_1}{9}$, wenn V_1 das Volumen der Arme bezeichnet.

Hiernach folgt für eine cylindrische Welle:

$$\frac{A}{2} V + \frac{A_1}{9} V_1 = \frac{G G_1}{G + G_1}\,\frac{c^2}{2g},$$

und dagegen für eine vierkantige Welle:

$$\frac{A}{3} V + \frac{A_1}{9} V_1 = \frac{G G_1}{G + G_1} \frac{c^2}{2g}.$$

Die Volumina V und V_1 stehen wieder in einem gewissen Zusammenhange mit einander, welcher dadurch ausgedrückt wird, daß das Biegungsmoment der Arme gleich dem Torsionsmomente der Welle ist.

Hiernach hat man also:

$$\frac{W T}{e} = \frac{W_1 T_1}{e_1}, \text{ also:}$$

$$1) \quad \frac{\pi d^3}{16} T = \frac{b^3 T}{3 \sqrt{2}} = \frac{b_1 h_1^2 T_1}{6},$$

wenn T und T_1 die Tragmodul für Torsion und Biegung, sowie d den Durchmesser einer runden, und b die Seitenlänge einer vierkantigen Welle, dagegen h_1 die Dicke und b_1 die Summe aller Breiten der Radarme bezeichnen.

Nun ist aber noch $V = \frac{\pi d^2}{4} l = b^2 l$ und $V_1 = b_1 h_1 l_1$, daher hat man auch:

$$2) \begin{cases} \frac{\pi d^2 l A}{8} + \frac{b_1 h_1 l_1 A_1}{9} = \frac{G G_1}{G_1 + G_1} \frac{c^2}{2g} \text{ oder, nach Befinden} \\ {}^1/_3\, b^2 l A + \frac{b_1 h_1 l_1 A_1}{9} = \frac{G G_1}{G + G_1} \cdot \frac{c^2}{2g}. \end{cases}$$

Giebt man nun noch das Dimensionsverhältniß $v = \frac{b_1}{h_1}$, so kann man mit Hülfe der Gleichungen (1) und (2) die Stärke d oder h der Welle, sowie auch die Stärke h_1 und Breite b_1 der Arme berechnen.

Hierbei ist in Rechnung zu bringen:

1) für Gußeisen:

$$A_1 = 3{,}04 \text{ und } A = \frac{T^2}{2C} = \frac{1833^2}{2 \,.\, 2'700000} = 0{,}622 \text{ Zollpfund},$$

2) für Schmiedeeisen:

$$A_1 = 6{,}08 \text{ und } A = \frac{T^2}{2C} = \frac{5746^2}{2 \,.\, 8'60000} = 1{,}92 \text{ Zollpfund, und}$$

3) für Holz, im Mittel:

$$A_1 = 2{,}08 \text{ und } A = \frac{T^2}{2C} = \frac{380^2}{2 \,.\, 570000} = 0{,}127 \text{ Zollpfund}.$$

Beispiel. Die auf den Angriffspunkt des Daumens reducirte Masse eines Hammerrades ist $M = \frac{200000}{g}$ Pfund, und die auf denselben Angriffspunkt reducirte Masse des Hammers, $M_1 = \frac{25000}{g}$ Pfund, ferner das Stück der Wellenlänge zwischen dem Rade und dem Daumenkranze, $l = 15$ Fuß $= 225$ Zoll, und die Länge der Radarme, $l_1 = 10$ Fuß $= 120$ Zoll. Wenn nun der Hammer bei jedem Anhube von den Wellbaumen mit 2 Fuß Geschwindigkeit ergriffen wird, welche Stärken sind der Welle und den Radarmen zu geben, damit diese die Stöße bei dem Ergreifen des Hammers ohne Nachtheile aushalten. Sind die Well- und Radarme aus Holz, so hat man zunächst

$$380 \frac{\pi d^3}{16} = 1000 \frac{b_1 h_1^2}{6}$$

zu setzen, oder wenn die Anzahl der Radarme, $n = 16$ ist, und deshalb

$$b_1 = \nu . n h_1 = 0{,}707 . 16 h_1 = 11{,}3 h_1$$

angenommen wird,

$$d = h_1 \sqrt[3]{\frac{1600 . 11{,}3}{6 . 38}} = h_1 \sqrt[3]{79{,}3} = 4{,}3 h_1.$$

Nun ist noch

$$\frac{\pi}{8} A l = 0{,}127 . 225 \cdot \frac{\pi}{8} = 11{,}22,$$

ferner

$$1/_9 A_1 l_1 = 1/_9 . 2{,}08 . 120 = 27{,}73$$

und

$$\frac{G G_1}{G + G_1} \cdot \frac{c^2}{2g} = 12 . 0{,}016 . 4 \cdot \frac{200000 . 25000}{200000 + 25000} = 0{,}768 \cdot \frac{5000000}{225}$$
$$= 17067 \text{ Zollpfund},$$

daher folgt die Bestimmungsgleichung:

$$(4{,}3)^2 . 11{,}22 h_1^2 + 11{,}3 . 27{,}73 h_1^2 = 17067, \text{ d. i.:}$$
$$207{,}5 h_1^2 + 313{,}3 h_1^2 = 17067,$$

wonach die gesuchte Armdicke

$$h_1 = \sqrt{\frac{17067}{520{,}8}} = 5{,}72 \text{ Zoll},$$

die Armbreite

$$b_1 = 0{,}707 . h_1 = 4{,}04 \text{ Zoll},$$

und die Wellendicke

$$d = 4{,}3\ h_1 = 24{,}6 \text{ Zoll folgt.}$$

Der Sicherheit wegen sind diese Dimensionen noch ansehnlich größer zu machen.

Anmerkung. Der Stoßfestigkeit ist erst in neuerer Zeit mehr Aufmerksamkeit geschenkt worden. Wir finden über sie nur Einiges mitgetheilt in Tredgold's Werk über die Stärke des Gußeisens u. s. w. (Strength of cast iron), in Poncelet's Introduction à la mécanique industrielle und in Rühlmann's Grundzüge der Mechanik und Geostatik. Letzteres Werk bezieht sich vorzüglich auf die Versuche Hodgkinson's über die Festigkeit prismatischer Körper gegen den

Stoß, worüber ein besonderer Artikel in dem ersten Bande der Zeitschrift für das gesammte Ingenieurwesen (dem „Ingenieur") von Bornemann u. s. w. handelt.

Die Versuche Hodgkinson's stimmen im Wesentlichen mit der vorstehenden Theorie über die Stoßfestigkeit überein; sie erstrecken sich vorzüglich auf die relative Festigkeit, und sind in der Art ausgeführt worden, daß pendelartig aufgehangene Gewichte horizontal gegen verticale, an den Enden unterstützte Stäbe schlugen. Es bestätigte sich hierbei die Richtigkeit der Formel $L = \frac{G^2 h}{G + \frac{1}{2} G_1}$, welche unter der Voraussetzung gefunden wird, daß der Stoß ein unelastischer ist, vollständig; es hing die Leistung L gar nicht von der materiellen Beschaffenheit des stoßenden Körpers ab. Gleich schwere Körper aus verschiedenen Stoffen (Gußeisen, Gußstahl, Glockenmetall, Blei) brachten bei gleicher Fallhöhe an einem und demselben Stabe (aus Gußeisen oder Gußstahl) gleiche Durchbiegungen hervor; auch waren diese fast genau dieselben, welche die Theorie unter der Voraussetzung findet, daß der Stab vollständig elastisch ist.

Schlußanmerkung. Zum Studium der Mechanik starrer Körper ist außer den älteren Werken von Euler, Poisson, Poinsot, Poncelet, Navier und Coriolis, sowie von Whewell, Mosely, Eytelwein und Gerstner zu empfehlen:

Duhamel, Lehrbuch der analytischen Mechanik, in deutscher Uebersetzung von Wagner, Braunschweig 1853; sowie von Eggers und Schlömilch, Leipzig 1853. Sohnke, analytische Theorie der Statik und Dynamik, Halle 1854; Broch's Lehrbuch der Mechanik, Berlin 1854; Morin, Leçons de Mécanique pratique, Paris 1855 etc. Delaunay, Traité de Mécanique rationelle, Paris 1856; Rankine, a Manual of applied Mechanics, second edition, London 1861. Ein werthvolles, in England viel zu wenig geschätztes Werk. Eine neue Monographie über den Stoß von Poinsot ist im 3. Jahrgang von Schlömilch's Zeitschrift für Mathematik und Physik übersetzt.

Sechster Abschnitt.

Statik flüssiger Körper.

Erstes Capitel.

Vom Gleichgewichte und Drucke des Wassers in Gefäßen.

§. 351 **Flüssigkeit.** Wir betrachten die flüssigen Körper als Verbindungen materieller Punkte, deren Zusammenhang unter einander so schwach ist, daß die kleinsten Kräfte hinreichen, sie durch Verschieben von einander zu trennen (§. 62). Manche der in der Natur vorkommenden Körper, wie z. B. die Luft, das Wasser u. s. w., besitzen diese Eigenschaft der Flüssigkeit in hohem Grade, andere Körper hingegen, wie z. B. Oel, Schmiere, aufgeweichte Erde u. s. w., sind in minderem Grade flüssig. Man nennt jene vollkommen, diese aber unvollkommen flüssige Körper. Gewisse Körper, wie z. B. die Teige, stehen den festen Massen ebenso nahe als den flüssigen.

Vollkommen flüssige Körper, von welchen in der Folge nur die Rede sein wird, sind auch zugleich vollkommen elastisch, d. h. sie lassen sich durch äußere Kräfte zusammendrücken und nehmen nach Wegnahme dieser Kräfte das erste Volumen vollkommen wieder an. Nur ist die Größe der einem gewissen Drucke entsprechenden Volumenveränderung bei verschiedenen Flüssigkeiten sehr verschieden; während sich dieselbe bei den tropfbar-flüssigen Körpern höchst unbedeutend zeigt, fällt sie bei den luftförmigen Körpern, die man deshalb auch elastische Flüssigkeiten nennt, sehr groß aus. Dieser geringe Grad von Zusammendrückbarkeit der tropfbar-flüssigen Körper ist der Grund, weswegen man bei den meisten Untersuchungen der Hydrostatik (§. 66) dieselben als incompressibele oder unelastische Flüssigkeiten ansieht und behandelt. Da das Wasser unter allen tropfbar-flüssigen Körpern am meisten verbreitet ist und im Leben am häufigsten angewendet

wird, so sieht man es als den Repräsentanten aller dieser Flüssigkeiten an und spricht bei den Untersuchungen in der Mechanik des Flüssigen immer nur vom Wasser, indem man stillschweigend voraussetzt, daß die mechanischen Verhältnisse anderer tropfbaren Flüssigkeiten dieselben sind wie die des Wassers.

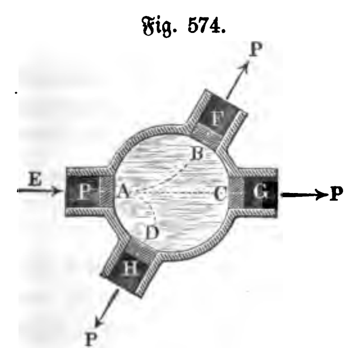
Aus denselben Gründen ist in der Mechanik der elastisch-flüssigen Körper meist nur von der gemeinen atmosphärischen Luft die Rede.

Anmerkung. Eine Wassersäule von 1 Quadratzoll Querschnitt wird durch ein Gewicht von 14 Pfund, welches dem Drucke der Atmosphäre entspricht, um ungefähr 0,00005 oder 50 Milliontel ihres Volumens zusammengedrückt, wogegen eine Luftsäule unter dem Drucke dieser Kraft nur die Hälfte ihres anfänglichen Volumens einnimmt. Siehe Aimé: „Ueber die Zusammendrückung der Flüssigkeiten", in Poggendorff's Annalen, Ergänzungsband (zu Band 72), 1848. Nach der Formel $P = \frac{\lambda}{l} FE$ (§. 204) folgt, wenn man $P = 14$ Pfund, $F = 1$ Quadratzoll und $\frac{\lambda}{l} = \frac{5}{100000} = \frac{1}{20000}$ setzt, der Elasticitätsmodul des Wassers

$$E = \frac{Pl}{F\lambda} = 14 . 20000 = 280000 \text{ Pfund}.$$

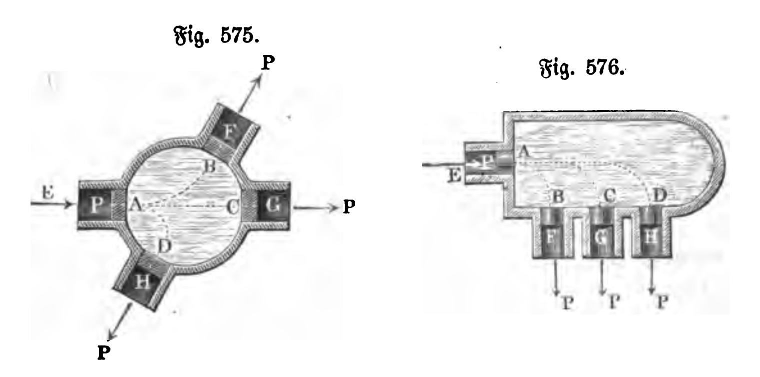
Princip des gleichen Druckes. §. 352 Die charakteristische Eigenschaft der Flüssigkeiten, wodurch sich dieselben wesentlich von den festen Körpern unterscheiden, und welche der Lehre vom Gleichgewichte flüssiger Körper zur Basis dient, ist die Fähigkeit, den Druck, welcher auf einen Theil der Oberfläche der Flüssigkeit ausgeübt wird, nach allen Richtungen hin unverändert fortzupflanzen. Bei den festen Körpern pflanzt sich der Druck nur in seiner eigenen Richtung fort (§. 86); wird dagegen das Wasser von einer Seite her gedrückt, so entsteht in der ganzen Masse derselben eine Spannung, die sich nach allen Seiten hin äußert und daher an allen Stellen der Oberfläche desselben wahrzunehmen ist. Um sich von der Richtigkeit dieses Gesetzes zu überzeugen, kann man einen mit Wasser gefüllten Apparat anwenden, wie ihn Fig. 574 im horizontalen Durchschnitt repräsentirt. Die gleich weiten und in gleicher Höhe über dem horizontalen Fußboden befindlichen Röhren AE, BF u. s. w. sind durch vollkommen bewegliche und genau abschließende Kolben verschlossen; das Wasser drückt deshalb auch durch sein Gewicht auf den einen Kolben genau so stark wie auf den anderen. Sehen wir aber von diesem Drucke ab, oder nehmen wir das Wasser gewichtslos an. Drücken wir dagegen den einen Kolben A mit einer gewissen Kraft P

Fig. 574.



gegen das Wasser, so pflanzt sich diese durch das Wasser hindurch bis zu den übrigen Kolben B, C, D fort und es ist zur Herstellung des Gleichgewichtes, oder um das Zurückgehen dieser Kolben zu verhindern, nöthig, auf jeden dieser Kolben eine gleich große Gegenkraft P (Fig. 575) wirken zu lassen. Wir sind daher berechtigt, anzunehmen, daß die auf einen Theil A der Oberfläche der Wassermasse wirkende Kraft P eine Spannung in dieser erzeugt, und sich dadurch nicht nur in der geraden Linie AC, sondern auch in jeder anderen Richtung BF, DH u. s. w. auf andere gleich große Oberflächentheile C, B, D fortpflanzt.

Fig. 575. Fig. 576.



Sind die Axen der Röhren BF, CG u. s. w., Fig. 576, unter sich parallel, so lassen sich die Kräfte, welche auf ihre Kolben wirken, durch Addition zu einer einzigen Kraft vereinigen; ist n die Anzahl dieser gleich großen Kolben, so beträgt daher der Gesammtdruck auf dieselben:

$$P_1 = nP,$$

und in dem von der Figur repräsentirten Falle:

$$P_1 = 3P.$$

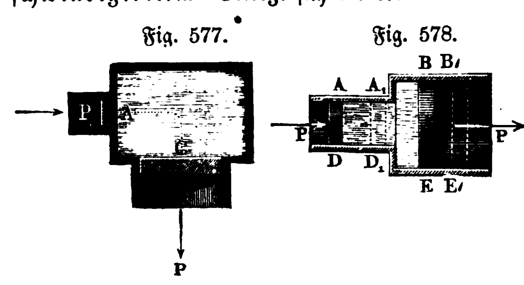
Nun ist aber der Inbegriff F_1 der gedrückten Flächen B, C, D ebenfalls $= n$ mal gedrückte Fläche F des einen Kolbens, es läßt sich daher n nicht nur $= \frac{P_1}{P}$, sondern auch $= \frac{F_1}{F}$, also überhaupt

$$\frac{P_1}{P} = \frac{F_1}{F} \text{ und } P_1 = \frac{F_1}{F} P \text{ setzen.}$$

Rücken wir nun noch die Röhren B, C, D u. s. w. so zusammen, daß sie, wie in Fig. 577, eine einzige ausmachen, und verschließen wir sie durch einen einzigen Kolben, so geht F_1 in eine einzige Fläche über und es ist P_1 die auf sie wirkende Kraft; es folgt daher das allgemeinere Gesetz: **die Drücke, welche ein flüssiger Körper auf verschiedene Theile der Gefäßwand ausübt, sind den Inhalten dieser Theile proportional.**

Dieses Gesetz entspricht auch dem Principe der virtuellen Geschwindigkeiten. Bewegt sich der Kolben $AD = F$, Fig. 578, um den Weg $AA_1 = s$ einwärts, so drückt er das Wasserprisma Fs aus seiner Röhre, und geht der Kolben $BE = F_1$ um den Weg $BB_1 = s_1$ auswärts, so läßt er den prismatischen Raum $F_1 s_1$ zurück. Da wir aber vorausgesetzt haben, daß sich die Wassermasse weder ausdehnen noch zusammendrücken läßt, so muß das Volumen derselben bei diesen Kolbenbewegungen unverändert bleiben, also der Zusatz Fs dem Abgange $F_1 s_1$ gleich sein. Die Gleichung $F_1 s_1 = Fs$ giebt aber:

Fig. 577. Fig. 578.



$$\frac{F_1}{F} = \frac{s}{s_1},$$

und aus der Verbindung dieser Proportion mit der Proportion $\frac{P_1}{P} = \frac{F_1}{F}$ folgt:

$$\frac{P_1}{P} = \frac{s}{s_1};$$

es ist daher auch Arbeit $P_1 s_1 =$ Arbeit Ps (s. §. 83).

Beispiel. Wenn der Kolben AD einen Durchmesser von $1\frac{1}{2}$ Zoll dagegen der Kolben BE einen solchen von 10 Zoll hat, und jener mit einer Kraft P von 36 Pfund auf das Wasser gedrückt wird, so übt dieser Kolben eine Kraft

$$P_1 = \frac{F_1}{F} P = \frac{10^2}{1,5^2} \cdot 36 = \frac{400}{9} \cdot 36 = 1600 \text{ Pfund}$$

aus. Wird der erste Kolben um 6 Zoll fortgeschoben, so geht der zweite nur um

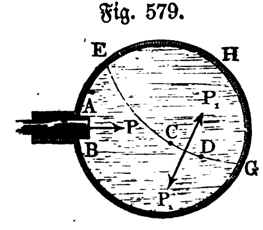
$$s_1 = \frac{F}{F_1} s = \frac{9 \cdot 6}{400} = {}^{27}/_{200} = 0,135 \text{ Zoll}$$

fort.

Anmerkung. Vielfache Anwendungen dieses Gesetzes kommen in der Folge vor: bei der hydraulischen Presse, der Wassersäulenmaschine, bei den Pumpen u. s. w.

Druck im Wasser. §. 353 Der Druck, welchen die Wassertheile gegen einander ausüben, ist genau so zu beurtheilen wie der Druck des Wassers gegen die Gefäßwände. Eine beliebige Fläche ECG, welche das Wasser in einem Gefäße BGH, Fig. 579, in zwei Theile theilt, wird im Gleichgewichtszustande von der einen Seite her eben so stark gedrückt als von der anderen. Da nun ein starrer Körper alle gegen seine Oberfläche rechtwinkelig gerichteten Kräfte

Fig. 579.



aufnimmt, so wird auch das Gleichgewicht des Wassers im Gefäße nicht gestört, wenn die eine Flüssigkeitshälfte EGH erstarrt, und daher ihre Begrenzungsfläche ECG gleichsam zu einer Gefäßwand wird. Drückt die flüssige Hälfte EBG in einem Theile $CD = F_1$ der imaginären Trennungsfläche ECG mit einer Kraft P_1 auf die erstarrte Hälfte EGH, so nimmt daher letztere diese Kraft vollständig auf und übt dabei eine gleiche Gegenkraft $(-P_1)$ auf $CD = F_1$ aus. Da nun aber das Gleichgewichtsverhältniß durch das Flüssigwerden von dieser Wassermasse EGH nicht gestört wird, so drückt dieselbe mit einer gleichen Kraft $(-P_1)$ auf die Wassermasse EBG zurück, und es ist folglich der Druck des Wassers auf beiden Seiten einer Fläche $\overline{CD} = F_1$, ebenfalls durch die Proportion

Fig. 580.



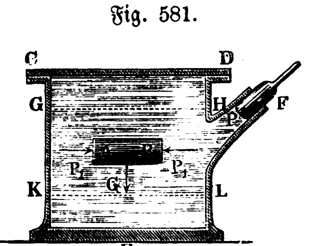
$$\frac{P_1}{P} = \frac{F_1}{F}$$

bestimmt, wofern das ganze Wasser wieder in einer Fläche $\overline{AB} = F$ von einer Kraft P gedrückt wird. Hiernach ist der Druck auf die Fläche F_1 bei jeder beliebigen Lage:

$$P_1 = \frac{F_1}{F} P.$$

Das durch die letzte Proportion ausgesprochene Gesetz von der Fortpflanzung des Druckes im Wasser kommt dem letzteren nur als Flüssigkeit ohne Schwere zu, und erfordert daher noch eine Ergänzung, wenn es sich darum handelt, auch den aus dem Gewichte des Wassers hervorgehenden Druck zu ermitteln. Denkt man sich von dem Wasser in einem Gefäße CDE, Fig. 581, einen Theil erstarrt, welcher die Form eines unendlich dünnen horizontalen Prismas AB hat, so sieht man leicht ein, daß sich die Kräfte, welche das flüssig bleibende Wasser rund herum auf die Seitenflächen des erstarrten Theiles ausübt, mit dem Gewichte G dieses Theiles ins Gleichgewicht setzen, und daß sich die Horizontaldrücke, mit welchen es gegen die verticalen Grundflächen A und B dieses Theiles wirkt, gegenseitig aufheben. Es müssen also auch diese Drücke (P_1 und $-P_1$) einander gleich und entgegengesetzt sein. Da nun das Gleichgewicht sich nicht ändert, wenn AB wieder in den Flüssigkeitszustand zurückkehrt, so folgt, daß die Pressungen des Wassers gegen gleiche verticale Flächenelemente A und B in einer und derselben Horizon-

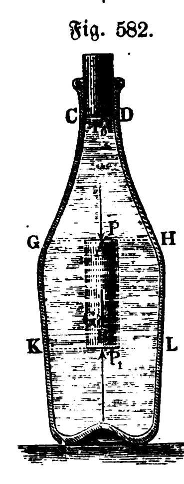
Fig. 581.



talebene einander gleich sein müssen, und da sich ferner der Druck auf ein Flächenelement nicht ändert, wenn dasselbe eine andere Neigung oder Richtung annimmt, so folgt, daß überhaupt das Wasser in einer horizontalen Schicht, wie z. B. GH, KL u. s. w. an allen Stellen und nach allen Richtungen hin einen und denselben Druck ausübt.

Denken wir uns hingegen in der Wassermasse CHK, Fig. 582, ein verticales Prisma AB von unendlich kleinem Querschnitt erstarrt, so können wir aus dem Gleichtgewichtszustande desselben mit der übrigen Flüssigkeit folgern, daß sich die Drücke, mit welchen die letzteren auf die verticalen Seitenflächen dieses Prismas wirken, gegenseitig aufheben, und daß sich das Gewicht G des letzteren Körpers mit dem Ueberschusse $P_1 - P$ des Druckes P_1 auf die untere Grundfläche B über den Druck P auf die obere Grundfläche A im Gleichgewichte befindet. Es ist also hiernach $P_1 - P = G$, d. i. der Druck P_1 des Wassers auf irgend ein Flächenelement B gleich dem Drucke P desselben auf ein höher liegendes Flächenstück A von gleicher Größe plus dem Gewichte G einer Wassersäule AB, welche das eine oder andere Flächenelement zur Basis, und den Verticalabstand zwischen beiden Elementen zur Höhe hat. Dieser Satz gilt, dem Obigen zufolge, nicht nur für zwei senkrecht über einander befindliche Elemente, sondern auch für zwei gleiche Flächenelemente überhaupt, und findet auch seine Anwendung bei der Bestimmung des Druckes auf die Gefäßwand, da sich die Drücke P und P_1 in den Horizontalebenen GH und KL unverändert fortpflanzen. Der Druck P_1 auf ein Flächenelement B, K oder L der Horizontalebene KL ist hiernach gleich dem Drucke P auf ein gleich großes Element A, G oder H in einer höheren Horizontalebene plus dem Gewichte der Wassersäule, welche dieses Element F zur Basis und den Abstand $AB = h$ der beiden Horizontalschichten GH und KL von einander zur Höhe hat. Ist γ die Dichtigkeit des Wassers, so beträgt dieses Gewicht:

Fig. 582.



$$G = Fh\gamma, \text{ und daher } P_1 = P + G = P + Fh\gamma.$$

Sind die Inhalte der Flächenelemente nicht gleich, hat z. B. das obere (in GH) den Inhalt F und das untere (in KL) den Inhalt F_1, so ist der Druck auf letzteres

$$P_1 = \frac{F_1}{F}(P + Fh\gamma) = \frac{F_1}{F}P + F_1 h\gamma.$$

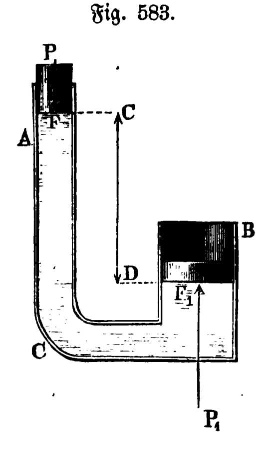
Durch dieselbe Formel läßt sich auch der Druck P auf ein Flächenelement

F in einer Horizontalschicht GH bestimmen, wenn der äußere Druck P_0 eines Flächenelementes $CD = F_0$ bekannt ist, welches sich um die Höhe h über oder unter GH befindet. Es ist

$$P = \frac{F}{F_0} P_0 \pm F h \gamma.$$

Da die Druckkräfte gegen gleiche Flächentheile in einer Horizontalebene einander gleich sind, so folgt, daß vorstehende Formel auch auf horizontale Flächen (F, F_0 und F_1) von endlicher Ausdehnung, z. B. auf den Fall anwendbar ist, wo das Wasser dazu dient, die Kraft P einer horizontalen Kolbenfläche F, Fig. 583, auf eine andere horizontale Kolbenfläche F_1 überzutragen. Die Formel

Fig. 583.



$$P_1 = \frac{F_1}{F} P + F_1 h \gamma$$
$$= F_1 \left(\frac{P}{F} + h \gamma\right)$$

giebt den Druck P_1 auf diese Fläche unmittelbar an, wenn h den senkrechten Abstand CD zwischen beiden Kolbenflächen bedeutet.

Bezeichnet man die Drücke $\frac{P}{F}$ und $\frac{P_1}{F_1}$ auf die Flächeneinheiten durch p und p_1, so hat man noch einfacher

$$p_1 = p + h \gamma.$$

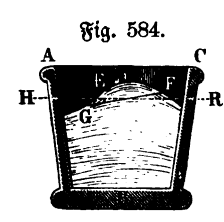
Beispiel. Wenn die beiden Kolbenflächen F und F_1 einer hydrostatischen Presse ACB, Fig. 583, die Durchmesser $d = 2\frac{1}{2}$ und $d_1 = 9$ Zoll haben und um die senkrechte Höhe $CD = h = 60$ Zoll von einander abstehen, und es soll durch den großen Kolben derselben eine Kraft $P_1 = 1600$ Pfund ausgeübt werden, so ist die erforderliche Kraft des kleinen Kolbens:

$$P = \frac{F}{F_1} P_1 - F h \gamma = \left(\frac{d}{d_1}\right)^2 P - \frac{\pi d^2}{4} h \gamma$$
$$= \left(\frac{5}{18}\right)^2 . 1600 - \frac{\pi}{4} . {}^{25}/_{4} . \frac{60 . 61,75}{1728} = 123,46 - 10,53 = 112,93 \text{ Pfd.}$$

§. 354 **Wasserspiegel.** Die dem Wasser innewohnende Schwerkraft macht, daß sich alle Elemente desselben abwärts zu bewegen suchen und sich auch wirklich so bewegen, wenn sie nicht daran verhindert werden. Um eine zusammenhängende Wassermasse zu erhalten, ist es deshalb nöthig, das Wasser in Gefäßen einzuschließen. Das in einem Gefäße ABC, Fig. 584, befindliche Wasser ist aber nur dann im Gleichgewichte, wenn die noch freie Ober-

fläche HR desselben rechtwinkelig auf der Richtung der Schwerkraft, also horizontal ist; denn so lange diese Oberfläche noch krumm oder gegen den Horizont geneigt ist, so lange giebt es auch noch höher liegende Wasserelemente, wie z. B. E, welche wegen ihrer großen Beweglichkeit und in Folge ihrer Schwere über den darunter befindlichen, wie auf einer schiefen Ebene FG, herabgleiten.

Fig. 584.

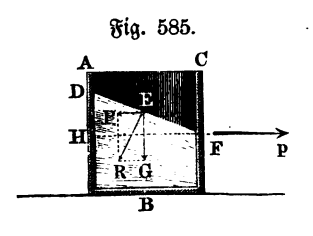


Da bei größeren Entfernungen die Schwerrichtungen nicht mehr als parallele Linien angesehen werden können, so hat man die freie Oberfläche oder den Spiegel des Wassers in einem großen Gefäße, wie z. B. in einem größeren See, nicht mehr als eine Ebene, sondern als einen Kugeloberflächentheil zu betrachten.

Wirkt außer der Schwere noch eine andere Kraft auf die Wasserelemente, so steht im Gleichgewichtszustande die Oberfläche des Wassers winkelrecht auf der Richtung der aus der Schwere und der hinzutretenden Kraft entspringenden Mittelkraft.

Wird ein Gefäß ABC, Fig. 585, mit der unveränderlichen Acceleration p horizontal fortbewegt, so bildet die freie Oberfläche des Wassers in demselben eine schiefe Ebene DF; denn da in diesem Falle jedes Element E dieser Oberfläche von seinem Gewichte G abwärts und von seiner Trägheit $P = \frac{p}{g} G$ horizontal getrieben wird, so entspringt in jedem eine Mittelkraft R, welche von der Richtung der Schwere um einen unveränderlichen Winkel $REG = \alpha$ abweicht. Dieser Winkel ist auch zugleich der Winkel DFH, um welchen der auf B normal stehende Wasserspiegel von dem Horizonte abweicht. Er ist bestimmt durch

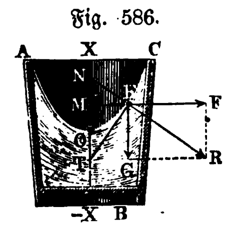
Fig. 585.



$$tang.\, \alpha = \frac{P}{G} = \frac{p}{g}.$$

Wird dagegen ein Gefäß ABC, Fig. 586, gleichförmig um seine verticale Axe $X\overline{X}$ gedreht, so bildet der Spiegel des mit umlaufenden Wassers in demselben eine hohle Fläche AOC mit parabolischen Axendurchschnitten. Ist ω die Winkelgeschwindigkeit des Gefäßes und des darin befindlichen Wassers, G das Gewicht eines Wasserelementes E und y der Abstand ME desselben von der verticalen Axe, so hat man für die Centrifugalkraft dieses Elementes:

Fig. 586.



$$F = \omega^2 \frac{G y}{g} \text{ (§. 302)},$$

und daher für den Winkel $REG = TEM = \varphi$, welchen die Mittelkraft R mit der Verticalen, oder die Tangente ET des Wasserprofiles mit der Horizontalen ME einschließt:

$$tang.\,\varphi = \frac{F}{G} = \frac{\omega^2 y}{g}.$$

Hiernach ist also die Tangente des Winkels, welchen die Berührungslinie mit der Ordinate einschließt, der Ordinate proportional. Da diese Eigenschaft der gemeinen Parabel zukommt (s. §. 157), so ist auch der verticale Durchschnitt $A\,O\,C$ des Wasserspiegels eine Parabel, deren Axe mit der Drehungsaxe $X\overline{X}$ zusammenfällt.

Wäre die Umdrehungsgeschwindigkeit des Wassers im Gefäße ABD, Fig. 588, constant und $= c$, so würde $F = \frac{c^2 G}{g y}$, daher $tang.\,\varphi = \frac{c^2}{g y}$

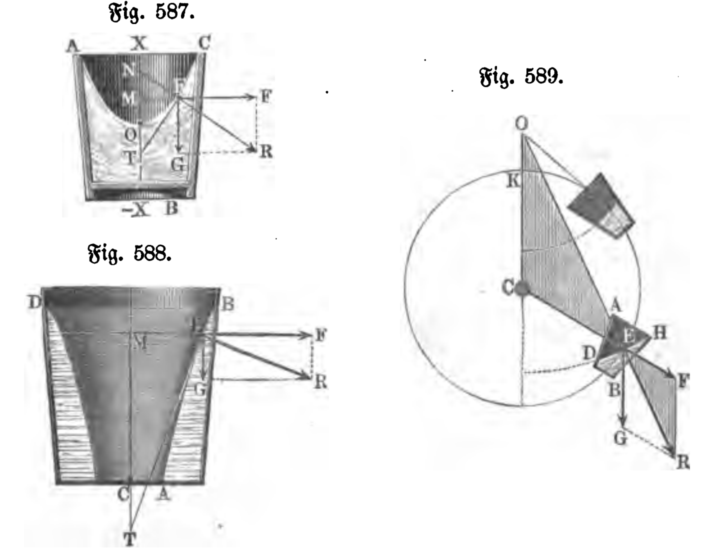


Fig. 587.

Fig. 588.

Fig. 589.

und die Subtangente der Durchschnittscurve $A\,E\,B$ der Oberfläche des Wassers, $M\,T = m = \frac{c^2}{g}$, also constant ausfallen. Nach Artikel 20 der analytischen Hülfslehren ist die Gleichung einer solchen Curve:

$$y = r e^{\frac{x}{m}} = r\, e^{g x c^{-2}},$$

wobei r die Ordinate $C\,A$ des Anfangspunktes A bezeichnet.

Bewegt man ein Gefäß ABH, Fig. 589, in einem Verticalkreise um eine Horizontalaxe C gleichförmig herum, so bildet die Oberfläche des Wassers in demselben eine cylindrische Fläche mit kreisförmigem Querschnitte DEH. Verlängern wir die Richtung der aus dem Gewichte G und der Centrifugalkraft F eines Elementes E entstehenden Mittelkraft R bis zum Durchschnitte O mit der Verticalen CK durch den Drehpunkt, so erhalten wir die ähnlichen Dreiecke ECO und EFR, für welche gilt:

$$\frac{CO}{EC} = \frac{FR}{EF} = \frac{G}{F};$$

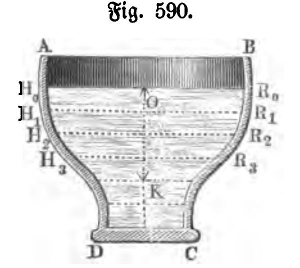
nun ist aber, wenn man den Drehungshalbmesser $EC = y$ setzt, und die letzte Bezeichnung beibehält, $F = \frac{\omega^2 G y}{g}$, es folgt daher die Linie:

$$CO = \frac{g}{\omega^2} = g\left(\frac{30}{\pi u}\right)^2 = \frac{2850}{u^2} \text{ Fuß} = \frac{894{,}6}{u^2} \text{ Meter},$$

wobei u die Zahl der Umdrehungen pr. Minute bezeichnet. Da dieser Werth von CO für alle Wasserelemente einer und derselbe ist, so folgt, daß die Mittelkräfte aller den Durchschnitt DEH bildenden Wasserelemente nach O gerichtet sind, und daß daher der auf den Richtungen dieser Kräfte rechtwinkelig stehende Durchschnitt ein aus O beschriebener Kreis ist. Diesem zufolge bilden die Wasserspiegel in den Zellen eines oberschlägigen Wasserrades lauter einer und derselben Horizontalaxe entsprechende cylindrische Flächen.

Bodendruck. Der Druck des Wassers in einem Gefäße $ABCD$, §. 355 Fig. 590, ist unmittelbar unter dem Wasserspiegel am kleinsten, wird mit der Tiefe immer größer und größer und ist unmittelbar über dem Boden am größten. Dies ist zwar schon aus §. 353 zu folgern, läßt sich aber auch auf folgendem Wege beweisen. Nehmen wir an, daß der Wasserspiegel $H_0 R_0$, dessen Inhalt F_0 sein möge, von einer Kraft P_0, z. B. durch die darüber stehende Atmosphäre oder durch einen Kolben gleichförmig gedrückt werde, und denken uns die ganze Wassermasse durch viele Horizontalebenen wie $H_1 R_1$, $H_2 R_2$ u. s. w. in lauter gleich dicke Wasserschichten zerlegt. Ist F_1 der Inhalt des ersten Querschnittes $H_1 R_1$, λ die Dicke einer Wasserschicht und γ die Dichtigkeit des Wassers, so hat man das Gewicht der ersten Wasserschicht, $G_1 = F_1 \lambda \gamma$, und denjenigen Theil des

Fig. 590.



Druckes in $H_1 R_1$, welcher aus dem Drucke P_0 des Wasserspiegels $H_0 R_0$ entspringt, nach dem Principe in §. 352:

$$= \frac{P_0 F_1}{F_0}.$$

Addirt man nun beide Kräfte, so erhält man den Druck im Horizontalschnitte $H_1 R_1$:

$$P_1 = \frac{P_0 F_1}{F_0} + F_1 \lambda \gamma.$$

Dividirt man durch F_1, so erhält man die Gleichung:

$$\frac{P_1}{F_1} = \frac{P_0}{F_0} + \lambda \gamma,$$

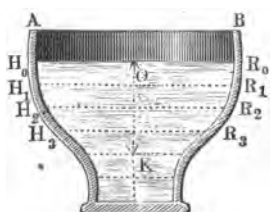
oder, da $\frac{P_0}{F_0}$ und $\frac{P_1}{F_1}$ die auf die Flächeneinheit bezogenen Drücke p_0 und p_1 in $H_0 R_0$ und $H_1 R_1$ bezeichnen:

$$p_1 = p_0 + \lambda \gamma.$$

Der Druck in dem folgenden Horizontalschnitte $H_2 R_2$ bestimmt sich genau so wie der Druck in der Schicht $H_1 R_1$, wenn man berücksichtigt, daß hier der anfängliche Druck auf die Einheit schon $p_1 = p_0 + \lambda \gamma$ ist, während er dort nur p_0 war. Es folgt der Druck in der Horizontalschicht $H_2 R_2$:

$$p_2 = p_1 + \lambda \gamma = p_0 + \lambda \gamma + \lambda \gamma = p_0 + 2 \lambda \gamma;$$

Fig. 591.



ebenso der Druck in der dritten Schicht $H_3 R_3$:

$$= p + 3 \lambda \gamma,$$

in der vierten:

$$= p_0 + 4 \lambda \gamma$$

und in der $n$ten:

$$= p_0 + n \lambda \gamma.$$

Nun ist aber $n \lambda$ die Tiefe $\overline{OK} = h$ dieser $n$ten Schicht unter dem Wasserspiegel, es läßt sich daher der Druck auf jede Flächeneinheit in der $n$ten Horizontalschicht setzen:

$$p = p_0 + h \gamma \text{ (vergl. §. 353).}$$

Man nennt die Tiefe h eines Flächenelementes unter dem Wasserspiegel die **Druckhöhe** (franz. charge d'eau; engl. height of water) desselben und findet hernach den Druck des Wassers auf irgend eine Flächeneinheit, wenn man den von außen wirkenden Druck um das Gewicht einer Wassersäule vermehrt, deren Basis diese Einheit und deren Höhe die Druckhöhe ist.

Bei einer horizontalen Fläche, wie z. B. am Boden CD (Fig. 591), ist die Druckhöhe h an allen Stellen eine und dieselbe, ist daher der Inhalt derselben $= F$, so folgt der Druck des Wassers gegen dieselbe:

$$P = (p_0 + h \gamma) F = F p_0 + F h \gamma = P_0 + F h \gamma,$$

oder, wenn man vom äußeren Drucke abstrahirt: $P = F h \gamma$.

Der Druck des Wassers gegen eine horizontale Fläche ist also gleich dem Gewichte der über ihr stehenden Wassersäule *Fh*.

Dieser Druck des Wassers gegen eine horizontale Fläche, z. B. gegen den horizontalen Boden oder gegen einen horizontaleu Theil der Seitenwand ist von der Form des Gefäßes unabhängig; ob also das Gefäß *A C*, Fig. 592, prismatisch wie *a*, oder oben weiter als unten, wie *b*, oder unten weiter als oben, wie *c*, oder schief wie *d*, oder ob es bauchig wie *e* ist u. s. w., immer bleibt der Druck gegen den Boden gleich dem Gewichte einer Wassersäule, deren Basis der Boden und deren Höhe die Tiefe des Bodens unter dem Wasserspiegel ist. Da sich der Druck des Wassers nach allen Seiten fortpflanzt, so findet dieses Gesetz auch dann noch seine Anwendung, wenn die Fläche, wie z. B. *B C* in Fig. 593, von unten nach oben gedrückt wird. Jede Flächeneinheit in der an *B C* anliegenden Wasserschicht *B K* wird durch eine Wassersäule von der Höhe $HB = RK = h$ gedrückt, es ist folglich auch der Druck gegen die Fläche *C B*, $= F h \gamma$, wenn *F* den Inhalt dieser Fläche bezeichnet.

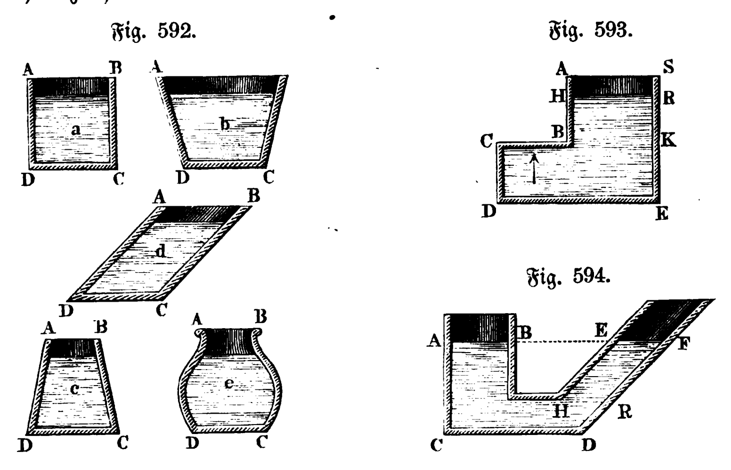


Fig. 592. Fig. 593. Fig. 594.

Es folgt auch hieraus noch, daß das Wasser in communicirenden Röhren *A B C* und *D E F*, Fig. 594, im Zustande des Gleichgewichtes gleich hoch steht, oder daß die Spiegel *A B* und *E F* desselben in eine und dieselbe Horizontalebene fallen. Zur Erhaltung des Gleichgewichtes ist es nöthig, daß die Wasserschicht *H R* durch die über ihr stehende Wassersäule *E R* ebenso stark nach unten gedrückt wird, als durch die unter ihr befindliche Wassermasse von unten nach oben. Da aber in beiden Fällen die gedrückte Fläche eine und dieselbe ist, so muß daher auch die Druckhöhe in beiden Fällen eine und dieselbe sein, es muß also der Wasserspiegel *A B* ebenso hoch über *H R* stehen als der Wasserspiegel *E F*.

§. 356 **Seitendruck.** Das soeben gefundene Gesetz von dem Wasserdrucke gegen eine Horizontalfläche läßt sich nicht unmittelbar auf eine gegen den Horizont geneigte ebene Fläche anwenden, da bei dieser die Druckhöhen an verschiedenen Stellen verschieden sind. Der Druck $p = h\gamma$ auf jede Flächeneinheit innerhalb der horizontalen Wasserschicht, welche um die Tiefe h unter dem Wasserspiegel steht, wirkt nach allen Richtungen (§. 352) und folglich auch rechtwinkelig gegen die festen Seitenwände des Gefäßes, die (nach §. 138) denselben vollkommen aufnehmen. Ist nun F_1 der Inhalt eines Elementes von einer Seitenfläche ABC, Fig. 595, und h_1 dessen Druckhöhe F_1H_1, so hat man den Normaldruck des Wassers gegen dasselbe:

Fig. 595.

$$P_1 = F_1 . h_1 \gamma;$$

ist ebenso F_2 ein zweites Flächenelement, und h_2 dessen Druckhöhe, so hat man den Normaldruck auf dasselbe:

$$P_2 = F_2 h_2 \gamma;$$

ebenso für ein drittes Element:

$$P_3 = F_3 h_3 \gamma \text{ u. s. w.}$$

Diese Normaldrücke bilden ein System von Parallelkräften, deren Mittelkraft P die Summe dieser Drücke, also

$$P = (F_1 h_1 + F_2 h_2 + \cdots)\gamma$$

ist. Nun ist aber noch

$$F_1 h_1 + F_2 h_2 + \cdots$$

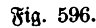
die Summe der statischen Momente von F_1, F_2 u. s. w. hinsichtlich der Oberfläche AOB des Wassers, und $= Fh$, wenn F der Inhalt der ganzen Fläche und h die Tiefe SO ihres Schwerpunktes S unter dem Wasserspiegel bezeichnet; es folgt daher der gesammte Normaldruck gegen die ebene Fläche:

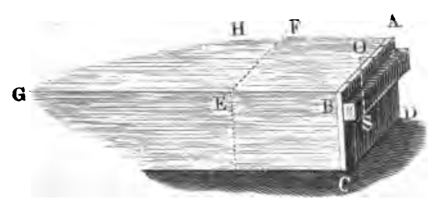
$$P = Fh\gamma.$$

Versteht man hier unter Druckhöhe einer Fläche die Tiefe SO ihres Schwerpunktes S unter dem Wasserspiegel, so gilt also allgemein die Regel: der Druck des Wassers gegen eine ebene Fläche ist gleich dem Gewichte einer Wassersäule, deren Basis die Fläche und deren Höhe die Druckhöhe der Fläche ist.

Uebrigens ist noch hervorzuheben, daß dieser Wasserdruck nicht von der Wassermenge, welche über oder vor der gedrückten Fläche steht, abhängt, daß also z. B. unter übrigens gleichen Umständen eine Spundwand $ABCD$, Fig 596, denselben Druck auszuhalten hat, sie mag das Wasser einer schmalen Schleuse $ACEF$, oder das eines größeren Teiches $ACGH$, oder das eines großen Sees abdämmen. Aus der Breite $AB = CD = b$ und

Höhe $AD = BC = a$ einer rectangulären Spundwand folgt die Fläche derselben: $F = ab$


Fig. 596.



und die Druckhöhe: $SO = \frac{a}{2}$, daher der Wasserdruck:

$$P = ab \cdot \frac{a}{2} \gamma = \frac{1}{2} a^2 b \gamma.$$

Es wächst also dieser Druck wie die Breite und wie das Quadrat der Höhe der gedrückten Fläche.

Beispiel. Wenn vor einem 4 Fuß breiten, 5 Fuß hohen und $2\frac{1}{2}$ Zoll dicken Schutzbrete aus Eichenholz das Wasser $3\frac{1}{2}$ Fuß hoch steht, wie groß ist die Kraft zum Aufziehen desselben?

Das Volumen des Bretes ist:

$$4 \,.\, 5 \,.\, \frac{5}{24} = \frac{25}{6} \text{ Cubikfuß.}$$

Nimmt man nun die Dichtigkeit des mit Wasser geschwängerten Eichenholzes nach §. 61, zu $61{,}75 \,.\, 1{,}11 = 73{,}26$ Pfund an, so folgt das Gewicht dieses Bretes:

$$G = \frac{25}{6} \,.\, 73{,}26 = 25 \,.\, 12{,}21 = 305{,}25 \text{ Pfund.}$$

Der Druck des Wassers gegen das Schutzbret und auch der Druck desselben gegen seine Führung ist:

$$P = \frac{1}{2} \,.\, (\frac{7}{2})^2 \,.\, 4 \,.\, 61{,}75 = 49 \,.\, 30{,}875 = 1513 \text{ Pfund};$$

setzt man nun den Coefficienten der Reibung für nasses Holz nach §. 174, $\varphi = 0{,}68$, so folgt die Reibung dieses Bretes in seiner Leitung:

$$F = \varphi P = 0{,}68 \,.\, 1513 = 1028{,}8 \text{ Pfund.}$$

Addirt man hierzu das Gewicht des Bretes, so erhält man die Kraft zum Aufziehen desselben:

$$= 1028{,}8 + 305{,}25 = 1334{,}05 \text{ Pfund.}$$

Mittelpunkt des Wasserdruckes. Die Mittelkraft $P = Fh\gamma$ aus sämmtlichen Elementarpressungen $F_1 h_1 \gamma$, $F_2 h_2 \gamma$ u. s. w. hat, wie jede andere Mittelkraft eines Systemes von Parallelkräften, einen bestimmten Angriffspunkt, den man den Mittelpunkt des Druckes nennt. Durch Unterstützung dieses Punktes wird dem ganzen Wasserdrucke einer Fläche das Gleichgewicht gehalten. Die statischen Momente der Elementarpressungen $F_1 h_1 \gamma$, $F_2 h_2 \gamma$ u. s. w. hinsichtlich der Ebene des Wasserspiegels ABO, Fig. 595, sind: §. 357

$$F_1 h_1 \gamma \,.\, h_1 = F_1 h_1^2 \gamma,\; F_2 h_2 \gamma \,.\, h_2 = F_2 h_2^2 \gamma \text{ u. s. w.};$$

es ist also das statische Moment des ganzen Wasserdruckes in Hinsicht auf diese Ebene:

$$(F_1 h_1^2 + F_2 h_2^2 + \cdots) \gamma.$$

Bezeichnet man nun den Abstand KM des Mittelpunktes M dieses Druckes vom Wasserspiegel durch z, so hat man das Moment des Wasserdruckes auch:

$$P z = (F_1 h_1 + F_2 h_2 + \cdots) z \gamma,$$

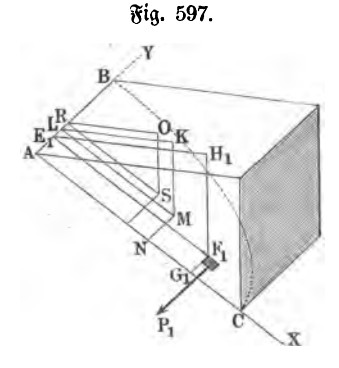
und es folgt nun durch Gleichsetzen beider Momente die in Frage stehende Tiefe des Mittelpunktes M unter dem Wasserspiegel:

$$1) \quad z = \frac{F_1 h_1^2 + F_2 h_2^2 + \cdots}{F_1 h_1 + F_2 h_2 + \cdots} \text{ oder } = \frac{F_1 h_1^2 + F_2 h_2^2 + \cdots}{F h},$$

wenn, wie oben, F den Inhalt der ganzen Fläche und h die Tiefe ihres Schwerpunktes unter dem Wasserspiegel ausdrücken.

Um diesen Druckpunkt vollständig zu bestimmen, hat man noch dessen Abstand von einer anderen Ebene oder Linie anzugeben. Setzt man die Abstände $F_1 G_1$, $F_2 G_2$ u. s. w. der Flächenelemente F_1, F_2 u. s. w. von der den Neigungswinkel der Ebene bestimmenden Falllinie $A C$, $= y_1, y_2$ u. s. w., so hat man die Momente der Elementardrücke in Hinsicht auf diese Falllinie:

Fig. 597.



$= F_1 h_1 y_1 \gamma$, $F_2 h_2 y_2 \gamma$ u. s. w., also das Moment der ganzen Fläche $= (F_1 h_1 y_1 + F_2 h_2 y_2 + \cdots) \gamma$; und bezeichnet man den Abstand $M N$ des Mittelpunktes M von eben dieser Linie durch v, so hat man dieses Moment auch $= (F_1 h_1 + F_2 h_2 + \cdots) v \gamma$; setzt man endlich beide Momente einander gleich, so erhält man die zweite Ordinate:

$$2) \quad v = \frac{F_1 h_1 y_1 + F_2 h_2 y_2 + \cdots}{F_1 h_1 + F_2 h_2 + \cdots} \text{ oder } = \frac{F_1 h_1 y_1 + F_2 h_2 y_2 + \cdots}{F h}.$$

Ist α der Neigungswinkel der Ebene $A B C$ gegen den Horizont, sind ferner x_1, x_2 u. s. w. die Entfernungen $E_1 F_1$, $E_2 F_2$ u. s. w. der Elemente F_1, F_2 u. s. w., und ist u der Abstand $L M$ des Druckmittelpunktes M von der Durchschnittslinie $A B$ der Ebene mit dem Wasserspiegel, so hat man $h_1 = x_1 \sin. \alpha$, $h_2 = x_2 \sin. \alpha$ u. s. w., sowie $z = u \sin. \alpha$; und führt man diese Werthe in den Ausdrücken für z und v ein, so ergiebt sich:

$$u = \frac{F_1 x_1^2 + F_2 x_2^2 + \cdots}{F_1 x_1 + F_2 x_2 + \cdots} = \frac{\text{Trägheitsmoment}}{\text{statisches Moment}} \text{ und}$$

$$v = \frac{F_1 x_1 y_1 + F_2 x_2 y_2 + \cdots}{F_1 x_1 + F_2 x_2 + \cdots} = \frac{\text{Centrifugalkraftmoment}}{\text{statisches Moment}}.$$

Man findet also die Abstände u und v des Druckmittelpunktes von der horizontalen Axe $A Y$ und von der durch die Falllinie gebildeten Axe $A X$, wenn man das statische Moment der Fläche in Hinsicht auf die erste Axe

einmal in das Trägheitsmoment derselben in Hinsicht auf dieselbe Axe und ein zweites Mal in das Centrifugalkraftmoment derselben in Hinsicht auf beide Axen dividirt. Auch ist der erste Abstand zugleich die Entfernung des Schwingungspunktes von der Durchschnittslinie mit dem Wasserspiegel (§. 327). Uebrigens ist leicht zu ermessen, daß der Mittelpunkt des Wasserdruckes mit dem in §. 313 bestimmten Mittelpunkte des Stoßes vollkommen zusammenfällt, wenn die Durchschnittslinie AY der Fläche mit dem Wasserspiegel als Drehaxe angesehen wird.

§. 358 **Wasserdruck gegen Rechtecke und Dreiecke.** Ist die gedrückte Fläche ein Rechteck AC, Fig. 598, mit horizontaler Grundlinie CD, so befindet sich der Mittelpunkt M des Druckes in der die Grundlinien halbirenden Falllinie KL und steht um $^2/_3$ dieser Linie von der Seite AB im Wasserspiegel ab. Reicht dieses Rechteck nicht bis zum Wasserspiegel, wie in Fig. 599, ist vielmehr der Abstand KL der unteren Basis CD vom

Fig. 598.

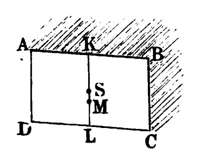


Fig. 599.

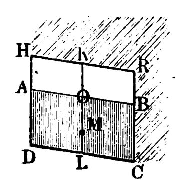
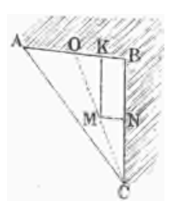


Fig. 600.



Wasserspiegel, $= l_1$ und der Abstand KO der oberen Basis AB, $= l_2$, so hat man den Abstand KM des Druckmittelpunktes vom Wasserspiegel HR:

$$u = {}^2/_3 \cdot \frac{l_1^3 - l_2^3}{l_1^2 - l_2^2}.$$

Für ein rechtwinkeliges Dreieck ABC, Fig. 600, dessen eine Kathete AB im Wasserspiegel liegt, ist der Abstand KM des Druckmittelpunktes M von AB (Beispiel §. 313):

$$u = \frac{{}^1/_6\, F \,.\, l^2}{{}^1/_3\, F \,.\, l} = {}^1/_2\, l,$$

wenn l die Höhe BC des Dreieckes bezeichnet.

Der Abstand dieses Punktes M von der anderen Kathete BC ist, da dieser Punkt jedenfalls in der das Dreieck halbirenden Linie CO liegt, welche von der Spitze O nach dem Mittelpunkte der Grundlinie geht, $NM = v = {}^1/_4\, b$, wo b die Grundlinie AB bezeichnet.

Liegt die Spitze C im Wasserspiegel, wie Fig. 601 (a. f. S.) angiebt, befindet sich also die Kathete AB unter der Spitze, so hat man:

$$KM = u = \frac{{}^1/_2\, F l^2}{{}^2/_3\, F l} = {}^3/_4\, l \text{ und}$$

$$NM = v = {}^3/_4 \cdot \frac{b}{2} = {}^3/_8\, b.$$

Befindet sich das ganze Dreieck ABC, Fig. 602, unter Wasser, steht die Grundlinie AB um $AH = l_2$ und die Spitze C um $CH = l_1$ vom Wasserspiegel HR ab, so hat man den Abstand MK des Druckmittelpunktes M vom Wasserspiegel HR:

Fig. 601.

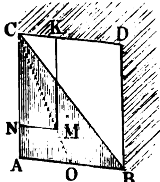
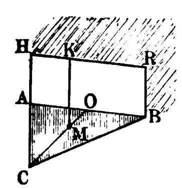


Fig. 602.



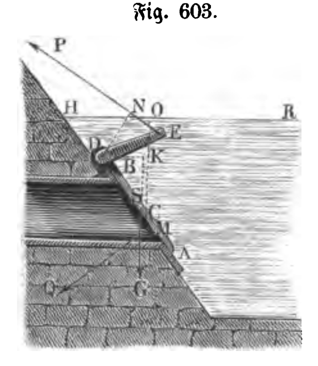
$$u = \frac{{}^1/_{18} F\, (l_1 - l_2)^2 + F\left(l_2 + \frac{l_1 - l_2}{3}\right)^2}{F\left(l_2 + \frac{l_1 - l_2}{3}\right)}$$

$$= \frac{{}^1/_{18}\, (l_1 - l_2)^2 + {}^1/_9\, (2\, l_2 + l_1)^2}{{}^1/_3\, (2\, l_2 + l_1)} = \frac{l_1^2 + 2\, l_1\, l_2 + 3\, l_2^2}{2\, (l_1 + 2\, l_2)}.$$

Auf ähnliche Weise lassen sich die Druckmittelpunkte von anderen ebenen Figuren bestimmen.

Beispiel. Welche Kraft P ist aufzuwenden, um die um eine horizontale Axe D drehbare kreisrunde Klappe AB, Fig. 603, aufzuziehen? Es sei die Länge DA dieser Klappe, $= 1^1/_2$ Fuß, ihr Durchmesser $AB = 1^1/_4$ Fuß, der Abstand ihres Schwerpunktes S von der Axe D, $DS = 0{,}75$ Fuß, und das Gewicht derselben, $G = 35$ Pfd.; ferner sei der Abstand DH der Drehaxe D von dem Wasserspiegel HR, in der Ebene der Klappe gemessen, $= 1$ Fuß und der Neigungswinkel dieser Ebene gegen den Horizont, $\alpha = 68^0$.

Fig. 603.



Die gedrückte Fläche ist:

$$F = \pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4} = 0{,}7854 \cdot \frac{25}{16}$$
$$= 1{,}2272 \text{ Quadratfuß},$$

und die Druckhöhe oder die Tiefe ihres Mittelpunktes C unter dem Wasserspiegel:

$$OC = h = HC\, sin.\, \alpha = (HD + DC)\, sin.\, \alpha = (HD + DB + BC)\, sin.\, \alpha$$
$$= (1 + 0{,}25 + 0{,}625)\, sin.\, 68^0 = 1{,}875\,.\,0{,}9272 = 1{,}7385 \text{ Fuß},$$

und daher der Druck des Wassers auf die Fläche $AB = F$:

$$Q = Fh\gamma = 1{,}2272\,.\,1{,}7385\,.\,61{,}75 = 131{,}73 \text{ Pfund}.$$

Der Hebelarm b dieser Kraft in Hinsicht auf die Drehaxe D ist der Abstand DM des Druckmittelpunktes M von derselben, also:

$$b = HM - HD.$$

Nun ist aber

$$HM = HC + \frac{r^2}{4HC} = 1{,}875 + \frac{1}{4\,.\,1{,}875} \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^2 = 1{,}9271 \text{ Fuß},$$

daher folgt:

$$b = 1{,}9271 - 1{,}0000 = 0{,}9271 \text{ Fuß},$$

und das gesuchte statische Moment des Wasserdruckes:

$$Qb = 131{,}73\,.\,0{,}9271 = 122{,}13 \text{ Fußpfund}.$$

Der Hebelarm des Gewichtes der Drehklappe ist

$$DK = \overline{DS}\,cos.\,\alpha = 0{,}75\,.\,cos.\,68^0 = 0{,}75\,.\,0{,}3746 = 0{,}2810 \text{ Fuß},$$

und daher das statische Moment dieses Gewichtes

$$= 35\,.\,0{,}2810 = 9{,}84 \text{ Fußpfund}.$$

Durch Addition beider Momente erhält man das ganze Moment zum Aufziehen der Klappe

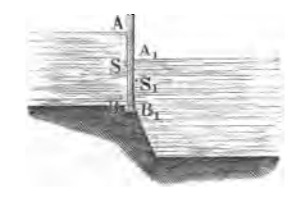
$$Pa = 122{,}13 + 9{,}84 = 131{,}97 \text{ Fußpfund},$$

und wirkt nun die Kraft zum Aufziehen an dem Hebelarme $DN = a = 0{,}75$ Fuß, so folgt die Größe derselben:

$$P = \frac{131{,}97}{0{,}75} = 175{,}96 \text{ Pfund}.$$

Druck auf beiden Seiten einer Fläche. Wird eine ebene Fläche AB, Fig. 604, zu beiden Seiten vom Wasser gedrückt, so resultirt aus den beiden Seiten entsprechenden Mittelkräften eine neue Mittelkraft, die sich durch Subtraction derselben von einander ergiebt, weil beide einander entgegen wirken. §. 359

Fig. 604.



Ist F der Inhalt des gedrückten Theiles auf der einen Seite der Fläche AB, und h die Tiefe AS seines Schwerpunktes unter dem Wasserspiegel, ferner F_1 der Inhalt des Theiles $A_1 B_1$ auf der anderen Seite der Fläche, und h_1 die Tiefe $A_1 S_1$ seines Schwerpunktes unter dem entsprechenden Wasserspiegel, so fällt die gesuchte Mittelkraft:

$$P = Fh\gamma - F_1 h_1 \gamma = (Fh - F_1 h_1)\,\gamma \text{ aus}.$$

Ist das Trägheitsmoment des ersten Flächentheiles in Hinsicht auf die Linie, in welcher die Ebene der Fläche den ersten Wasserspiegel schneidet, $= Fk^2$, so hat man das statische Moment des Wasserdruckes von der einen Seite

$$= Fk^2\,.\,\gamma;$$

und ist das Trägheitsmoment des zweiten Flächentheiles in Hinsicht auf die Durchschnittslinie mit dem zweiten Wasserspiegel, $= F_1 k_1^2$, so hat man

ebenso das statische Moment des Wasserdruckes von der anderen Seite in Hinsicht auf die Axe im zweiten Wasserspiegel

$$= F_1 k_1^2 \gamma.$$

Setzen wir nun den Abstand $A A_1$ der Wasserspiegel von einander, $= a$, so erhalten wir die Vergrößerung des letzten Momentes beim Uebergange von der Axe A_1 auf die Axe A,

$$= F_1 h_1 a \gamma,$$

und daher das statische Moment des Wasserdruckes $F_1 h_1 \gamma$ in Hinsicht auf die Axe A im ersten Wasserspiegel

$$= F_1 k_1^2 \gamma + F_1 h_1 . a . \gamma = (F_1 k_1^2 + F_1 a h_1) \gamma.$$

Hiernach folgt dann das statische Moment der Differenz beider Mitteldrücke

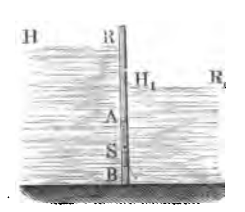
$$= (F k^2 - F_1 k_1^2 - a F_1 h_1) \gamma,$$

und der Hebelarm dieser Kraftdifferenz, oder der Abstand des Druckmittelpunktes von der Axe im ersten Wasserspiegel:

$$u = \frac{F k^2 - F_1 k_1^2 - a F_1 h_1}{F h - F_1 h_1}.$$

Sind die gedrückten Flächentheile einander gleich, welcher Fall eintritt, wenn, wie Fig. 605 repräsentirt, die ganze Fläche $A B = F$ unter Wasser ist, so hat man einfacher:

Fig. 605.



$$P = F (h - h_1) \gamma,$$

und da $k^2 = k_1^2 + 2 a h_1 + a^2$ (s. §. 224) und $h - h_1 = a$ ist,

$$u = \frac{k^2 - k_1^2 - a h_1}{h - h_1} = \frac{a h_1 + a^2}{a}$$

$$= h_1 + a = h.$$

In dem letzten Falle ist also der Druck gleich dem Gewichte einer Wassersäule, deren Grundfläche die gedrückte Fläche und deren Höhe der Höhenabstand $R H_1$ zwischen beiden Wasserspiegeln ist, und es fällt der Mittelpunkt des Druckes mit dem Schwerpunkte S der Fläche zusammen. Dieses Gesetz ist auch noch dann richtig, wenn beide Wasserspiegel außerdem noch durch gleiche Kräfte, z. B. durch Kolben, oder durch die Atmosphäre gedrückt werden. Denn ist dieser Druck auf jede Flächeneinheit $= p$, und also die entsprechende Wassersäulenhöhe $l = \frac{p}{\gamma}$ (§. 355), so hat man statt h, $h + l$ und statt h_1, $h_1 + l$ zu setzen, und es läßt die Subtraction die Kraft

$$P = (h + l - [h_1 + l]) F \gamma = (h - h_1) F \gamma$$

übrig. Aus diesem Grunde läßt man denn auch in der Regel bei hydrostatischen Untersuchungen den Atmosphärendruck außer Acht.

Beispiel. Die Höhe AB des Oberwassers bei einer Schifffahrtsschleuse, Fig. 606, beträgt 7 Fuß, das Wasser in der Kammer steht am Schleusenthore 4 Fuß hoch, und die Breite des Canals und der Kammer mißt 7,5 Fuß, welchen Mitteldruck hat das Schleusenthor auszuhalten?

Fig. 606.

Es ist

$$F = 7\,.\,7{,}5 = 52{,}5 \text{ und}$$

$$F_1 = 4\,.\,7{,}5 = 30 \text{ Quadratfuß, ferner:}$$

$$h = \frac{1}{2}\cdot 7 = \frac{7}{2} \text{ und } h_1 = \frac{4}{2} = 2 \text{ Fuß,}$$

$$a = 7 - 4 = 3 \text{ Fuß,}$$

$$k^2 = \frac{1}{3}\cdot 7^2 = \frac{49}{3} \text{ und } k_1^2 = \frac{1}{3}\cdot 4^2 = \frac{16}{3},$$

daher folgt der gesuchte Mitteldruck:

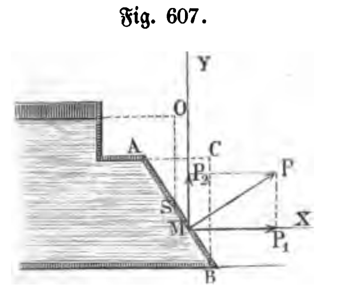
$$P = (Fh - F_1 h_1)\gamma = \left(52{,}5\cdot\frac{7}{2} - 30\cdot 2\right)\cdot 61{,}75 = 123{,}75\,.\,61{,}75$$
$$= 7641{,}7 \text{ Pfd.,}$$

und die Tiefe seines Angriffspunktes unter dem Oberwasserspiegel:

$$u = \frac{52{,}5\cdot\frac{49}{3} - 30\cdot\frac{16}{3} - 3\,.\,60}{52{,}5\cdot\frac{7}{2} - 60} = \frac{517{,}5}{123{,}75} = 4{,}182 \text{ Fuß.}$$

Druck nach einer bestimmten Richtung. In vielen Fällen ist es wichtig, nur einen, nach einer bestimmten Richtung wirkenden Theil des Wasserdruckes auf eine Fläche zu kennen. Um einen solchen Componenten zu finden, zerlegen wir den normalen Wasserdruck $\overline{MP} = P$ der Fläche $\overline{AB} = F$, Fig. 607, nach der gegebenen Richtung MX und nach der Richtung MY winkelrecht gegen dieselbe in zwei Seitenkräfte: §. 360

Fig. 607.



$$MP_1 = P_1 \text{ und } MP_2 = P_2.$$

Ist nun α der Winkel PMX, um welchen die Normalkraft von der gegebenen Richtung MX der Seitenkraft abweicht, so erhält man für die Componenten:

$$P_1 = P\cos.\alpha \text{ und } P_2 = P\sin.\alpha.$$

Entwirft man von der Fläche AB in einer winkelrecht auf der gegebenen Richtung MX stehenden Ebene die Projection BC, so hat man für deren Inhalt F_1 die Formel:

$$F_1 = F\,.\cos.\,ABC,$$

oder, da der Neigungswinkel ABC der Fläche zu ihrer Projection gleich ist dem Winkel $PMX = \alpha$ zwischen der Normalkraft P und ihrem Componenten P_1, so hat man:

$$F_1 = F\cos.\alpha, \text{ oder umgekehrt:}$$

$$\cos. \alpha = \frac{F_1}{F},$$

und daher die gesuchte Seitenkraft:

$$P_1 = P \cdot \frac{F_1}{F}.$$

Da noch der Normaldruck die Größe $P = Fh\gamma$ hat, so folgt endlich:

$$P_1 = F_1 h \gamma,$$

d. h. der Druck, womit das Wasser auf eine Fläche nach irgend einer Richtung drückt, ist gleich dem Gewichte einer Wassersäule, welche zur Basis die Projection der Fläche winkelrecht zur gegebenen Richtung und zur Höhe die Tiefe des Schwerpunktes der Fläche unter dem Wasserspiegel hat.

In den meisten Fällen der Anwendung ist es wichtig, nur den verticalen oder einen horizontalen Componenten vom Drucke des Wassers gegen eine Fläche zu kennen. Da die Projection winkelrecht zur Verticalrichtung, die Horizontal- und die Projection winkelrecht zu einer Horizontalrichtung eine Verticalprojection ist, so findet man den Verticaldruck des Wassers gegen eine Fläche, wenn man die Horizontalprojection oder den Grundriß derselben als gedrückte Fläche, und dagegen den Horizontaldruck des Wassers nach irgend einer Richtung, wenn man die Verticalprojection oder den Aufriß der Fläche winkelrecht gegen die gegebene Richtung als gedrückte Fläche behandelt, in beiden Fällen aber die Tiefe OS des Schwerpunktes S der Fläche unter dem Wasserspiegel als Druckhöhe ansieht.

Bei einem prismatischen Teichdamm $ABDE$, Fig. 608, hat man hiernach für die Horizontalgewalt des Wassers das verticale Längenprofil AC und für die Verticalkraft die Horizontalprojection BC der Wasserfläche AB als gedrückte Fläche anzusehen. Setzt man daher die Länge des Dammes, $= l$, die Höhe $AC = h$ und die vordere Böschung $BC = a$, so folgt die Horizontalkraft des Wassers

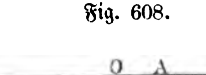
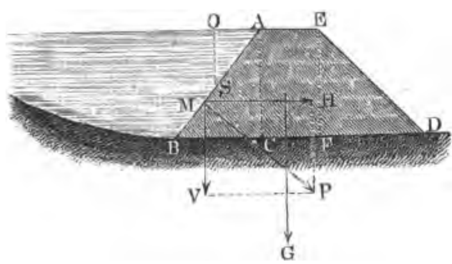


Fig. 608.



$$H = lh \cdot \frac{h}{2} \gamma = \frac{1}{2} h^2 l \gamma,$$

und der Verticaldruck desselben:

$$V = a\,l \cdot \frac{h}{2}\gamma = \frac{1}{2}\,a\,l\,h\,\gamma.$$

Ist nun noch die obere oder Dammkappenbreite $AE = b$, die hintere Böschung $DF = a_1$, und die Dichtigkeit der Dammmasse, $= \gamma_1$, so hat man das Gewicht des Dammes:

$$G = \left(b + \frac{a + a_1}{2}\right) h\,l\,\gamma_1,$$

und den ganzen Verticaldruck des Dammes gegen den horizontalen Boden:

$$V + G = \frac{1}{2}\,a l h \gamma + \left(b + \frac{a + a_1}{2}\right) h l \gamma_1 = \left[\frac{1}{2}\,a\gamma + \left(b + \frac{a + a_1}{2}\right)\gamma_1\right] hl.$$

Setzt man den Reibungscoefficienten $= \varphi$, so folgt nun die Reibung oder Kraft zum Fortschieben des Dammes:

$$F = \varphi\,(V + G) = \left[\frac{1}{2}\,a\,\gamma + \left(b + \frac{a + a_1}{2}\right)\gamma_1\right] \varphi\,h\,l.$$

In dem Falle, wenn der Horizontaldruck des Wassers dieses Fortschieben bewirken soll, ist daher zu setzen:

$$\frac{1}{2}\,h^2 l\,\gamma = \left[\frac{1}{2}\,\gamma\,a + \left(b + \frac{a + a_1}{2}\right)\gamma_1\right] . \,\varphi\,h\,l,$$

oder einfacher:

$$h = \varphi\left(a + (2\,b + a + a_1)\,\frac{\gamma_1}{\gamma}\right).$$

Damit also der Damm vom Wasser nicht fortgeschoben werde, muß sein:

$$h < \varphi\left(a + (2\,b + a + a_1)\frac{\gamma_1}{\gamma}\right) \text{ oder}$$

$$b > \frac{1}{2}\left[\left(\frac{h}{\varphi} - a\right)\frac{\gamma}{\gamma_1} - (a + a_1)\right].$$

Der Sicherheit wegen nimmt man wohl an, daß der Grund des Dammes größtentheils durchwaschen sei, weshalb äußerstenfalls noch ein Gegendruck von unten nach oben, $= (b + a + a_1)\,l\,h\,\gamma$ in Abzug zu bringen und

$$h < \varphi\left[(2\,b + a + a_1)\left(\frac{\gamma_1}{\gamma} - 1\right) - a_1\right]$$

zu setzen ist.

Beispiel. Die Dichtigkeit der Lehmdammmasse ist nahe doppelt so groß, als die des Wassers, also:

$$\frac{\gamma_1}{\gamma} = 2 \text{ und } \frac{\gamma_1}{\gamma} - 1 = 1;$$

es läßt sich daher für einen Lehmdamm einfach

$$h < \varphi\,(2\,b + a)$$

setzen. Erfahrungen zufolge widersteht ein Damm hinlänglich, wenn die Höhe,

Böschung und Kappenbreite desselben einander gleich sind; setzt man hiernach in der letzten Formel:

$h = b = a$, so ergiebt sich:
$\varphi = 1/_3$, weshalb man in anderen Fällen:

$$h = 1/_3\left[(2\,b + a + a_1)\left(\frac{\gamma_1}{\gamma} - 1\right) - a_1\right],$$

und insbesondere bei Lehmdämmen:

$h = 1/_3(2\,b + a)$, daher umgekehrt:

$$b = \frac{3\,h - a}{2}$$

zu setzen hat.

Beträgt die Dammhöhe 20 Fuß und der Böschungswinkel $\alpha = 36^0$, so ist die Böschung:

$$a = h\,cotg.\,\alpha = 20\,.\,cotg.\,36^0 = 20\,.\,1{,}3764 = 27{,}53 \text{ Fuß},$$

und daher die obere Damm- oder Kappenbreite:

$$b = \frac{60 - 27{,}53}{2} = 16{,}24 \text{ Fuß zu machen.}$$

§. 361 **Druck auf krumme Flächen.** Das im letzten Paragraphen gefundene Gesetz über den Druck des Wassers nach einer bestimmten Richtung gilt nur für ebene Flächen und für die einzelnen Elemente krummer Flächen, nicht aber für krumme Flächen überhaupt. Die Normaldrücke auf die einzelnen Elemente einer krummen Fläche lassen sich in Seitenkräfte parallel zu einer gegebenen Richtung und in andere, gegen erstere winkelrecht wirkend, zerlegen. Jene Seitendrücke bilden ein System von Parallelkräften, deren Mittelkraft den Druck in der gegebenen Richtung angiebt, und diese Seitenkräfte lassen sich ebenfalls auf eine Mittelkraft zurückführen, beide Mittelkräfte gestatten aber keine weitere Vereinigung, wenn ihre Richtungen nicht zum Durchschnitte gelangen (§. 97). Im Allgemeinen ist es also nicht möglich, die sämmtlichen Wasserdrücke gegen die Elemente einer krummen Fläche auf eine einzige Kraft zurückzuführen; es kommen jedoch einzelne Fälle vor, wo diese Vereinigung möglich ist.

Sind G_1, G_2, G_3 u. s. w. die Projectionen und h_1, h_2, h_3 u. s. w. die Druckhöhen von den Elementen F_1, F_2, F_3 u. s. w. einer krummen Fläche, so hat man den Druck des Wassers nach der Richtung winkelrecht zur Projectionsebene:

$$P = (G_1\,h_1 + G_2\,h_2 + G_3\,h_3 + \cdots)\,\gamma,$$

und das Moment desselben in Hinsicht auf die Ebene des Wasserspiegels:

$$Pu = (G_1\,h_1^2 + G_2\,h_2^2 + G_3\,h_3^2 + \cdots)\,\gamma.$$

Kann man die gedrückte krumme Fläche in Elemente zerlegen, die zu ihren Projectionen ein unveränderliches Verhältniß haben, läßt sich also

$\dfrac{G_1}{F_1} = \dfrac{G_2}{F_2} = \dfrac{G_3}{F_3}$ u. s. w. $= n$ setzen, so hat man:

$$G_1 = \frac{F_1}{n},\ G_2 = \frac{F_2}{n} \text{ u. s. w., daher:}$$

$$P = \left(\frac{F_1 h_1}{n} + \frac{F_2 h_2}{n} + \cdots\right)\gamma = \left(\frac{F_1 h_1 + F_2 h_2 + \cdots}{n}\right)\gamma = \frac{F h}{n}\gamma.$$

wo F den Inhalt der ganzen Fläche und h die Tiefe ihres Schwerpunktes unter dem Wasserspiegel bezeichnet. Nun hat man aber

$$F = F_1 + F_2 + \cdots = n G_1 + n G_2 + \cdots = n(G_1 + G_2 + \cdots) = n G,$$

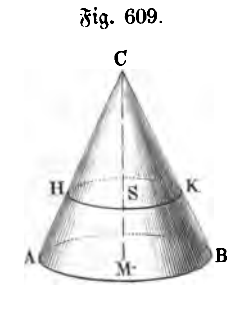
wenn G den Inhalt der Projection der ganzen Fläche ausdrückt, es ist daher:

$$P = \frac{F h}{n}\gamma = G h \gamma;$$

also wie bei jeder ebenen Fläche, der **Wasserdruck nach einer Richtung gleich dem Gewichte eines Wasserprismas, dessen Grundfläche der Projection der krummen Fläche winkelrecht gegen die gegebene Richtung und dessen Höhe der Tiefe des Schwerpunktes der krummen Fläche unter dem Wasserspiegel gleich kommt.**

So ist z. B. der Verticaldruck des Wassers gegen den Mantel eines mit Wasser gefüllten, kegelförmigen Gefäßes ACB, Fig. 609, gleich dem Gewichte einer Wassersäule, welche die Bodenfläche zur Basis und zwei Drittel der Axenlänge CM zur Höhe hat, weil sich die von der Bodenfläche gebildete Horizontalprojection des geraden Kegelmantels ebenso wie der Mantel in lauter gleiche trianguläre Elemente zerlegen läßt, und weil der Schwerpunkt S des Kegelmantels um zwei Drittel der Höhe des Kegels von der Spitze absteht (§. 116). Ist r der Halbmesser der Basis und h die Höhe des Kegels, so hat man den Druck gegen den Boden, $= \pi r^2 h \gamma$, und den Verticaldruck gegen den Mantel, $= {}^2/_3\, \pi r^2 h \gamma$; da aber der Boden mit der Seitenwand fest verbunden ist, und beide Drücke einander entgegen wirken, so folgt die Kraft, mit welcher das Gefäß durch das Wasser abwärts gedrückt wird,

Fig. 609.



$$= (1 - {}^2/_3)\,\pi r^2 h \gamma = {}^1/_3\, \pi r^2 h \gamma$$

= dem Gewichte der ganzen Wassermasse. Hätte man den Boden durch einen feinen Schnitt vom Mantel getrennt, so würde derselbe mit seiner vollen Kraft $\pi r^2 h \gamma$ nach unten, oder auf seine Unterlage drücken, dagegen wäre aber auch noch der Mantel mit einer Kraft ${}^2/_3\, \pi r^2 h \gamma$ niederzuhalten, um das Abheben desselben durch das Wasser zu verhindern.

Anmerkung. Es ist hiernach die Kraft, welche der Dampf einer Dampfmaschine oder das Wasser einer Wassersäulenmaschine auf den Kolben ausübt, unabhängig von der Form des Kolbens. Wie auch die Druckfläche durch Aushöhlung oder Abrundung vergrößert sein möge, immer bleibt der Druck, mit welchem der Dampf oder das Wasser den Kolben fortschiebt, gleich dem Producte aus dem Querschnitte oder der Horizontalprojection des Kolbens und aus dem Drucke auf die Flächeneinheit. Bei dem trichterförmigen Kolben AB, Fig. 610, dessen größerer Halbmesser $CA = CB = r$ und dessen kleinerer Halbmesser $GD = GE = r_1$ ist, mißt der Druck auf die Grundfläche, $= \pi r^2 p$ und die Reaction auf den Mantel, $= \pi (r^2 - r_1^2) p$; es ist daher der übrigbleibende wirksame Druck:

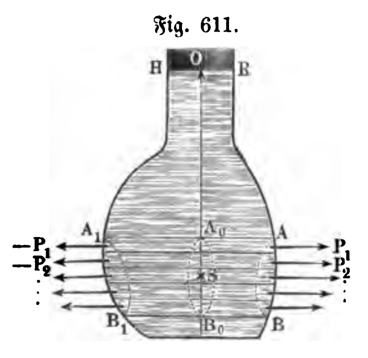
Fig. 610.

$$P = \pi r^2 p - \pi (r^2 - r_1^2) p = \pi r_1^2 p$$

= Querschnitt des Cylinders mal Druck auf die Flächeneinheit.

§. 362 **Horizontal- und Verticaldruck.** Wie auch eine krumme Fläche AB, Fig. 611, geformt sein möge, immer ist der Horizontaldruck des Wassers gegen dieselbe gleich dem Gewichte einer Wassersäule, welche zur Basis die Verticalprojection $A_0 B_0$ der Fläche winkelrecht gegen die gegebene Druckrichtung und zur Druckhöhe die Tiefe OS des Schwerpunktes S dieser Projection unter dem Wasserspiegel hat. Die Richtigkeit dieser Behauptung folgt aus der Formel

Fig. 611.



$$P = (G_1 h_1 + G_2 h_2 + \cdots) \gamma$$

sogleich, wenn man berücksichtigt, daß die Druckhöhen h_1, h_2 u. s. w. der Flächenelemente auch zugleich die Druckhöhen ihrer Projectionen sind, daß also

$$G_1 h_1 + G_2 h_2 + \cdots$$

das statische Moment der ganzen Projection, d. i. das Product Gh aus der Verticalprojection G und der Tiefe h ihres Schwerpunktes unter dem Wasserspiegel ist. Man hat also hier wieder

$$P = Gh\gamma$$

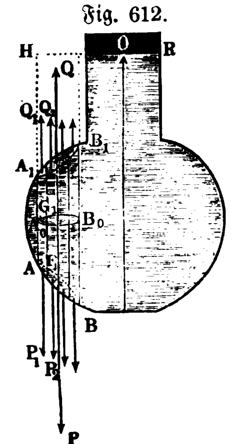
zu setzen, aber nicht außer Acht zu lassen, daß h die Druckhöhe der Verticalprojection ist.

Der Verticalschnitt, wodurch man ein Gefäß mit dem darin befindlichen Wasser in zwei gleiche oder ungleiche Theile theilt, ist zugleich die Verticalprojection von beiden Theilen, der Horizontaldruck auf einen Theil der Gefäßwand ist aber dem Producte aus der Verticalprojection desselben und der Tiefe ihres Schwerpunktes unter dem Wasserspiegel proportional; folglich

ist auch der Horizontaldruck des Wassers auf einen Theil AB der Gefäßwand genau so groß, als der entgegengesetzt wirkende Horizontaldruck auf den gegenüber liegenden Theil $A_1 B_1$ derselben, und es heben sich beide Kräfte im Gefäße gegenseitig auf. Das ganze Gefäß wird also von dem eingeschlossenen Wasser nach allen horizontalen Richtungen gleich stark gepreßt.

Der **Verticaldruck** $P_1 = G_1 h_1 \gamma$ des Wassers gegen ein Element F_1, Fig. 612, der Gefäßwand ist, da die Horizontalprojection G_1 des Elementes als Querschnitt und die Druckhöhe h_1 als Höhe und also $G_1 h_1$ als das Volumen eines Prismas angesehen werden kann, gleich dem Gewichte einer über dem Elemente stehenden und bis zur Ebene HR des Wasserspiegels reichenden Wassersäule HF_1. Die einen endlichen Theil AB des Bodens oder der Gefäßwand ausmachenden Flächenelemente erleiden daher auch einen Verticaldruck, welcher dem Gewichte sämmtlicher darüberstehenden Wassersäulen, d. i. dem Gewichte der über dem ganzen Stücke stehenden Wassersäule gleich ist. Setzen wir dieses Volumen V_1, so erhalten wir hiernach für den verticalen Wasserdruck:

Fig. 612.



$$P = V_1 \gamma.$$

Für einen anderen Theil $A_1 B_1$ der Gefäßwand, welcher senkrecht über dem vorigen liegt und das Volumen $A_1 B_1 H = V_2$ begrenzt, hat man den entgegengesetzten Verticaldruck:

$$Q = V_2 \gamma;$$

sind aber beide Theile fest mit einander verbunden, so resultirt aus beiden Kräften die vertical abwärts wirkende Kraft:

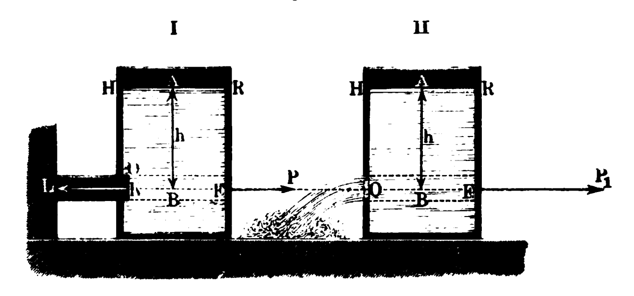
$$R = P - Q = (V_1 - V_2)\gamma = V\gamma$$

= **dem Gewichte der zwischen beiden Flächentheilen enthaltenen Wassersäule.** Wendet man endlich dieses Gesetz auf das ganze Gefäß an, so folgt, **daß der gesammte Verticaldruck des Wassers gegen das Gefäß gleich ist dem Gewichte der eingeschlossenen Wassermasse.**

Macht man eine Oeffnung O in die Seitenwand eines Gefäßes HBR, Fig. 613, I. u. II. (a. f. S.), so fällt der Theil des Druckes, welcher dem Querschnitte dieser Oeffnung entspricht, weg, und es bleibt daher der Druck auf das gegenüber liegende Flächenstück F übrig. Wird nun die Oeffnung wie in I., durch einen Stöpsel K verschlossen, dessen Zurückgehen ein Widerstand L von außen verhindert, so findet eine gleichmäßige Vertheilung des Horizontaldruckes auf die Gefäßwand nicht mehr statt, sondern es wird das Gefäß mit einer Kraft $P = Fh\gamma$ fortgeschoben, welche der Stöpsel in entgegengesetzter Richtung aufnimmt. Gelangt nach dem Entstöpseln der Mün-

dung das Wasser O zum Ausfluß, wie II. darstellt, so steigert sich in Folge

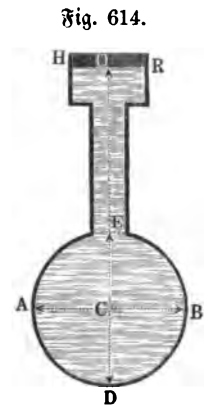
Fig. 613.



der Reaction des ausfließenden Wassers dieser Druck P von $Fh\gamma$ auf $P_1 = 2Fh\gamma$, wie in der Folge gezeigt werden wird.

Beispiel Der Verticaldruck P_1 des Wassers auf die untere Halbkugelfläche ADB, Fig. 614, ist dem Gewichte einer Wassersäule gleich, welche oben von der Ebene des Wasserspiegels HR und unten von dieser Halbkugelfläche begrenzt wird. Ist r der Halbmesser $CA = CD$ dieser Fläche, und h die Höhe CO des Wasserspiegels HR über der horizontalen Begrenzungsebene AB derselben, so hat man das Volumen der Halbkugel ABD, $V_1 = \frac{2}{3}\pi r^3$, und das des Cylinders über AB, $V_2 = \pi r^2 h$, daher:

Fig. 614.



$$P_1 = (V_1 + V_2)\gamma = (\tfrac{2}{3}\pi r^3 + \pi r^2 h)\gamma$$
$$= (h + \tfrac{2}{3} r)\pi r^2 \gamma.$$

Der nach oben gerichtete Verticaldruck auf die obere Halbkugelfläche AEB ist dagegen:

$$P_2 = (V_2 - V_1)\gamma = (h - \tfrac{2}{3} r)\pi r^2 \gamma;$$

daher folgt der gesammte Verticaldruck:

$$P = P_1 - P_2 = 2V_2 = \tfrac{4}{3}\pi r^3 \gamma$$

= dem Gewichte des Wassers in der ganzen Kugel.

Der horizontale Druck auf eine der Halbkugeln DAE und DBE, welche in der Verticalebene DCE zusammenstoßen, wird dagegen durch das Gewicht des Prismas von der Grundfläche $DCE = \pi r^2$ und der Höhe $CO = h$ gemessen, ist folglich:

$$R = \pi r^2 h \gamma.$$

§. 363 **Röhrenstärke.** Von besonderer Wichtigkeit ist die Anwendung der Lehre vom Wasserdrucke auf Röhren, Kessel u. s. w. Damit diese Gefäße dem Wasserdrucke hinreichend widerstehen und durch denselben nicht zersprengt werden, hat man ihnen eine gewisse, der Druckhöhe und der inneren Weite entsprechende Wandstärke zu geben. Das Zersprengen einer Röhre kann

entweder in Quer- oder in Längenrissen vor sich gehen. Die letzteren entstehen jedoch leichter als die ersteren, wie aus Folgendem erhellen wird.

Ist die Druckhöhe des Wassers in einer Röhre, $= h$, also der Druck desselben auf die Flächeneinheit, $p = h\gamma$, ferner die Weite dieser Röhre, $MN = 2\,CM = 2\,r$, Fig. 615, also der Querschnitt des Wasserkörpers in derselben, $F = \pi r^2$, so beträgt der auf die Endflächen der Röhre ausgeübte und von dem Querschnitte der Röhrenmasse aufzunehmende Wasserdruck:

$$P = Fp = \pi r^2 h \gamma = \pi r^2 p.$$

Hat nun die Röhrenwand eine Dicke $AD = BE = e$, so ist der Querschnitt derselben

$$= \pi (r + e)^2 - \pi r^2 = 2\pi r e + e^2 = 2\pi r e \left(1 + \frac{e}{2r}\right),$$

und bezeichnet man endlich den Tragmodul des Röhrenmaterials durch T, so läßt sich die Tragkraft der ganzen Röhre in der Axenrichtung,

Fig. 615.

$$P = \left(1 + \frac{e}{2r}\right) 2\pi r e T$$

setzen, so daß nun die Gleichung

$$\left(1 + \frac{e}{2r}\right) 2\pi r e T = \pi r^2 p \text{ oder}$$

$$\left(1 + \frac{e}{2r}\right) 2 e T = r p \text{ (s. §. 205)}$$

aufgestellt werden kann, deren Auflösung die gesuchte Röhrenstärke

$$e = \frac{r p}{2\left(1 + \frac{e}{2r}\right) T},$$

oder meist genau genug,

$$e = \frac{r p}{2\,T} = \frac{r h \gamma}{2\,T} \text{ giebt.}$$

Der mittlere Druck, welchen das Wasser auf ein Wandstück AMB ausübt, dessen Länge $= l$, und Centriwinkel $ACB = 2\alpha^0$ ist, beträgt, da die Projection dieses Stückes rechtwinkelig gegen die Mittellinie CM ein Rechteck vom Inhalte $\overline{AB}.l = 2 r l \sin. \alpha$ ist,

$$P = 2 r l \sin. \alpha . p = 2 r l h \sin. \alpha . \gamma.$$

Dieser Kraft wird durch die Cohäsionskräfte R, R in den Querschnitten $\overline{AD}.l$ und $\overline{BE}.l = el$ der Röhrenwand das Gleichgewicht gehalten; sie ist daher der Summe $2\,Q$ derjenigen Componenten $\overline{DQ} = Q$ und $\overline{EQ} = Q$ der letzteren Kräfte gleich zu setzen, welche mit der Mittellinie CM parallel gerichtet sind. Setzen wir nun $R = e l T$, so erhalten wir:

$$Q = R \sin. ARQ = R \sin. ACM = e l T \sin. \alpha,$$

und daher:

$$2 e l T \sin. \alpha = 2 r l p \sin. \alpha, \text{ d. i. } e T = r p,$$

und es ist hiernach die gesuchte Röhrenstärke:

$$e = \frac{r p}{T} = \frac{r h \gamma}{T},$$

also ganz unabhängig von der Lage und Länge der Risse.

Da die erste Entwickelung e nur $= \frac{r p}{2 T}$ giebt, so folgt, daß zur Verhinderung der Entstehung von Längenrissen die Wandstärke noch einmal so groß zu machen ist, als zur Verhinderung der Bildung eines Querrisses.

Aus der gefundenen Formel

$$e = \frac{r p}{T} = \frac{r h \gamma}{T}$$

folgt, daß sich die Stärken gleichartiger Röhren wie die Weiten und wie die Druckhöhen oder Drücke auf die Flächeneinheit verhalten müssen. Eine Röhre, welche dreimal so weit ist, als eine andere, und einen fünfmal so großen Druck auf jede Flächeneinheit auszuhalten hat, als diese, muß eine fünfzehnmal so starke Wand erhalten.

Hohlen Kugeln, welche von innen einen Druck p auf jede Flächeneinheit aushalten müssen, hat man die Stärke

$$e = \frac{r p}{2 T}$$

zu geben, weil hier die Projection der Druckfläche der größte Kreis πr^2, und die Trennungsfläche der Ring $2 \pi r e \left(1 + \frac{e}{2 r}\right)$, oder annähernd, bei kleinerer Dicke, $= 2 \pi r e$ ist.

Die gefundenen Formeln geben für $p = 0$ auch $e = 0$, deshalb müßten also Röhren, welche keinen inneren Druck auszuhalten haben, unendlich dünn gemacht werden; da aber jede Röhre schon in Folge ihres eigenen Gewichtes einen gewissen Druck aushalten und auch eine gewisse Dicke erhalten muß, damit sie wasserdicht wird, so hat man zu der gefundenen Größe noch eine gewisse Dicke e_1 hinzuzufügen, um die Stärke einer unter allen Umständen widerstehenden Röhre zu erhalten. Es ist solchem nach für cylindrische Röhren oder Kessel zu setzen:

$$e = e_1 + \frac{r h \gamma}{T},$$

oder einfacher, wenn d die ganze innere Röhrenweite, p den Druck in

Atmosphären, jede einer 33 Fuß hohen Wassersäule entsprechend, und μ eine Erfahrungszahl bezeichnet:

$$e = e_1 + \mu p d.$$

Gemachten Erfahrungen zufolge ist anzunehmen für Röhren von:

Eisenblech	$e = 0{,}00086\,pd + 0{,}12$	Zoll
Gußeisen	$e = 0{,}00238\,pd + 0{,}33$	"
Kupfer	$e = 0{,}00148\,pd + 0{,}16$	"
Blei	$e = 0{,}00507\,pd + 0{,}20$	"
Zink	$e = 0{,}00242\,pd + 0{,}16$	"
Holz	$e = 0{,}0323\;pd + 1{,}04$	"
natürlichen Steinen . .	$e = 0{,}0369\;pd + 1{,}15$	"
künstlichen Steinen . .	$e = 0{,}0538\;pd + 1{,}53$	"

Beispiel. Wenn eine Wassersäulenmaschine senkrecht stehende, im Inneren 10 Zoll weite Einfallröhren aus Gußeisen hat, wie stark müssen dieselben bei 100, 200 und 300 Fuß Tiefe sein? Nach der Formel ist bei 100 Fuß Druck diese Stärke $= 0{,}00238 \cdot {}^{100}/_{33} \cdot 10 + 0{,}33 = 0{,}07 + 0{,}33 = 0{,}40$ Zoll; bei 200 Fuß $= 0{,}14 + 0{,}33 = 0{,}47$ Zoll, und bei 300 Fuß Druck $= 0{,}22 + 0{,}33 = 0{,}55$ Zoll. Gewöhnlich prüft man gußeiserne Leitungsröhren auf 10 Atmosphären, weshalb hiernach

$$e = 0{,}0238 \cdot d + 0{,}33 \text{ Zoll},$$

also für Röhren von 10 Zoll Weite die Stärke:

$$e = 0{,}24 + 0{,}33 = 0{,}57 \text{ Zoll}$$

anzuwenden ist.

Anmerkung 1. Im zweiten Theile werden die Wandstärken der Röhren auch für den Fall ermittelt, wo die Röhren nicht bloß hydrostatischen Druck, sondern auch hydraulische Stöße auszuhalten haben. (S. „Ingenieur“ S. 422.)

Anmerkung 2. Von den Stärken der Dampfkesselwände wird im zweiten Theile gehandelt. Ueber die Theorie der Röhrenstärke ist eine Abhandlung von Herrn geh. Regierungsrath Brix in den Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbefleißes in Preußen, Jahrgang 1834, sowie Wiebes Lehre von den einfachen Maschinentheilen, Band I., nachzulesen. Ebenso Rankine's Manuel of applied Mechanics, S. 289, und Scheffler's Monographien über die Gitter- und Bogenträger, und über die Festigkeit der Gefäßwände. Von den technischen Verhältnissen und von den Prüfungen der Röhren wird gehandelt in Hagen's Handbuch der Wasserbaukunst, Theil I., ferner in Genieys's Essai sur les moyens de conduire etc. les eaux, und im Traité théoretique et pratique de la conduite et de la distribution des eaux, par Dupuit, Paris 1854.

Zweites Capitel

Vom Gleichgewichte des Wassers mit anderen Körpern.

§. 364 **Auftrieb.** Ein unter das Wasser getauchter Körper wird durch das Wasser von allen Seiten her gedrückt, und es entsteht nun die Frage nach der Größe, Richtung und dem Angriffspunkte der Mittelkraft aus allen diesen Pressungen. Denken wir uns diese Mittelkraft aus einem verticalen und zwei horizontalen Componenten bestehend, und bestimmen wir diese Kräfte nach den Regeln des §. 362. Der Horizontaldruck des Wassers gegen eine Fläche ist gleich dem Horizontaldrucke gegen ihre Verticalprojection nun ist aber jede Projection eines Körpers $A\,C$, Fig. 616, Projection vom Hintertheil $A\,D\,C$ und Vordertheil $A\,B\,C$ seiner Oberfläche zugleich, es fällt daher auch der horizontale Wasserdruck P gegen den Hintertheil der Oberfläche eines Körpers eben so groß aus als der Druck $-P$ gegen den Vordertheil, und es ist in Folge der entgegengesetzten Richtungen dieser Drücke, die Mittelkraft derselben gleich Null. Da dieses Verhältniß bei jeder beliebigen Horizontalrichtung und dieser entsprechenden Verticalprojection stattfindet, so folgt, daß die Resultirende aus allen Horizontalpressungen Null ist, daß also der unter dem Wasser befindliche Körper $A\,C$ nach allen horizontalen Richtungen gleich stark gedrückt wird und deshalb kein Bestreben hat, sich in einer Horizontalrichtung fortzubewegen.

Fig. 616.

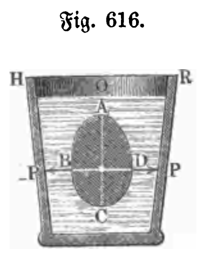
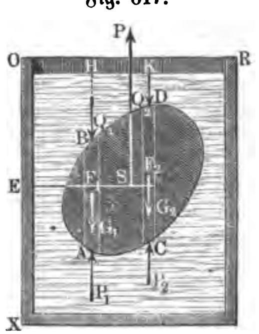


Fig. 617.



Um den Verticaldruck des Wassers gegen den eingetauchten Körper $A\,B\,D$, Fig. 617, zu finden, denken wir uns denselben in verticale Elemen=

tarprismen AB, CD u. s. w. zerlegt, und bestimmen die Verticaldrücke auf die Endflächen A und B, C und D derselben u. s. w. Sind die Längen dieser Säulen l_1, l_2 u. s. w., die Tiefen HB, KD ihrer oberen Enden B, D unter dem Wasserspiegel OR, h_1, h_2 u. s. w., und ihre horizontalen Querschnitte F_1, F_2 u. s. w., so hat man die von oben nach unten wirkenden Verticaldrücke gegen die Enden B, D u. s. w.

$$Q_1,\ Q_2 \text{ u. s. w.} = F_1 h_1 \gamma,\ F_2 h_2 \gamma \text{ u. s. w.},$$

und dagegen die von unten nach oben und gegen die Enden A, C u. s. w. wirkenden Drücke

$$P_1,\ P_2 \text{ u. s. w.} = F_1\,(h_1 + l_1)\,\gamma,\ F_2\,(h_2 + l_2)\,\gamma \text{ u. s. w.};$$

und es folgt nun durch Vereinigung dieser Parallelkräfte die Mittelkraft:

$$P = P_1 + P_2 + \cdots - (Q_1 + Q_2 + \cdots)$$
$$= F_1(h_1 + l_1)\gamma + F_2(h_2 + l_2)\gamma + \cdots - F_1 h_1 \gamma - F_2 h_2 \gamma - \cdots$$
$$= (F_1 l_1 + F_2 l_2 + \cdots)\gamma = V\gamma,$$

wenn V das Volumen des eingetauchten Körpers oder des verdrängten Wassers bezeichnet.

Hiernach ist also der *Auftrieb*, oder die *Kraft, mit welcher das Wasser einen darin eingetauchten Körper von unten nach oben emporzutreiben sucht, gleich dem Gewichte des verdrängten Wassers oder einer Wassermenge, welche mit dem untergetauchten Körper einerlei Volumen hat.*

Um endlich noch den Angriffspunkt dieser Mittelkraft zu finden, setzen wir die Abstände EF_1, EF_2 u. s. w. der Elementarsäulen AB, CD u. s. w. von einer Verticalebene OX, a_1, a_2 u. s. w. und bestimmen die Momente der Kräfte in Hinsicht auf diese Ebene. Ist nun S der Angriffspunkt des Auftriebes und $ES = x$ der Abstand desselben von jener Grundebene, so hat man:

$$V\gamma \,.\, x = F_1 l_1 \gamma \,.\, a_1 + F_2 l_2 \gamma \,.\, a_2 + \cdots,$$

und daher:

$$x = \frac{F_1 l_1 a_1 + F_2 l_2 a_2 + \cdots}{F_1 l_1 + F_2 l_2 + \cdots} = \frac{V_1 a_1 + V_2 a_2 + \cdots}{V_1 + V_2 + \cdots},$$

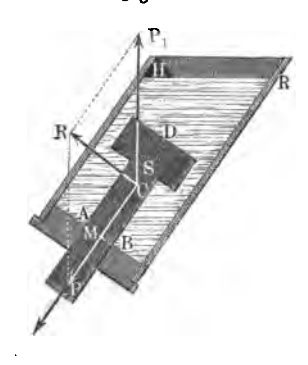
wenn V_1, V_2 u. s. w. die Inhalte der säulenförmigen Elemente bezeichnen. Da sich (nach §. 105) der Schwerpunkt des Körpers genau nach derselben Formel bestimmt, so folgt, *daß der Angriffspunkt S des Auftriebes mit dem Schwerpunkte des verdrängten Wassers zusammenfällt.*

Auftrieb bei theilweiser Umgebung mit Wasser. Wenn ein Körper, wie ABD, Fig. 618 (a. f. S.), nicht vollständig vom Wasser AHR umgeben ist, sondern mit der Gefäßwand in einer ebenen Fläche $\overline{AB}$ vom Inhalte F zusammenhängt, oder die Gefäßwand mit dem Querschnitte $\overline{AB} = F$ durchdringt, so fällt von der Wirkung des Wassers

§. 365

auf den Körper die Kraft weg, welche dieselbe auf die Fläche AB ausüben würde, wenn letztere frei, also ebenfalls mit dem Wasser in Berührung wäre.

Fig. 618.



Bezeichnet nun h die Druckhöhe auf AB, d. i. die Tiefe des Schwerpunktes dieser Fläche unter dem Wasserspiegel HR, so wäre der Wasserdruck auf AB, $P = Fh\gamma$ und giebt V_1 das Volumen des von ABD verdrängten Wassers an, so ist der Auftrieb des Wassers, welcher den Körper senkrecht aufwärts zu bewegen suchen würde, wenn er ganz frei wäre, $P_1 = V_1 \gamma$.

Da nun aber der Druck auf AB wegfällt, so ist die Gesammtwirkung des Wassers auf den Körper nur die Mittelkraft R aus $P_1 = V_1 \gamma$ und $-P = -Fh\gamma$. Um diese Mittelkraft zu bestimmen, hat man die verticale Schwerlinie des verdrängten Wasserkörpers und die durch den Mittelpunkt M des Druckes auf AB winkelrecht stehende Gerade bis zum Durchschnitt C zu verlängern, die Kräfte P_1 und $-P$ in diesem Punkte angreifend anzunehmen, und dieselben mittels des Parallelogrammes der Kräfte zu einer Mittelkraft $\overline{CR} = R$ zu vereinigen.

Ist die Neigung der Fläche AB gegen den Horizont, sowie die Abweichung der Kraft P_1 von der Verticalen, $= \alpha$, so hat man folglich den Winkel, welchen die Richtungen der Kräfte P und $-P_1$ zwischen sich einschließen, $MCP_1 = 180^0 - \alpha$, und daher die Größe der den gesammten Wasserdruck auf den Körper ABD messenden Mittelkraft

$$R = \sqrt{P_1^2 + P^2 - 2PP_1 \cos.\alpha}$$
$$= \gamma \sqrt{V_1^2 + (Fh)^2 - 2V_1 Fh \cos.\alpha}.$$

Dem Princip von der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung entsprechend, findet natürlich auch eine gleiche Reaction $-R$ des Körpers auf das Wasser statt. Ist V_0 das Volumen des Wassers im Gefäße, also $V_0\gamma$ das Gewicht G desselben, so folgt die Kraft, mit welcher das Gefäß vertical abwärts gedrückt wird,

$$Q = V_0\gamma + P_1 = (V_0 + V_1)\gamma \text{ d. i. } Q = V\gamma,$$

wenn $V = V_0 + V_1$ das Volumen des vom Wasser und vom Körper ABD zugleich eingenommenen Raumes bezeichnet.

Vereinigt man nun noch hiermit den Druck $P = Fh\gamma$, so folgt die Gesammtkraft, welche das Gefäß aufzunehmen hat,

$$R_1 = \sqrt{Q^2 + P^2 - 2QP\cos.\alpha}$$
$$= \gamma\sqrt{V^2 + (Fh)^2 - 2VFh \cos.\alpha}.$$

Wäre die Fläche AB horizontal, also $\alpha =$ Null, so hätte man

$$R = (V_1 - Fh)\gamma \text{ und } R_1 = (V + Fh)\gamma.$$

Wäre auch noch $V_1 = 0$, so würde $R = -Fh\gamma$ ausfallen (s. §. 355).

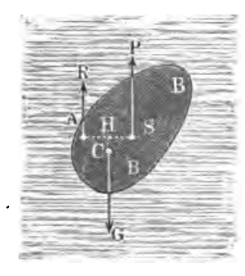
§. 366 **Gleichgewicht der schwimmenden Körper.** Zu dem Auftriebe P eines in oder unter Wasser getauchten Körpers gesellt sich noch das in entgegengesetzter Richtung wirkende Gewicht G des Körpers, und es ergiebt sich nun aus beiden eine Mittelkraft:

$$R = G - P \text{ oder } = (\varepsilon - 1)\, V\gamma,$$

wenn ε das specifische Gewicht des Körpers bezeichnet.

Ist die Körpermasse homogen, so fällt der Schwerpunkt des verdrängten Wassers mit dem des Körpers zusammen, und es ist daher dieser Punkt zugleich der Angriffspunkt von der Mittelkraft $R = G - P$; findet aber eine Homogenität nicht statt, so fallen diese Schwerpunkte nicht zusammen, und es weicht deshalb auch der Angriffspunkt der Mittelkraft R von beiden Schwerpunkten ab. Setzen wir den Horizontalabstand SH, Fig. 619, beider Schwerpunkte von einander, $= b$ und den Horizontalabstand SA des gesuchten Angriffspunktes A von dem Schwerpunkte S des verdrängten Wassers, $= a$, so haben wir die Gleichung:

Fig. 619.



$$Gb = Ra,$$

woraus sich

$$a = \frac{Gb}{R} = \frac{Gb}{G - P}$$

ergiebt.

Wird der eingetauchte Körper seiner eigenen Schwere überlassen, so können folgende drei Fälle eintreten. Entweder ist das specifische Gewicht ε des Körpers gleich dem des Wassers, oder es ist größer, oder es ist kleiner als das specifische Gewicht des Wassers. Im ersten Falle ist der Auftrieb gleich dem Gewichte, im zweiten ist er kleiner und im dritten ist er größer als das Gewicht des Körpers. Während im ersten Falle Gleichgewicht zwischen dem Gewichte und dem Auftriebe eintritt, muß der Körper im zweiten Falle mit der Kraft

$$G - V\gamma = (\varepsilon - 1)\, V\gamma$$

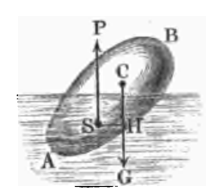
sinken, und im dritten Falle mit der Kraft

$$V\gamma - G = (1 - \varepsilon)\, V\gamma$$

steigen. Das Steigen geht aber nur so lange vor sich, bis die von der Ebene des Wasserspiegels abgeschnittene und von dem Körper verdrängte

Wassermasse V_1 mit dem ganzen Körper einerlei Gewicht hat. Das Gewicht $G = V \varepsilon \gamma$ des Körpers AB, Fig. 620, und der Auftrieb $P = V_1 \gamma$ bilden nun ein Kräftepaar, durch welches der Körper noch so weit umgedreht wird, bis die Richtungen beider Kräfte zusammenfallen, oder bis der Schwerpunkt des Körpers mit dem Schwerpunkte des verdrängten Wassers in eine und dieselbe Verticallinie fällt. Aus der Gleichheit der Kräfte P und G folgt der Ausdruck:

Fig. 620.



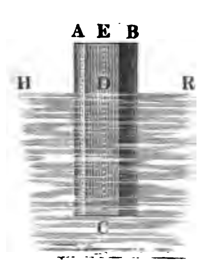
$$V_1 = \varepsilon V, \text{ oder } \frac{V_1}{V} = \frac{\varepsilon}{1}.$$

Man nennt die Linie durch den Schwerpunkt des schwimmenden Körpers und durch den des verdrängten Wassers die Schwimmaxe (franz. axe de flottaison; engl. axis of floating), und dagegen den durch die Ebene des Wasserspiegels gebildeten Schnitt des schwimmenden Körpers die Schwimmebene (franz. plan de flottaison; engl. plane of floating). Dem Vorstehenden zufolge kann jede Ebene, welche einen Körper so theilt, daß die Schwerpunkte beider Theile in einer Normallinie zu dieser Ebene liegen, und daß sich der eine Theil zum Ganzen wie das specifische Gewicht des Körpers zu dem der Flüssigkeit verhält, Schwimmebene des Körpers sein.

§. 367 **Schwimmtiefe.** Kennt man die Gestalt und das Gewicht eines schwimmenden Körpers, so läßt sich mit Hülfe der vorstehenden Regel die Tiefe des Eintauchens im Voraus berechnen. Ist G das Gewicht des Körpers, so setze man das Volumen des verdrängten Wassers:

$$V_1 = \frac{G}{\gamma};$$

Fig. 621.



verbindet man hiermit die stereometrische Formel für dieses Volumen V_1, so erhält man die gesuchte Bestimmungsgleichung.

Für ein Prisma ABC, Fig. 621, mit verticaler Axe ist z. B. $V_1 = Fy$, wenn F den Querschnitt und y die Tiefe CD des Eintauchens bezeichnet, es folgt daher:

$$Fy = \frac{G}{\gamma} \text{ und } y = \frac{G}{F\gamma} = \frac{Gh}{V\gamma},$$

wenn V das Volumen und h die Länge des schwimmenden Prismas bezeichnet.

Für eine mit der Spitze unter Wasser schwimmende Pyramide

ABC, Fig. 622, ist, da sich die Inhalte ähnlicher Pyramiden wie die Cuben ihrer Höhen verhalten,

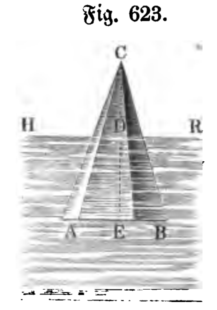
$$\frac{V_1}{V} = \frac{y^3}{h^3}, \text{ und folglich die Tiefe der Eintauchung:}$$

$$CD = y = h\sqrt[3]{\frac{V_1}{V}} = h\sqrt[3]{\frac{G}{V\gamma}},$$

wo V das Volumen und h die Höhe der Pyramide bezeichnen.

Fig. 622.

Fig. 623.



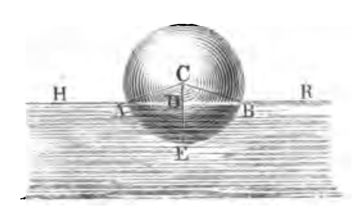
Für eine mit der Basis unter Wasser schwimmende Pyramide ABC, Fig. 623, ergiebt sich hingegen der Abstand $CD = y_1$ der Spitze vom Wasserspiegel, aus der Höhe h der ganzen Pyramide, indem man setzt:

$\frac{V_1}{V} = \frac{h^3 - y_1^3}{h^3}$, wonach dann $y_1 = h\sqrt[3]{1 - \frac{V_1}{V}} = h\sqrt[3]{1 - \frac{G}{V\gamma}}$ folgt.

Für eine Kugel AB, Fig. 624, mit dem Halbmesser $CA = r$ ist

$$V_1 = \pi y^2 \left(r - \frac{y}{3}\right),$$

Fig. 624.



daher hat man hier es mit der Auflösung der cubischen Gleichung

$$y^3 - 3ry^2 + \frac{3G}{\pi\gamma} = 0$$

zu thun, um die Tiefe $DE = y$ der Eintauchung der Kugel zu finden.

Für einen mit horizontaler Axe schwimmenden Cylinder AK, Fig. 625 (a. f. S.), vom Halbmesser $AC = BC = r$ ist, wenn α^0 den Centriwinkel ACB des eingetauchten Bogens bezeichnet, die Tiefe DE der Eintauchung:

$$y = r\,(1 - \cos. \tfrac{1}{2}\alpha),$$

um aber den Wasserbogen α zu finden, setzen wir das Volumen des verdrängten

Wassers = Ausschnitt $\left(\frac{r^2\alpha}{2}\right)$ minus Dreieck $\left(\frac{r^2 \sin.\alpha}{2}\right)$, multiplicirt durch die Länge $BK = l$ des Cylinders, also

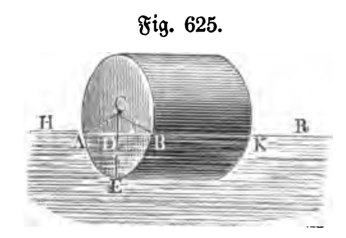


Fig. 625.

$$(\alpha - \sin.\alpha)\frac{l r^2}{2} = \frac{G}{\gamma},$$

und lösen die Gleichung

$$\alpha - \sin.\alpha = \frac{2\,G}{l\,r^2\gamma}$$

auf dem Wege der Näherung in Beziehung auf α auf.

Beispiele. 1) Wenn eine schwimmende Holzkugel von 10 Zoll Durchmesser, $4\frac{1}{2}$ Zoll tief schwimmt, so ist das Volumen des von ihr verdrängten Wassers:

$$V_1 = \pi\,(9/2)^2\,(5 - 9/6) = \frac{\pi\,.\,81\,.\,7}{8} = \frac{567\,.\,\pi}{8} = 222{,}66 \text{ Cubikzoll},$$

während die Kugel selbst den Inhalt $\frac{\pi d^3}{6} = \frac{\pi\,.\,10^3}{6} = 523{,}6$ Cubikzoll hat. Es wiegen hiernach 523,6 Cubikzoll Kugelmasse ebensoviel wie 222,66 Cubikzoll Wasser, und es folgt das specifische Gewicht der ersteren:

$$\varepsilon = \frac{222{,}66}{523{,}6} = 0{,}425.$$

2) Wie tief schwimmt ein Holzcylinder von 10 Zoll Durchmesser bei einem specifischen Gewichte $\varepsilon = 0{,}425$? Es ist:

$$\frac{\alpha - \sin.\alpha}{2} = \frac{\pi r^2 l\,.\,\varepsilon\gamma}{l\,r^2\gamma} = \pi\varepsilon = 0{,}425\,.\,\pi = 1{,}3352;$$

nun giebt die Segmententafel im „Ingenieur", S. 154, für den Inhalt $\frac{\alpha - \sin.\alpha}{2} = 1{,}32766$ eines Kreissegmentes den Centriwinkel $\alpha^0 = 166^0$, und für $\frac{\alpha - \sin.\alpha}{2} = 1{,}34487$ denselben $= 167^0$, es läßt sich daher einfach der dem Abschnitte 1,3352 entsprechende Centriwinkel

$$\alpha^0 = 166^0 + \frac{1{,}33520 - 1{,}32766}{1{,}34487 - 1{,}32766}\cdot 1^0 = 166^0 + \frac{754^0}{1721} = 166^0 26';$$

und die Tiefe der Eintauchung:

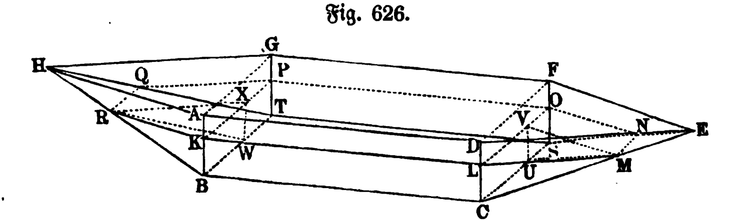
$$y = r\,(1 - \cos.\tfrac{1}{2}\alpha) = 5\,(1 - \cos.83^0 13') = 5\,.\,0{,}8819 = 4{,}41 \text{ Zoll}$$

setzen.

§. 368 Die Bestimmung der Eintauchungstiefe kommt vorzüglich bei Kähnen und Schiffen vor. Haben diese Fahrzeuge eine gesetzmäßige Form, so läßt sich diese Tiefe mittels geometrischer Formeln berechnen; fehlt aber die gesetzmäßige Form oder ist das Gesetz der Gestaltung nicht bekannt, oder ist die Form sehr zusammengesetzt, so muß man die Tiefe des Eintauchens durch Experimentiren oder durch Probiren bestimmen.

Ein Beispiel für den ersten Fall gewährt der in Fig. 626 abgebildete, von den ebenen Flächen begränzte Kahn $ACEGH$. Derselbe besteht aus

Fig. 626.



einem Parallelepipede ACF und aus zwei, den Vorder- und Hintertheil bildenden vierseitigen Pyramiden CEF und BGH, und seine Schwimmebene ist aus einem Parallelogramme $KLOP$ und aus zwei Trapezen $LMNO$ und $KPQR$ zusammengesetzt, welche einen Wasserraum abschneiden, der sich in ein Parallelepiped $KCOT$, in zwei dreiseitige Prismen, wie $UVMN$ und $WXRQ$, und in zwei vierseitige Pyramiden, wie CVM und BXR zerlegen läßt. Setzen wir die Länge $AD = BC$ des Mittelstückes $= l$, die Breite $AG = b$ und die Höhe $AB = h$, ferner die Länge von jedem der beiden Schnäbel, $= c$ und die Tiefe der Einsenkung unter Wasser, d. i. $BK = CL = y$. Es folgt zunächst der eingetauchte Theil $KCOT$ des Mittelstückes:

$$= \overline{BC} \,.\, \overline{CS} \,.\, \overline{CL} = l\,b\,y.$$

Setzen wir die Breite der Basis der Pyramide CVM, $CU = x$, und die Höhe dieser Pyramide $= z$, so haben wir:

$$\frac{x}{b} = \frac{z}{c} = \frac{y}{h}, \text{ daher:}$$

$$x = \frac{b}{h}\,y \text{ und } z = \frac{c}{h}\,y;$$

es folgt nun der Inhalt dieser Pyramide:

$$= \tfrac{1}{3}\,x\,y\,z = \frac{b\,c\,y^3}{3\,h^2},$$

und daher der Inhalt der beiden Pyramiden (CVM und BXR) zusammen

$$= \tfrac{2}{3}\,\frac{b\,c\,y^3}{h^2}.$$

Der Querschnitt des dreiseitigen Prismas UVN ist:

$$= \tfrac{1}{2}\,y\,z = \frac{c\,y^2}{2\,h}, \text{ und die Seite } MN = VO:$$

$$= b - \frac{b\,y}{h} = b\left(1 - \frac{y}{h}\right),$$

daher folgt der Inhalt der beiden Prismen VUN und XWQ zusammen:

$$= 2 \cdot \frac{c y^2}{2 h} \cdot b \left(1 - \frac{y}{h}\right) = \frac{b c y^2}{h} \left(1 - \frac{y}{h}\right).$$

Endlich ergiebt sich durch Addition der gefundenen drei Räume das Volumen des verdrängten Wassers:

$$V = b l y + {}^2/_3 \frac{b c y^3}{h^2} + \frac{b c y^2}{h} - \frac{b c y^3}{h^2} = \left(l + \frac{c y}{h} - {}^1/_3 \cdot \frac{c y^2}{h^2}\right) b y.$$

Ist nun das Bruttogewicht des Schiffes, $= G$, so hat man zu setzen:

$$\left(l + \frac{c y}{h} - {}^1/_3 \cdot \frac{c y^2}{h^2}\right) b y \gamma = G, \text{ oder}$$

$$y^3 - 3 h y^2 - \frac{3 l h^2}{c} \cdot y + \frac{3 h^2 G}{b c \gamma} = 0.$$

Durch die Auflösung der letzten cubischen Gleichung bestimmt sich aus dem Bruttogewichte G des Schiffes die Tiefe y der Einsenkung desselben.

Beispiele. 1) Wenn bei einem Schiffe die Länge des Mittelstückes, $l = 50$ Fuß, die Länge eines jeden Schnabels, $c = 15$ Fuß, die Breite $b = 12$ Fuß und die Tiefe $h = 4$ Fuß beträgt, so kann bei einer Einsenkungstiefe $y = 2$ Fuß die ganze Belastung betragen:

$$G = [50 + 15 \, . \, {}^2/_4 - {}^1/_3 \, . \, 15 \, . \, ({}^2/_4)^2] \, . \, 12 \, . \, 2 \, . \, 61{,}74$$
$$= (50 + 7{,}5 - 1{,}25) \, . \, 24 \, . \, 61{,}74 = 84920 \text{ Pfund}.$$

2) Wenn bei dem vorigen Schiffe das Bruttogewicht 50000 Pfund ausmacht, so hat man für die Senkungstiefe:

$$y^3 - 12 y^2 - 160 y + 215{,}96 = 0.$$

Hieraus folgt

$$y = \frac{215{,}96 + y^3 - 12 y^2}{160} = 1{,}35 + 0{,}00625 y^3 - 0{,}075 y^2, \text{ annähernd}$$

$$y = 1{,}350 + 0{,}00625 \, . \, (1{,}35)^3 - 0{,}075 \, . \, (1{,}35)^2$$
$$= 1{,}35 + 0{,}0154 - 0{,}1367 = 1{,}229, \text{ und nun genauer}$$
$$y = 1{,}350 + 0{,}00625 \, . \, (1{,}229)^3 - 0{,}075 \, (1{,}229)^2 = 1{,}225 \text{ Fuß}.$$

Anmerkung. Um das Gewicht der Ladungen eines Schiffes anzugeben, versieht man dieses zu beiden Seiten mit einer Scala, der sogenannten Schiffsaiche. Die Eintheilung einer solchen Aiche wird in der Regel empirisch gefunden, indem man untersucht, welche Einsenkungen bestimmten Belastungen entsprechen. Ausführlicher darüber im dritten Bande.

§. 369 **Stabilität schwimmender Körper.** Das Schwimmen der Körper erfolgt entweder in aufrechter oder in schiefer Stellung, ferner mit oder ohne Stabilität. Aufrecht schwimmt ein Körper, z. B. ein Schiff, wenn wenigstens eine durch die Schwimmaxe gehende Ebene Symmetrieebene des Körpers ist, schief schwimmt derselbe, wenn er durch keine der Ebenen, welche sich durch die Schwimmaxe legen lassen, in zwei symmetrische Theile getheilt wird.

Ein Körper schwimmt mit Stabilität, wenn er seinen Gleichgewichtszustand zu behaupten sucht (vergl. §. 141), wenn also mechanische Arbeit aufzuwenden ist, um ihn aus dieser Lage zu bringen, oder wenn er von selbst in die Gleichgewichtslage zurückkehrt, nachdem man ihn daraus gebracht hat. Ohne Stabilität schwimmt dagegen der Körper, wenn er in eine neue Gleichgewichtslage übergeht, nachdem er, etwa durch Erschütterung oder durch einen Stoß u. s. w., aus der ersten gebracht worden ist.

Wird ein vorher aufrecht schwimmender Körper ABC, Fig. 627, in eine schiefe Lage gebracht, so tritt der Schwerpunkt S des verdrängten Wassers aus der Symmetrieebene EF heraus und nimmt eine Stelle S_1 auf der mehr eingetauchten Hälfte des Schiffsraumes ein. Der in S_1 angreifende Auftrieb $P = V\gamma$ und das im Schwerpunkte C des Schiffes angreifende Gewicht $G = -P$ des Schiffes bilden nun ein Kräftepaar, durch welches (s. §. 93) stets eine Drehung hervorgebracht wird. Um welchen Punkt auch diese Drehung vor sich gehe, immer wird doch C, dem Gewichte G nachgebend, niedergehen, und S_1 oder ein anderer Punkt M der Verticalen S_1P, der Kraft P folgend, aufsteigen, es wird also die Symmetrie- oder Axenebene EF des Schiffes in C nach unten und in M nach oben gezogen, und daher dieselbe sich aufrecht stellen, wenn M, wie in Fig. 627, über C liegt, und sich

Fig. 627.

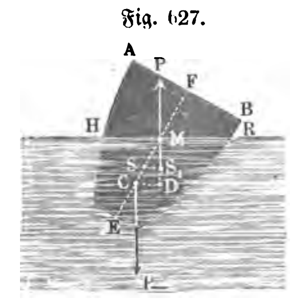
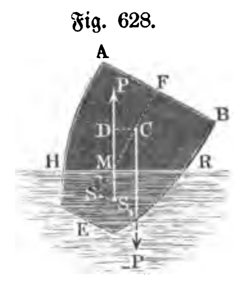


Fig. 628.



dagegen noch mehr neigen, wie in Fig. 628, wenn sich M unter C befindet. Hiernach hängt denn die Stabilität eines schwimmenden Körpers oder Schiffes von dem Punkte M ab, in welchem die Verticale durch den Schwerpunkt S_1 des verdrängten Wassers die Symmetrieebene schneidet. Man nennt diesen Punkt das Metacentrum (franz. métacentre; engl. metacentrum). Ein Schiff oder ein anderer Körper schwimmt also hiernach mit Stabilität, wenn sein Metacentrum über dem Schwerpunkte des Schiffes liegt, und ohne solche, wenn es darunter liegt; er ist endlich im indifferenten Gleichgewichte, wenn beide Punkte zusammenfallen.

Der Horizontalabstand CD des Metacentrums M von dem Schwerpunkte C des Schiffes ist der Hebelarm des von P und $G = -P$ gebildeten Kräfte-

paares, und daher das Moment des letzteren oder das Maß der Stabilität $= P . \overline{CD}$. Bezeichnen wir die Entfernung CM durch c, und den Drehungswinkel SMS_1 des Schiffes oder seiner Axenebene durch φ, so erhalten wir für das Maß der Stabilität des Schiffes:

$$S = Pc \sin. \varphi;$$

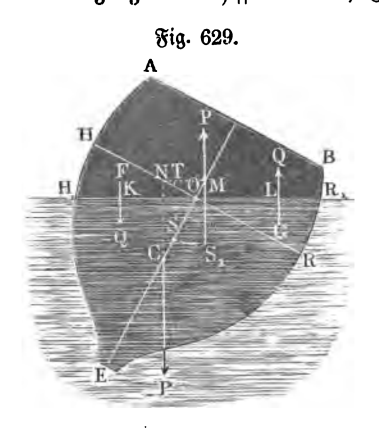
und es ist also hiernach dieses um so größer, je größer das Gewicht, je größer die Entfernung des Metacentrums von dem Schwerpunkte des Schiffes und je größer der Neigungswinkel des letzteren ist.

§. 370 **Bestimmung des Stabilitätsmomentes.** In der letzten Formel

$$S = Pc \sin. \varphi$$

hängt die Stabilität des Schiffes vorzüglich von der Entfernung des Metacentrums vom Schwerpunkte des Schiffes ab, es ist daher von Wichtigkeit, sich eine Formel zur Bestimmung dieser Entfernung zu verschaffen. Durch den Uebergang des Schiffes ABE, Fig. 629, aus der aufrechten Lage in die schiefe Lage rückt der Schwerpunkt S nach S_1, es geht der keilförmige Raum HOH_1 aus dem Wasser hervor und zieht sich der keilförmige Raum ROR_1 unter das Wasser hinab, und es wird dadurch der Auftrieb auf der einen Seite um eine im Schwerpunkte F des Raumes HOH_1 angreifende Kraft Q vermindert und auf der anderen Seite um eine im Schwerpunkte G des Raumes ROR_1 angreifende gleiche Kraft Q vergrößert. Es ersetzt also hiernach der in S_1 angreifende Auftrieb P den anfänglich in S angreifenden Auftrieb sammt dem Kräftepaare $(Q, -Q)$, oder, was auf Eins hinauskommt, eine in S_1 angreifende Gegenkraft $-P$ hält der in S angreifenden Kraft P sammt Kräftepaar $(Q, -Q)$ das Gleichgewicht, oder einfacher, ein Kräftepaar $(P, -P)$ mit den Angriffspunkten S und S_1 ist mit dem Kräftepaare $(Q, -Q)$ im Gleichgewichte.

Fig. 629.



Ist nun das Querprofil $HER = H_1ER_1$ des im Wasser befindlichen Schiffstheiles, $= F$, und das Querprofil $HOH_1 = ROR_1$ des Raumes, um welchen sich das Schiff auf der einen Seite herausgezogen und auf der anderen tiefer eingetaucht hat, $= F_1$, ist ferner der Horizontalabstand KL der Schwerpunkte dieser Räume, $= a$, und der Horizontalabstand MT der Schwerpunkte S und S_1 oder die Horizontalprojection des Weges SS_1,

welchen S beim Kippen durchläuft, $= s$, so hat man in Folge des Gleichgewichtszustandes beider Kräftepaare:

$$Fs = F_1 a, \text{ daher } s = \frac{F_1}{F} a \text{ und}$$

$$\overline{SM} = \frac{MT}{sin.\ \varphi} = \frac{s}{sin.\ \varphi} = \frac{F_1 a}{F sin.\ \varphi}.$$

Die als Factor in das Maß der Stabilität eintretende Linie $CM = c$ ist $= CS + SM$; bezeichnen wir daher noch den Abstand CS des Schwerpunktes C des Schiffes von dem Schwerpunkte S des verdrängten Wassers durch e, so erhalten wir das Stabilitätsmaß:

$$S = Pc\ sin.\ \varphi = P\left(\frac{F_1 a}{F} + e\ sin.\ \varphi\right).$$

Ist der Drehungswinkel klein, so lassen sich die Querschnitte HOH_1 und ROR_1 als gleichschenkelige Dreiecke ansehen; bezeichnet man die Breite $HR = H_1 R_1$ des Schiffes an der Eintauchungsstelle durch b, so kann man

$$F_1 = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} b \cdot \tfrac{1}{2} b \varphi = \tfrac{1}{8} b^2 \varphi \text{ und } KL = a = 2 \cdot \tfrac{2}{3} \frac{b}{2} = \tfrac{2}{3} b,$$

sowie $sin.\ \varphi = \varphi$ setzen, weshalb die Stabilität

$$S = P\left(\tfrac{1}{12} \frac{b^3 \varphi}{F} + e\varphi\right) = \left(\frac{b^3}{12F} + e\right) P\varphi \text{ folgt.}$$

Fällt der Schwerpunkt C des Schiffes mit dem Schwerpunkte S des verdrängten Wassers zusammen, so hat man $e = 0$, daher:

$$S = \frac{b^3}{12F} \cdot P\varphi,$$

und liegt der Schwerpunkt des Schiffes über dem des verdrängten Wassers, so ist dagegen e negativ, daher:

$$S = \left(\frac{b^3}{12F} - e\right) P\varphi.$$

Auch folgt, daß die Stabilität eines Schiffes in Null übergeht, wenn e negativ und zugleich $e = \frac{b^3}{12F}$ ist.

Man sieht aus dem gewonnenen Ergebnisse, daß die Stabilität um so größer ausfällt, je breiter das Schiff ist und je tiefer der Schwerpunkt desselben liegt.

Beispiel. Bei einem Parallelepipede AD, Fig. 630 (a. f. S.), von der Breite $AB = b$, Höhe $AE = h$ und Einsenkungstiefe $EH = y$, ist $F = by$ und $e = -\frac{h-y}{2}$, daher das Maß der Stabilität:

$$S = P\varphi\left(\frac{b^3}{12\,b\,y} - \frac{h}{2} + \frac{y}{2}\right)$$

oder, wenn das specifische Gewicht der Masse des Parallelepipedes, $= \varepsilon$ gesetzt wird:

Fig. 630.

$$S = P\varphi\left(\frac{b^2}{12\,\varepsilon\,h} - \frac{h}{2}\,(1 - \varepsilon)\right).$$

Hiernach hört die Stabilität auf, wenn

$$b^2 = 6\,h^2\,\varepsilon\,(1 - \varepsilon), \text{ d. i. wenn}$$

$$\frac{b}{h} = \sqrt{6\,\varepsilon\,(1 - \varepsilon)} \text{ wird.}$$

Für $\varepsilon = \frac{1}{2}$ folgt:

$$\frac{b}{h} = \sqrt{\tfrac{6}{2} \cdot \tfrac{1}{2}} = \sqrt{\tfrac{3}{2}} = 1{,}225;$$

wenn also die Breite noch nicht 1,225 der Höhe ist, so schwimmt das Parallelepiped ohne Stabilität.

§. 371 **Schiefes Schwimmen.** Die Formel

$$S = P\left(\frac{F_1\,a}{F} \pm e\ sin.\ \varphi\right)$$

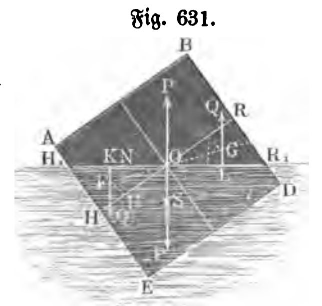
für die Stabilität eines schwimmenden Körpers läßt sich auch dazu anwenden, um die verschiedenen Lagen schwimmender Körper zu finden; denn setzen wir $S =$ Null, so erhalten wir die Gleichung, welche die Gleichgewichtslage bedingt, deren Auflösung auf die Bestimmung des entsprechenden Neigungswinkels führt. Es ist also die Gleichung

$$\frac{F_1\,a}{F} \pm e\ sin.\ \varphi = 0$$

in Hinsicht auf φ aufzulösen.

Für ein Parallelepiped $ABDE$, Fig. 631, ist der Querschnitt $F = HRDE = H_1\,R_1\,DE = by$, wenn b die Breite $AB = HR$ und y die Senktiefe $EH = DR$ bezeichnet, sowie der Querschnitt

Fig. 631.



$$F_1 = HOH_1 = ROR_1,$$

als rechtwinkeliges Dreieck mit der Kathete

$$OH = OR = \frac{1}{2}\,b,$$

und der Kathete

$$HH_1 = RR_1 = \frac{1}{2}\,b\ tang.\ \varphi:$$

$$F_1 = \frac{1}{8}\,b^2\ tang.\ \varphi.$$

Nun steht ferner der Schwerpunkt F von der Basis HR um

$$FU = \frac{1}{3}\,HH_1 = \frac{1}{6}\,b\ tang.\ \varphi$$

und von der Mitte O um

$$OU = \frac{2}{3}\,OH = \frac{1}{3}\,b$$

ab, es folgt daher der Horizontalabstand des Schwerpunktes F von der Mitte O:

$$= \overline{OK} = \overline{ON} + \overline{NK} = \overline{OU} \cos.\varphi + \overline{FU} \sin.\varphi$$
$$= \tfrac{1}{3} b \cos.\varphi + \tfrac{1}{6} b \,\mathrm{tang}.\varphi \sin.\varphi,$$

und der Arm:

$$a = \overline{KL} = 2\,\overline{OK} = \tfrac{2}{3} b \cos.\varphi + \tfrac{1}{3} b \frac{\sin.\varphi^2}{\cos.\varphi}.$$

Diesemnach ist die Gleichung für die schiefe Gleichgewichtslage:

$$\frac{\tfrac{1}{8} b^2 \,\mathrm{tang}.\varphi \,(\tfrac{2}{3} b \cos.\varphi^2 + \tfrac{1}{3} b \sin.\varphi^2)}{b\,y \cos.\varphi} - e \sin.\varphi = 0,$$

oder, $\frac{\sin.\varphi}{\cos.\varphi} = \mathrm{tang}.\varphi$ eingeführt:

$$\sin.\varphi\,[(\tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{24}\,\mathrm{tang}.\varphi^2)\, b^2 - e\,y] = 0;$$

welcher Gleichung durch

$$\sin.\varphi = 0 \text{ und durch}$$

$$\mathrm{tang}.\varphi = \sqrt{2}\sqrt{\frac{12\,e\,y}{b^2} - 1}$$

Genüge geleistet wird. Dem durch die erste Gleichung bestimmten Winkel $\varphi = 0$ entspricht das aufrechte, dem zweiten aber das schiefe Schwimmen. Die Möglichkeit des letzteren bedingt, daß $\frac{e\,y}{b^2} > \tfrac{1}{12}$ ausfällt. Ist nun h die Höhe des Parallelepipedes und ε dessen specifisches Gewicht, so hat man:

$$y = \varepsilon h \text{ und } e = \frac{h - y}{2} = (1 - \varepsilon)\frac{h}{2},$$

daher folgt:

$$\mathrm{tang}.\varphi = \sqrt{2}\sqrt{\frac{6\,\varepsilon\,(1-\varepsilon)\,h^2}{b^2} - 1},$$

und es ist die Bedingungsgleichung für das schiefe Schwimmen:

$$\frac{h}{b} > \sqrt{\frac{1}{6\,\varepsilon\,(1-\varepsilon)}}.$$

Beispiele. 1) Wenn das schwimmende Parallelepiped eben so hoch als breit ist und das specifische Gewicht $\varepsilon = \tfrac{1}{2}$ hat, so ist

$$\mathrm{tang}.\varphi = \sqrt{2}\sqrt{3 \,.\, \tfrac{1}{2} - 1} = \sqrt{3 - 2} = 1, \text{ daher } \varphi = 45^0.$$

2) Wenn die Höhe $h = 0{,}9$ der Breite b, das specifische Gewicht aber wieder $\tfrac{1}{2}$ ist, so hat man

$$\mathrm{tang}.\varphi = \sqrt{3 \,.\, 0{,}81 - 2} = \sqrt{0{,}43} = 0{,}6557, \text{ daher } \varphi = 33^0\,15'.$$

Specifisches Gewicht. §. 372 Das Gesetz vom Auftriebe des Wassers läßt sich zur Bestimmung der Dichtigkeit oder des specifischen Gewichtes von Körpern benutzen. Nach §. 364 ist der Auftrieb des Wassers gleich dem Gewichte der verdrängten Flüssigkeit; bezeichnet daher V das Volumen des

Körpers und γ_1 die Dichtigkeit der Flüssigkeit, so hat man den Auftrieb $P = V\gamma_1$. Ist nun aber γ_2 die Dichtigkeit der Körpermasse, so hat man das Gewicht des Körpers, $G = V\gamma_2$, es folgt daher das Dichtigkeitsverhältniß:

$$\frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \frac{G}{P},$$

d. h. die Dichtigkeit des eingetauchten Körpers verhält sich zur Dichtigkeit des Fluidums, wie das absolute Gewicht des Körpers zum Auftriebe oder Gewichtsverluste beim Untertauchen.

Hiernach ist also $\gamma_2 = \frac{G}{P}\gamma_1$ und $\gamma_1 = \frac{P}{G}\gamma_2$; oder wenn γ die Dichtigkeit des Wassers, ε_1 das specifische Gewicht der Flüssigkeit und ε_2 das des Körpers bezeichnen, also $\gamma_1 = \varepsilon_1 \gamma$ sowie $\gamma_2 = \varepsilon_2 \gamma$ gesetzt wird,

$$\varepsilon_2 = \frac{G}{P}\varepsilon_1 \text{ und } \varepsilon_1 = \frac{P}{G}\varepsilon_2.$$

Wenn man also das Gewicht eines Körpers und den Gewichtsverlust desselben beim Untertauchen kennt, so läßt sich aus der Dichtigkeit oder dem specifischen Gewichte der Flüssigkeit die Dichtigkeit oder das specifische Gewicht der Körpermasse, und umgekehrt, aus der Dichtigkeit oder dem specifischen Gewichte der letzteren, die Dichtigkeit oder das specifische Gewicht der ersteren finden.

Ist die Flüssigkeit, worin man den festen Körper abwiegt, Wasser, so hat man $\varepsilon_1 = 1$ und $\gamma_1 = \gamma = 1000$ Kilogramm oder 61,74 Pfund, je nachdem man das Cubikmeter oder den Cubikfuß zur Volumeneinheit annimmt, daher ist für diesen Fall die Dichtigkeit des Körpers:

$$\gamma_2 = \frac{G}{P}\gamma = \frac{\text{absolutes Gewicht}}{\text{Gewichtsverlust}} \text{ mal Dichtigkeit des Wassers},$$

und das specifische Gewicht desselben:

$$\varepsilon_2 = \frac{G}{P} = \frac{\text{absolutes Gewicht}}{\text{Gewichtsverlust}}.$$

Um den Auftrieb oder Gewichtsverlust zu ermitteln, bedient man sich, wie zur Bestimmung des Gewichtes G, einer gewöhnlichen Wage, nur befindet sich unten an der einen Schale dieser Wage noch ein Häkchen, um den Körper mittels eines Haares, Drahtes oder anderen feinen Fadens daran anzuhängen, bevor er in das Wasser, welches in einem untergesetzten Gefäße enthalten ist, eingetaucht wird. Gewöhnlich nennt man eine zu diesem Abwägen unter Wasser eingerichtete Wage eine hydrostatische Wage (franz. balance hydrostatique; engl. hydrostatic balance).

Ist der Körper, dessen specifisches Gewicht man ermitteln will, weniger dicht als Wasser, so kann man ihn mit einem anderen schweren Körper

mechanisch verbinden, damit die Verbindung im Wasser noch ein Bestreben zum Sinken behält. Verliert dieser schwere Körper im Wasser das Gewicht P_2 und die Verbindung P_1, so ist der Gewichtsverlust des leichteren Körpers:

$$P = P_1 - P_2,$$

bezeichnet nun wieder G das Gewicht des leichteren Körpers, so hat man dessen specifisches Gewicht:

$$\varepsilon_2 = \frac{G}{P} = \frac{G}{P_1 - P_2}.$$

Kennt man das specifische Gewicht ε einer mechanischen Verbindung oder Zusammensetzung zweier Körper, und sind auch die specifischen Gewichte ε_1 und ε_2 der Bestandtheile derselben bekannt, so lassen sich nun nach dem sogenannten Archimedischen Principe auch aus dem Gewichte des Ganzen die Gewichte G_1 und G_2 der Bestandtheile berechnen.

Jedenfalls ist $G_1 + G_2 = G$ und auch

$$\text{Volumen } \frac{G_1}{\varepsilon_1 \gamma} + \text{Volumen } \frac{G_2}{\varepsilon_2 \gamma} = \text{Volumen } \frac{G}{\varepsilon \gamma},$$

also:

$$\frac{G_1}{\varepsilon_1} + \frac{G_2}{\varepsilon_2} = \frac{G}{\varepsilon}.$$

Durch Vereinigung beider Gleichungen ergiebt sich nun:

$$G_1 = G\left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon_2}\right) : \left(\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\varepsilon_2}\right) \text{ oder}$$

$$G_2 = G\left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon_1}\right) : \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1}\right).$$

Beispiele. 1) Wenn ein 310 Gramm schweres Stück Kalkstein unter dem Wasser um 121,5 Gramm leichter wird, so ist das specifische Gewicht dieses Körpers:

$$\varepsilon = \frac{310}{121,5} = 2,55.$$

2) Um das specifische Gewicht eines Stückes Eichenholz zu finden, hat man es mit einem Bleidrahte, welcher beim Abwägen im Wasser 10,5 Gramm an Gewicht verlor, umbunden. Wenn nun das Holzstück selbst 426,5 Gramm wog, und die Verbindung unter Wasser 484,5 Gramm leichter war als in der Luft, so ergiebt sich das specifische Gewicht der Holzmasse:

$$\varepsilon = \frac{426,5}{484,5 - 10,5} = \frac{426,5}{474} = 0,9.$$

3) Ein vollkommen mit Quecksilber angefülltes und vollkommen geschlossenes eisernes Gefäß hatte ein Bruttogewicht von 500 Pfund und verlor beim Abwägen unter Wasser 40 Pfund an Gewicht; wenn nun das specifische Gewicht des Gußeisens = 7,2 und das des Quecksilbers 13,6 ist, so ergiebt sich das Gewicht des leeren Gefäßes:

$$G_1 = 500\left(\frac{40}{500}-\frac{1}{13,6}\right):\left(\frac{1}{7,2}-\frac{1}{13,6}\right) = 500(0,08-0,07353):(0,1388-0,0735)$$
$$= \frac{500\,.\,0,00647}{0,0653} = \frac{3235}{65,3} = 49,5 \text{ Pfund},$$

und das Gewicht des eingeschlossenen Quecksilbers:

$$G_2 = 500\,.\,(0,08-0,1388):(0,07353-0,1388) = \frac{500\,.\,0,0588}{0,0653} = \frac{2940}{6,53}$$
$$= 450,2 \text{ Pfund}.$$

Anmerkung 1. Zur Ausmittelung der specifischen Gewichte von Flüssigkeiten, lockeren Massen u. s. w. reicht auch das bloße Abwägen in freier Luft aus, weil man diesen Körpern durch Einfüllen in Gefäße jedes beliebige Volumen ertheilen kann. Wiegt eine leere Flasche $= G$, wiegt ferner dieselbe mit Wasser angefüllt $= G_1$ und hat dieselbe das Gewicht G_2, wenn sie eine andere Masse enthält, so hat man das specifische Gewicht dieser Masse:

$$\varepsilon = \frac{G_2 - G}{G_1 - G}.$$

Um z. B. das specifische Gewicht von Roggen (in Masse) zu finden, wurde ein Fläschchen mit Roggenkörnern angefüllt, und nach starkem Schütteln gewogen. Nach Abzug des Gewichtes der leeren Flasche ergab sich das Gewicht dieser Roggenmasse, $= 120,75$ Gramm, und das Gewicht einer gleichen Wassermenge, $= 155,65$; es folgt demnach das specifische Gewicht der Roggenmasse

$$= \frac{120,75}{155,65} = 0,776,$$

und es wiegt sonach 1 Cubikfuß dieses Getreides

$$= 0,776\,.\,66 = 51,22 \text{ Pfund}.$$

Anmerkung 2. Das schon von Archimedes aufgelöste Problem, aus dem specifischen Gewichte einer Zusammensetzung und aus den specifischen Gewichten der Bestandtheile das Verhältniß der Bestandtheile zu finden, gestattet nur eine beschränkte Anwendung auf chemische Verbindungen, Metalllegirungen u. s. w., weil bei solchen meist eine Contraction, zuweilen aber auch eine Ausdehnung der Massen stattfindet, so daß das Volumen der Verbindung nicht mehr gleich ist der Summe der Volumina der Bestandtheile.

§. 373 **Aräometer.** Zur Bestimmung der Dichtigkeit von Flüssigkeiten werden vorzüglich auch die Aräometer, Senkwagen (franz. aréomètres; engl. areometers, hydrometers) gebraucht. Diese Instrumente sind hohle, in Beziehung auf eine Axe symmetrisch geformte Körper mit sehr tief liegendem Schwerpunkte, und geben, indem sie in einer Flüssigkeit aufrecht schwimmen, die Dichtigkeit dieser Flüssigkeit an. Man fertigt sie aus Glas, Messingblech u. s. w. an und nennt sie nach ihrem verschiedenen Gebrauche, hydrostatische Senkwagen, Soolwagen, Bierwagen, Branntweinwagen, Alkoholometer u. s. w. Es giebt zwei Arten von Senkwagen, nämlich Gewichtsaräometer (franz. ar. à poids constant; engl. hyd. with weights) und Scalenaräometer (franz. ar. à volume constant; engl. graduated hyd.). Die ersteren werden auch oft zur Bestimmung der Gewichte, und namentlich der specifischen Gewichte von festen Körpern in Anwendung gebracht.

1) Ist V das Volumen des unter Wasser befindlichen Theiles einer bis zu einer gewissen Marke O eingetauchten, übrigens schwimmenden Senkwage ABC, Fig. 632, G das Gewicht der ganzen Wage, P das auf den Teller A aufgelegte Gewicht beim Schwimmen im Wasser, dessen Dichtigkeit $= \gamma$ sein möge, und P_1 das eben daselbst aufzulegende Gewicht beim Schwimmen in einer anderen Flüssigkeit von der Dichtigkeit γ_1, so hat man:

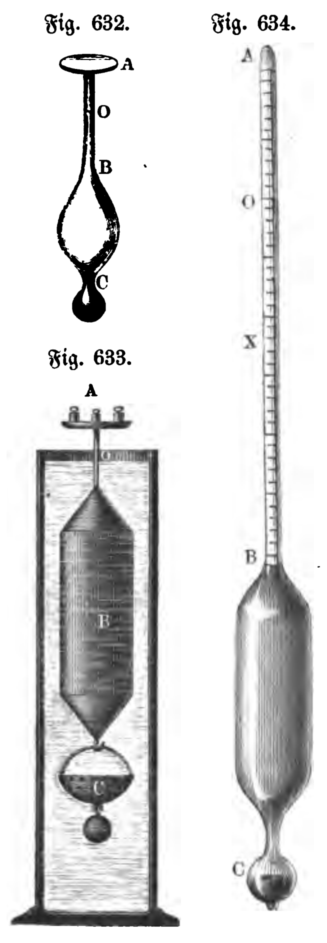


Fig. 632. Fig. 634. Fig. 633.

$V\gamma = P + G$ und

$V\gamma_1 = P_1 + G$,

daher das Verhältniß der Dichtigkeiten oder specifischen Gewichte dieser Flüssigkeiten:

$$\frac{\gamma_1}{\gamma} = \frac{P_1 + G}{P + G}.$$

2) Ist P das Gewicht, welches auf den Teller gelegt werden muß, um die im Wasser schwimmende Senkwage ABC, Fig. 633, bis zu einer Marke O einzusenken, und ist P_1 das Gewicht, welches man mit dem abzuwägenden Körper gleichzeitig auf A zu legen hat, um dieselbe Einsenkung zu erhalten, so hat man das Gewicht dieses Körpers einfach:

$$G_1 = P - P_1.$$

Ist aber die Auflage P_1 um P_2 zu vergrößern, wenn der abzuwägende Körper in das unter Wasser befindliche Schälchen C gelegt wird, um die Senkungstiefe unverändert zu behalten, so beträgt der Auftrieb $= P_2$, und daher das specifische Gewicht des Körpers:

$$\varepsilon = \frac{G_1}{P_2} = \frac{P - P_1}{P_2}.$$

Die Senkwagen mit unten angehängten Schälchen zur Bestimmung specifischer Gewichte von festen Körpern, wie z. B. von Mineralien, heißen Nicholson'sche Senkwagen.

3) Setzen wir das Gewicht einer Senkwage BC, mit Scala AB, Fig. 634, $= G$, und das eingetauchte Volumen, wenn diese Wage im Wasser schwimmt, $= V$, so ist $G = V\gamma$. Steigt diese Wage um die Tiefe $OX = x$ empor, wenn dieselbe in eine schwerere Flüssigkeit einge-

taucht wird, so ist bei dem Querschnitte F des Stäbchens das noch eingetauchte Volumen

$$= V - Fx, \text{ und daher } G = (V - Fx)\gamma_1.$$

Beide Formeln, durch einander dividirt, geben nun die Dichtigkeit der Flüssigkeit:

$$\gamma_1 = \frac{V}{V - Fx} \cdot \gamma = \gamma : \left(1 - \frac{F}{V}x\right) = \frac{\gamma}{1 - \mu x},$$

wenn der constante Quotient $\frac{F}{V}$ durch μ bezeichnet wird.

Ist die Flüssigkeit, worin man das Aräometer eintaucht, leichter als Wasser, so sinkt dasselbe in ihr um die Tiefe x, weshalb dann

$$G = (V + Fx)\gamma \text{ und daher}$$

$$\gamma_1 = \frac{\gamma}{1 + \mu x} \text{ zu setzen ist.}$$

Um den Coefficienten $\mu = \frac{F}{V}$ zu finden, wird die Wage durch ein Gewicht P, etwa durch oben (bei A) eingegossenes und den tiefsten Punkt derselben einnehmendes Quecksilber so weit beschwert, daß sie, im Wasser schwimmend, um eine bedeutende Länge des zum Anbringen einer Scala dienenden Halses tiefer einsinkt. Setzt man nun $P = Fl\gamma$, wobei l die durch P bewirkte Senkung bedeutet, so erhält man:

$$\mu = \frac{F}{V} = \frac{P}{Vl\gamma} = \frac{P}{Gl}.$$

Beispiele. 1) Wenn bei einem 65 Gramm schweren Gewichtsaräometer vom Teller 13,5 Gramm wegzunehmen sind, damit es beim Schwimmen in Alkohol ebenso tief einsinkt als beim Schwimmen im Wasser, so ist das specifische Gewicht dieses Alkohols

$$= \frac{65 - 13{,}5}{65} = 1 - 0{,}208 = 0{,}792.$$

2) Bei einer Nicholson'schen Wage ist das Normalgewicht 100 Gramm, d. h. man hat 100 Gramm aufzulegen, um das Instrument bis 0 einzusenken; hiervon mußten aber 66,5 Gramm weggenommen werden, als man ein abzuwägendes Stück Messing mit auf den oberen Teller gelegt hatte, und es waren wieder 7,85 Gramm zuzulegen, als dieser Körper in dem unteren Teller lag. Deshalb ist das absolute Gewicht dieses Messingstückes = 66,5 Gramm, und das specifische Gewicht desselben

$$= \frac{66{,}5}{7{,}85} = 8{,}47.$$

3) Ein 75 Gramm schweres Scalenaräometer steigt, nachdem man seine Füllung um 31 Gramm vermindert hat, um $l = 6$ Zoll = 72 Linien, und hat daher den Coefficienten:

$$\mu = \frac{31}{75 \cdot 72} = 0{,}00574.$$

Nach Ergänzung der Füllung und Wiederherstellung des Gewichtes von 75 Gramm stieg es, in einer Salzsoole schwimmend, um 29 Linien, daher ist das specifische Gewicht dieser Flüssigkeit

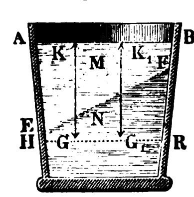
$$= 1:(1 - 0{,}00574 \,.\, 29) = 1:0{,}833 = 1{,}2.$$

Anmerkung. Die weitere Ausführung dieses Gegenstandes gehört in die Physik, Chemie und Technologie.

Flüssigkeiten von verschiedenen Dichtigkeiten. Befinden sich mehrere Flüssigkeiten von verschiedenen Dichtigkeiten in einem Gefäße zugleich, ohne daß sie eine chemische Einwirkung auf einander ausüben, so legen sich dieselben in Folge der leichten Verschiebbarkeit ihrer Theile nach ihren specifischen Gewichten über einander, nämlich die dichteste unten, die weniger dichte darüber und die leichteste oben. Auch sind im Gleichgewichtszustande die Begrenzungsflächen, sowie die freie Oberfläche horizontal; denn so lange die Begrenzungsfläche EF zwischen den Massen M und N, Fig. 635, geneigt ist, so lange stehen auch über einer Horizontalschicht HR verschieden schwere Flüssigkeitssäulen wie GK, $G_1 K_1$ u. s. w.; es kann daher auch der Druck in dieser Schicht nicht überall derselbe sein und folglich auch kein Gleichgewichtszustand eintreten.

§. 374

Fig. 635.



In communicirenden Röhren AB und CD, Fig. 636, ordnen sich die Flüssigkeiten zwar ebenfalls nach ihren Dichtigkeiten über einander, allein ihre Oberflächen AO und DG liegen nicht in einem und demselben Niveau.

Fig. 636.

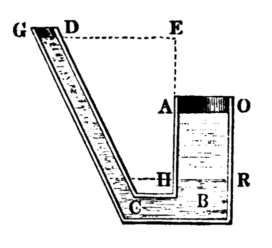
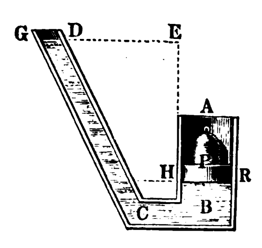


Fig. 637.



Ist F der Inhalt des Querschnittes HR eines Kolbens, Fig. 637, in dem einen Schenkel AB von zwei communicirenden Röhren, und h die Druckhöhe, oder die Höhe EH des Wasserspiegels in der zweiten Röhre CD über HR, so hat man den Druck gegen die Kolbenfläche:

$$P = Fh\gamma.$$

Ersetzt man dagegen die Kolbenkraft durch eine Flüssigkeitssäule $HAOR$, Fig. 636, von der Höhe $AH = h_1$ und der Dichtigkeit γ_1, so hat man:

$$P = Fh_1\gamma_1;$$

und es giebt nun das Gleichsetzen beider Ausdrücke die Gleichung:

$$h_1 \gamma_1 = h \gamma,$$

oder die Proportion:

$$\frac{h_1}{h} = \frac{\gamma}{\gamma_1}.$$

Es verhalten sich also in communicirenden Röhren, beim Zustande des Gleichgewichtes unter zwei verschiedenen Flüssigkeiten, die Druckhöhen, oder die Höhen der Flüssigkeitssäulen, von der gemeinschaftlichen Berührungsebene aus gemessen, umgekehrt wie die Dichtigkeiten oder specifischen Gewichte dieser Flüssigkeiten.

Da das Quecksilber ungefähr 13,6 mal so schwer ist als Wasser, so hält hiernach in communicirenden Röhren eine Quecksilbersäule einer 13,6 mal so hohen Wassersäule das Gleichgewicht.

Drittes Capitel.

Von den Molekularwirkungen des Wassers.

§. 375 **Molekularkräfte.** Die Cohäsion des Wassers ist, obgleich sehr klein, jedoch nicht Null. Die Theile oder Moleküle (franz. molécules; engl. molecules) hängen aber nicht allein unter einander, sondern auch mit anderen Körpern, z. B. mit den Gefäßwänden, zusammen, so daß ebenfalls eine Kraft nöthig ist, um diesen Zusammenhang, den man Adhäsion (franz. adhérence; engl. adhesion) des Wassers nennt, aufzuheben. Ein an einem festen Körper hängender Wassertropfen weist die Existenz der Cohäsion und Adhäsion des Wassers zugleich nach. Ohne die Cohäsion könnte das Wasser keinen Tropfen bilden, und ohne die Adhäsion könnte es an dem festen Körper nicht hängen bleiben; es wird hier die Schwerkraft nicht allein von der Cohäsion, sondern auch von der Adhäsion des Wassers überwunden. Die Wirkungen, welche aus der Vereinigung der Cohäsions- und Adhäsionskräfte hervorgehen, bezeichnet man zur Unterscheidung von den Wirkungen der Trägheit, der Schwerkraft u. s. w. mit dem Namen: die Molekularwirkungen. Die Capillarität oder das Heben oder Senken des Wasser- oder Quecksilberspiegels in engen Röhren oder zwischen sehr nahe stehenden Wänden ist ein vorzüglicher Fall der Molekularwirkung.

Adhäsionsplatten. Man hat die Cohäsion und Adhäsion des Wassers §. 376 durch sogenannte Adhäsionsplatten zu bestimmen gesucht. Man hängt zu diesem Zwecke eine solche Platte statt einer Wagschale an das Ende eines Wagbalkens, bringt die Wage durch ein Tarirgewicht zum Einspielen, und nähert das Gefäß mit der zu untersuchenden Flüssigkeit der Platte allmälig, bis ihre ebene Grundfläche mit der Oberfläche der Flüssigkeit in Berührung kommt. Nun vergrößert man durch allmäliges Zulegen das Gewicht der Wagschale am anderen Ende des Wagbalkens, bis die Platte vom Wasserspiegel abgerissen wird. Die Ergebnisse solcher Versuche sind besonders davon abhängig, ob die Berührungsfläche der Platte von dem Wasser benetzt wird oder nicht. Im ersteren Falle bleibt stets nach der Berührung eine dünne Wasserschicht an der Platte hängen, man hat daher beim Abreißen derselben vom Wasser nicht die Adhäsion des Wassers an der Platte, sondern die Cohäsion des Wassers überwunden. Deshalb hängt auch die Kraft zum Abreißen verschiedener Platten vom Wasserspiegel gar nicht von der materiellen Beschaffenheit der Platten ab. Andere Flüssigkeiten als Wasser erfordern dagegen auch andere Kräfte an den Adhäsionsplatten. Du Buat fand, daß die Adhäsion zwischen dem Wasser und einem überzinnten Eisenbleche auf einen Quadratzoll, 65 bis 70 Gran beträgt. Dies giebt auf 1 Quadratmeter ungefähr eine Kraft von 5 Kilogramm, und auf 1 Quadratfuß eine Kraft von 1,05 Pfund. Hiervon nur wenig abweichende Werthe fand Achard für Scheiben aus Blei, Eisen, Kupfer, Messing, Zinn und Zink, ferner Gay-Lussac an einer Glasscheibe, und Huth an verschiedenen Holztafeln.

Wenn dagegen die Fläche der Scheibe von der Oberfläche des Wassers nicht benetzt wird, so stellen sich ganz andere Ergebnisse heraus, weil dann nicht die Cohäsion des Wassers an sich, sondern die Adhäsion desselben an der Platte überwunden wird. Es scheint, als wenn in diesem Falle die Zeit der Berührung einen großen Einfluß auf die Kraft zum Losreißen der Scheibe ausübe. Gay-Lussac fand z. B. für eine Glasplatte von 120 Millimeter Durchmesser, um sie von der Oberfläche des Quecksilbers loszureißen, 150 bis 300 Gramm Kraft nöthig, je nachdem die Zeit der Berührung eine kurze oder eine längere war.

Anmerkung. In Frankenheim's Lehre der Cohäsion werden die Cohäsionserscheinungen, wie sie z. B. das Abziehen benetzter Platten von der Oberfläche des Wassers darbietet, Synaphie, und dagegen die Adhäsionserscheinungen, wie sie z. B. bei der Trennung unbenetzter Platten von der Oberfläche einer Flüssigkeit vorkommen, Prosaphie genannt.

Adhäsion an Seitenwänden. Wenn ein Wassertropfen auf der §. 377 Oberfläche eines anderen Körpers zerfließt, und daher diese benetzt, so ist die Adhäsion überwiegend, bleibt dagegegen der Wassertropfen in seiner kugeligen

Form auf der Fläche eines festen oder flüssigen Körpers liegen, ohne dieselbe zu benetzen, so herrscht die Cohäsion des Wassers vor.

Ein Zusammenwirken beider Kräfte macht sich besonders an der Oberfläche einer Flüssigkeit in der Nähe der Gefäßwand bemerklich; es steigt daselbst das Wasser in die Höhe und bildet eine concave Oberfläche, wenn die Cohäsion des Wassers von der Adhäsion übertroffen und daher die Gefäßwand benetzt wird; es krümmt sich hingegen der Wasserspiegel in der Nähe der Gefäßwand abwärts und bildet daselbst eine convexe Fläche, wenn keine Benetzung eintritt und daher die Cohäsion überwiegend ist.

Diese Erscheinungen lassen sich sehr leicht auf folgende Weise erklären.

Ein Element E in der Oberfläche HR des Wassers (Fig. 638) wird von seiner Umgebung nach allen Richtungen abwärts gezogen, und es resultirt aus allen diesen Anziehungen eine einzige, vertical abwärts wirkende Kraft A. Hingegen ein Element E an der verticalen Gefäßwand BE, Fig. 639,

Fig. 638.

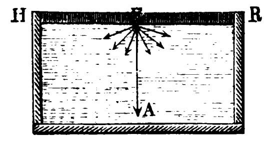
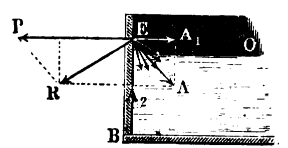
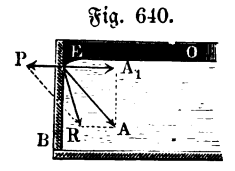


Fig. 639.



wird von dieser mit einer Horizontalkraft P und von dem den Quadranten BEO einnehmenden Wasser mit einer schräg abwärts wirkenden Mittelkraft A angezogen, so daß zuletzt eine Mittelkraft R resultirt, gegen deren Richtung sich (s. §. 354) der Wasserspiegel in E rechtwinkelig stellt. Je nachdem nun die Anziehungskraft P der Gefäßwand größer oder kleiner ist als der horizontale Component A_1 der mittleren Cohäsionskraft A des Wassers, nimmt die Mittelkraft R entweder eine Richtung von innen nach außen, oder eine solche von außen nach innen an. Im ersteren Falle (Fig. 639) zieht sich der Wasserspiegel bei E an der Wand in die Höhe, im zweiten Falle hingegen senkt sich, wie Fig. 640 vor Augen führt, der Wasserspiegel an der Gefäßwand BE herab.

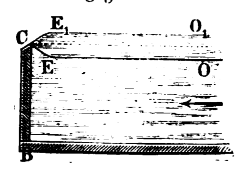
Fig. 640.



Diese Verhältnisse gestalten sich noch anders, wenn das Wasser bis an den Rand des Gefäßes reicht, weil hier die Anziehungskraft der Gefäßwand eine andere Richtung annimmt. Wenn z. B. der anfangs bis zum Rande C des Gefäßes BCO reichende Wasserspiegel EO, Fig. 641 durch langsamen Zufluß allmälig zum Steigen gebracht wird, so nimmt die Anziehungskraft P eine immer mehr und mehr abwärts gehende Richtung an, wobei ihr horizontaler Component immer kleiner und kleiner und zuletzt

gar von dem horizontalen Componenten A_1 der Cohäsionskraft A des Wassers übertroffen wird. In Folge dessen ändert sich natürlich auch die Gestalt des Wasserspiegels bei E unaufhörlich, wobei die Concavität desselben allmälig in Convexität, und die Depression desselben unter dem Gefäßrande in eine Elevation übergeht, welche letztere eine gewisse Größe erreichen muß, bevor der Abfluß des Wassers über dem Gefäßrande erfolgt.

Fig. 641.



Spannung des Wasserspiegels. Da jedes der sämmtlichen Theilchen in der Oberfläche HR, Fig. 638, einer Flüssigkeit von der darunter befindlichen Masse mit einer Kraft A abwärts gezogen wird, so läßt sich annehmen, daß dadurch an der ganzen Oberfläche eine Verdichtung und ein Zusammenhang der Flüssigkeitstheile unter einander entsteht, und daß daher eine gewisse Kraft nöthig ist, um diesen Zusammenhang aufzuheben oder die Oberfläche der Flüssigkeit zu zerreißen. Dieses Zusammenhängen der Oberflächentheile einer Flüssigkeit macht sich nicht allein beim Eintauchen eines fremden Körpers in die Flüssigkeit bemerklich, sondern tritt überhaupt dann hervor, wenn die Oberfläche der Flüssigkeit eine Krümmung annimmt, wie z. B. in der Nähe der Gefäßwand. Wenn man mit Young annimmt, daß die Spannung oder Cohäsion der Oberfläche einer Flüssigkeit an allen Stellen eine und dieselbe ist, so lassen sich daraus, wie der Herr Geheime Oberbaurath Hagen nachgewiesen hat, sämmtliche mit der Erfahrung im besten Einklange stehenden Gesetze nach der Capillarität ableiten. §. 378

Fig. 642.

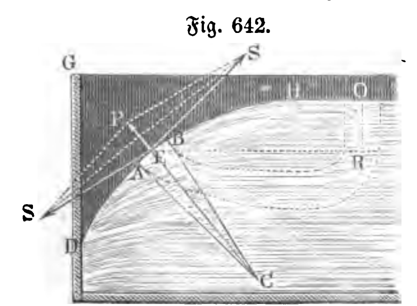
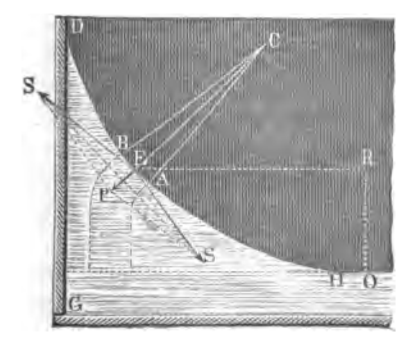


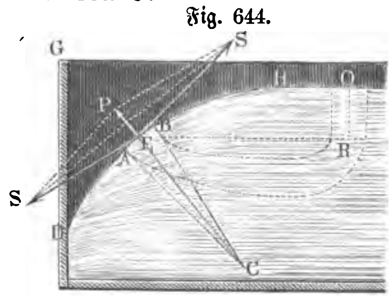
Fig. 643.



In der Nähe einer ebenen Wand DG, Fig. 642 und 643, bildet die Oberfläche einer Flüssigkeit eine entweder nach unten oder nach oben gebogene cylindrische Fläche DAH. Ist P die Normalkraft auf ein Element $AEB = \sigma$ dieser Fläche, S die Spannung dieses Elementes und r der Krümmungshalbmesser

$CA = CB$ desselben, so hat man wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke EPS und ABC:

Fig. 644.

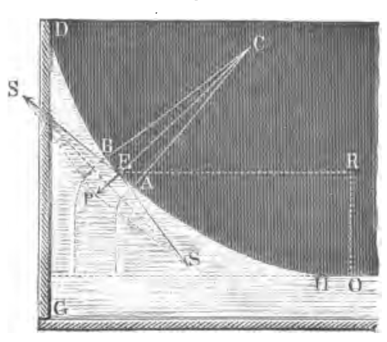


$$\frac{P}{S} = \frac{AB}{CA} = \frac{\sigma}{r},$$

und daher die Normal- oder Biegungskraft:

$$P = \frac{\sigma}{r} S.$$

Fig. 645.



Steht nun das Flächenelement AEB um die senkrechte Tiefe $OR = y$ unter oder über dem freien, von der Seitenwand DG nicht afficirten Wasserspiegel, und bedeutet γ die Dichtigkeit der Flüssigkeit, so ist, nach dem (aus §. 356) bekannten hydrostatischen Gesetze, der Druck des Wassers auf das Element $\overline{AB} = \sigma$:

$$P = \sigma y \gamma,$$

und daher zu setzen:

$$\sigma y \gamma = \frac{\sigma}{r} S, \text{ und}$$

$$y = \frac{S}{r\gamma}.$$

Es ist also hiernach sowohl die Depression als auch die Elevation eines Elementes der Oberfläche einer Flüssigkeit in Rücksicht auf den freien oder unafficirten Theil dieser Fläche, dem Krümmungshalbmesser derselben umgekehrt proportional.

§. 379 In der Nähe einer gekrümmten Seitenwand, z. B. einer verticalen Cylinderfläche, bildet die Oberfläche des Wassers eine doppelt gekrümmte Fläche, und es wird hier die unter dem rectangulären Flächenelemente $FGHK$, Fig. 646, hängende Wassersäule von zwei Kräften P_1 und P_2 getragen, wovon die eine die Mittelkraft von den Spannungen S_1, S_1 in der zur Seite $FG = HK$ parallelen Normalebene ABE, und die andere die Mittelkraft der Spannungen S_2, S_2 in der zur Seite $GH = FK$ parallelen Normalebene CDE ist. Jener Ebene entspricht der kleinste und dieser der größte Krümmungshalbmesser; setzen wir beide Halbmesser $= r_1$ und r_2, sowie die Seitenlängen $FG = \sigma_1$ und $GH = \sigma_2$, und beziehen wir die Spannung S auf die Breite = Eins, so haben wir die in beiden Ebenen wirkenden Spannungen:

$$S_1 = \sigma_2 S \text{ und } S_2 = \sigma_1 S$$

und die hieraus entspringenden Normalkräfte:

$$P_1 = \sigma_2 S \cdot \frac{\sigma_1}{r_1} = \frac{S \sigma_1 \sigma_2}{r_1} \text{ und}$$

$$P_2 = \sigma_1 S \cdot \frac{\sigma_2}{r_2} = \frac{S \sigma_1 \sigma_2}{r_2},$$ daher die Mittelkraft derselben:

$$P = P_1 + P_2 = S \sigma_1 \sigma_2 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right).$$

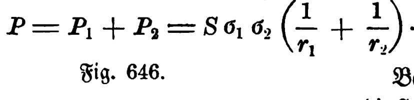
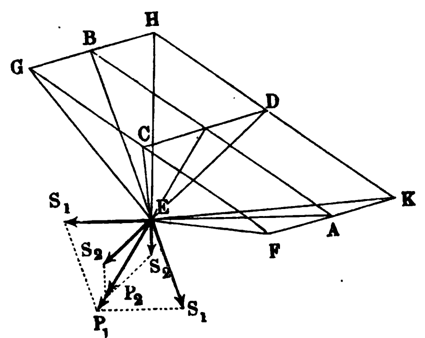


Fig. 646.



Bezeichnet auch hier y die Höhe des als ein Rechteck vom Inhalt $\sigma_1 \sigma_2$ anzusehenden Elementes $FGHK$ der Oberfläche über dem untersten oder allgemeinen Wasserspiegel, so haben wir die Kraft, mit welcher dieses Element von dem darüber oder darunter befindlichen Wasser normal auf- oder abwärts gezogen wird,

$$P = y \cdot \sigma_1 \sigma_2 \gamma,$$

und es folgt nun durch Gleichsetzung beider Ausdrücke für P:

$$y \sigma_1 \sigma_2 \gamma = S \sigma_1 \sigma_2 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right),$$ daher:

$$y = \frac{S}{\gamma} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right).$$

Es ist also bei der cylindrischen Wand die Erhebung (Senkung) der Oberfläche des Wassers über (unter) dem allgemeinen Wasserspiegel an jeder Stelle der Summe von den umgekehrten Maximal- und Minimalkrümmungshalbmessern proportional. Diese Formel enthält auch die des vorigen Paragraphen in sich, denn wenn der Normalschnitt CED gerade ist, so hat man:

$$r_2 = \infty, \text{ daher}$$

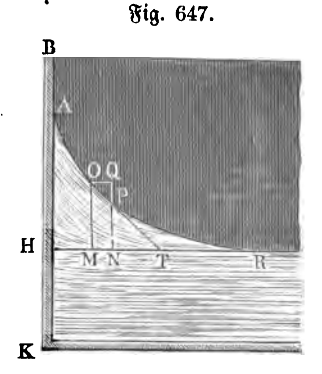
$$\frac{1}{r_2} = 0 \text{ und}$$

$$y = \frac{S}{\gamma} \cdot \frac{1}{r_1}.$$

Krumme Fläche des Wasserspiegels. Die Curve, welche der (§. 380) verticale Durchschnitt des Wasserspiegels in der Nähe einer ebenen Wand

bildet, läßt sich, nach Hagen, wie folgt, finden. Es sei AR, Fig. 647, die Oberfläche des von der verticalen Wand BK angezogenen Wassers, HR der allgemeine Wasserspiegel, ferner der Durchschnitt H beider Flächen der Coordinatenanfangspunkt. Man setze ferner die Coordinaten eines Punktes O in der Oberfläche AOR, $HM = x$ und $MO = y$, ferner den Bogen $AO = s$ und den Tangentenwinkel $OTM = \alpha$, sowie die Elemente OQ, QP und OP, respect. $= \partial x$, ∂y und ∂s.

Fig. 647.



Da $y = \frac{S}{r\gamma}$ und nach Artikel 33 der analytischen Hülfslehren,

$$r = -\frac{\partial s}{\partial \alpha}, \text{ sowie } \partial y = -\partial s \sin. \alpha \text{ ist, so hat man:}$$

$$y = -\frac{S \partial \alpha}{\gamma \partial s} = \frac{S \sin. \alpha . \partial \alpha}{\gamma \partial y}, \text{ oder:}$$

$$y \partial y = \frac{S}{\gamma} \sin. \alpha . \partial \alpha,$$

und es giebt nun die Integration:

$$\frac{1}{2} y^2 = \frac{S}{\gamma} \int \sin. \alpha . \partial \alpha = Con. - \frac{S}{\gamma} \cos. \alpha.$$

Da für den Punkt R, α und y zugleich Null sind, ist

$$0 = Con. - \frac{S}{\gamma} \cos. 0, \text{ daher: } Con. = \frac{S}{\gamma} \text{ und}$$

$$y^2 = \frac{2S}{\gamma}(1 - \cos. \alpha) = \frac{4S}{\gamma} \frac{(1 - \cos. \alpha)}{2} = \frac{4S}{\gamma} (\sin. \tfrac{1}{2} \alpha)^2,$$

so daß:

$$y = 2 \sqrt{\frac{S}{\gamma}} \cdot \sin. \tfrac{1}{2} \alpha \text{ folgt.}$$

Für $\alpha^0 = 90^0$ hat man $\sin. \frac{1}{2} \alpha = \sin. 45^0 = \sqrt{\frac{1}{2}}$; daher ist die größte Erhebung der Oberfläche des Wassers unmittelbar an der Seitenwand,

$$h = 2 \sqrt{\frac{S}{\gamma}} \cdot \sqrt{\tfrac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2S}{\gamma}}, \text{ also umgekehrt:}$$

$$\frac{S}{\gamma} = \tfrac{1}{2} h^2, \text{ und}$$

1) $y = h \sqrt{2} . \sin. \frac{1}{2} \alpha.$

Durch Differenziiren dieses Ausdruckes bekommt man:

$$\partial y = \tfrac{1}{2} h \sqrt{2} \cos. \tfrac{1}{2}\alpha . \partial\alpha = h \sqrt{\tfrac{1}{2}} \cos. \tfrac{1}{2}\alpha . \partial\alpha,$$

und da auch $\partial y = - \partial x . tang. \alpha$ ist, so folgt:

$$\partial x = - h \sqrt{\tfrac{1}{2}} \cdot \frac{\cos. \tfrac{1}{2}\alpha}{tang.\,\alpha} \cdot \partial\alpha = - h \sqrt{\tfrac{1}{2}} \cdot \frac{\cos. \tfrac{1}{2}\alpha \cos.\alpha}{\sin.\alpha} \cdot \partial\alpha$$

$$= - h \sqrt{\tfrac{1}{2}} \cdot \frac{\cos. \tfrac{1}{2}\alpha\, [(\cos. \tfrac{1}{2}\alpha)^2 - (\sin. \tfrac{1}{2}\alpha)^2]}{2 \sin. \tfrac{1}{2}\alpha . \cos. \tfrac{1}{2}\alpha}\, \partial\alpha$$

$$= - h \sqrt{\tfrac{1}{2}} \cdot \frac{1 - 2\,(\sin. \tfrac{1}{2}\alpha)^2}{2 \sin. \tfrac{1}{2}\alpha}\, \partial\alpha$$

$$= - h \sqrt{\tfrac{1}{2}} \cdot \left(\frac{\tfrac{1}{2}}{\sin. \tfrac{1}{2}\alpha} - \sin. \tfrac{1}{2}\alpha\right) \partial\alpha.$$

Nun ist aber

$$\int \sin. \tfrac{1}{2}\alpha . \partial\alpha = - 2 \cos. \tfrac{1}{2}\alpha \text{ und}$$

$$\int \frac{\partial\alpha}{\sin. \tfrac{1}{2}\alpha} = 2\, Log. nat. tang. \tfrac{1}{4}\alpha$$

(s. analyt. Hülfslehren Art. 26);

daher hat man:

$$x = - h \sqrt{\tfrac{1}{2}}\, (Log. nat. tang. \tfrac{1}{4}\alpha + 2 \cos. \tfrac{1}{2}\alpha) + Con.$$

Da für $x = 0$, $\alpha^0 = 90^0$, $tang. \tfrac{1}{4}\alpha = tang. 22\tfrac{1}{2}^0 = \sqrt{2} - 1$ und $\cos. \tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$ ist, so folgt:

$$Con. = h \sqrt{\tfrac{1}{2}}\, [Log. nat. (\sqrt{2} - 1) + 2 \sqrt{\tfrac{1}{2}}], \text{ und}$$

$$2)\quad x = h \sqrt{\tfrac{1}{2}} \left[Log. nat. \left(\frac{\sqrt{2} - 1}{tang. \tfrac{1}{4}\alpha}\right) + 2\, (\sqrt{\tfrac{1}{2}} - \cos. \tfrac{1}{2}\alpha)\right]$$

$$= h\, [1 - \sqrt{2} . \cos. \tfrac{1}{2}\alpha - \sqrt{\tfrac{1}{2}}\, Log. nat. (\sqrt{2} + 1) tang. \tfrac{1}{4}\alpha].$$

Für $\alpha = 0$ hat man:

$$\cos. \tfrac{1}{2}\alpha = 1 \text{ und } Log. nat. tang. \tfrac{1}{4}\alpha = - \infty,$$

daher:

$$x = + \infty;$$

es ist also HR die Asymptote, welcher sich der Durchschnitt AOR der Oberfläche des Wassers ohne Ende nähert.

Anmerkung. Wenn man die Formel (1) umkehrt, also

$$\sin. \tfrac{1}{2}\alpha = \frac{y}{h} \sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

setzt, so kann man für jeden beliebigen Werth von y., erst α und hieraus wieder mittelst (2) den entsprechenden Werth von x berechnen.

Die Messungen, welche Hagen hierüber angestellt hat, weisen eine sehr

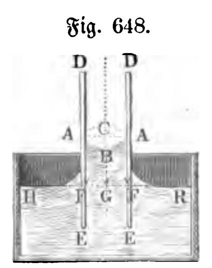
gute Uebereinstimmung dieser Theorie mit der Erfahrung nach. Dieselben sind mittelst einer matt geschliffenen Messingtafel an Brunnenwasser angestellt worden, und haben auf folgende Ergebnisse geführt:

y in Lin., gemessen	1,37	0,70	0,49	0,34	0,24	0,18	0,12	0,07	0,04	0,016
x „ gemessen	0,00	0,31	0,63	0,94	1,26	1,57	1,88	2,50	3,13	3,74
x „ berechnet	0,00	0,33	0,64	0,96	1,28	1,56	1,95	2,47	3,01	3,90

Diese Zahlenwerthe beziehen sich auf Pariser Linien. Aus $h = 1{,}37$ Linien berechnet sich $\frac{S}{\gamma} = 0{,}94$ und der kleinste Krümmungshalbmesser $r = 0{,}68$ Linien. Tafel von Buxbaum, Thonschiefer und Glas gaben dieselben Resultate.

§. 381 **Paralleltafeln.** Zwischen zwei sehr nahe gestellten Tafeln, DE, DE, Fig. 648, erhebt sich das Wasser nicht allein an den Rändern, sondern auch in der Mitte, und es bildet die Oberfläche desselben nahe den halben Mantel eines elliptischen Cylinders. Die eine Halbaxe des elliptischen Durchschnittes ist der halben Weite $CA = a$, und die andere Halbaxe $CB = b$, der Differenz $AF - BG = h_2 - h_1$ zwischen der größten und kleinsten Erhebung (h_2 und h_1) der elliptischen Oberfläche ABA über dem allgemeinen Wasserspiegel gleich. Nach dem Ingenieur S. 171 ist der Krümmungshalbmesser der Ellipse in A:

Fig. 648.



$$r_1 = \frac{b^2}{a} = \frac{(h^2 - h_1)^2}{a}, \text{ und der in } B:$$

$$r_2 = \frac{a^2}{b} = \frac{a^2}{(h_2 - h_1)},$$

daher hat man nach §. 378 die Erhebung der Oberfläche des Wassers in A:

$$h_2 = \frac{S}{r_1 \gamma} = \frac{a S}{(h_2 - h_1)^2 \gamma}, \text{ und dagegen in } B:$$

$$h_1 = \frac{S}{r_2 \gamma} = \frac{(h_2 - h_1) S}{a^2 \gamma}.$$

Durch Subtraction dieser Gleichungen von einander erhält man:

$$h_2 - h_1 = \frac{S}{\gamma}\left(\frac{a}{(h_2 - h_1)^2} - \frac{h_2 - h_1}{a^2}\right),$$

oder:

$$1 = \frac{S}{\gamma}\left(\frac{a}{(h_2 - h_1)^3} - \frac{1}{a^2}\right);$$

daher folgt:

$$1)\ h_2 - h_1 = a \sqrt[3]{\frac{S}{S + a^2\gamma}},$$

$$2)\ h_2 = \frac{1}{a} \sqrt[3]{\frac{S}{\gamma}\left(\frac{S}{\gamma} + a^2\right)^2},$$

$$3)\ h_1 = \frac{1}{a} \cdot \frac{S}{\gamma} \sqrt[3]{\frac{S}{S + a^2\gamma}},$$

und endlich das Verhältniß:

$$n = \frac{h_2 - h_1}{h_1} = \frac{a^2\gamma}{S} = a^2 : \frac{S}{\gamma}.$$

Ist a sehr klein, so kann man

$$h_2 = h_1 = \frac{1}{a} \cdot \frac{S}{\gamma}$$

setzen, dann wächst also die Erhebung der Oberfläche des Wassers umgekehrt wie der Abstand der Tafeln von einander.

Genauer ist aber

$$h_2 = \frac{1}{a} \cdot \frac{S}{\gamma}\left(1 + {}^2/_3 \frac{a^2\gamma}{S}\right) = \frac{1}{a} \cdot \frac{S}{\gamma} + {}^2/_3\, a, \text{ und}$$

$$h_1 = \frac{1}{a} \cdot \frac{S}{\gamma}\left(1 - {}^1/_3 \cdot \frac{a^2\gamma}{S}\right) = \frac{1}{a} \cdot \frac{S}{\gamma} - {}^1/_3\, a.$$

Umgekehrt folgt hiernach:

$$\frac{S}{\gamma} = a h_1 + \frac{a^2}{3}.$$

Diese Formeln stimmen, wenn der Abstand der Tafeln sehr klein, namentlich $\frac{a}{h_1}$ noch nicht $^1/_2$ ist, sehr gut mit den Beobachtungen überein.

Hagen fand bei Versuchen mit zwei parallelen Plantafeln in Brunnenwasser, im Mittel durch Beobachtungen:

$h_1 = 1{,}55$, $h_2 = 2{,}09$ und $h = 1{,}38$ Pariser Linien,

und durch Rechnung:

$\frac{S}{\gamma} = 1{,}04$, $h_2 = 2{,}12$ und $h = 1{,}44$ Pariser Linien.

Neuere Versuche (s. Poggendorff's Annalen, Bd. 77) gaben für

$a = 0{,}360;\ 0{,}5875;\ 0{,}7575$ Linien,

$h_1 = 2{,}562;\ 1{,}429;\ 1{,}068$ „ und

$\frac{S}{\gamma} = 0{,}949;\ 0{,}907;\ 0{,}917$ „

also im Mittel:

$$\frac{S}{\gamma} = 0,9243 \text{ und } S = 0,01059 \text{ Gramme.}$$

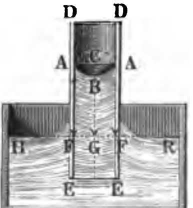
(Vergl. den vorigen Paragraphen.)

§. 382 **Haarröhrchen.** Die Erhebung der Oberfläche des Wassers in senkrechten engen Röhren, oder sogenannten Haarröhrchen (franz. tubes capillaires; engl. capillary tubes) läßt sich bei Zugrundelegung der Formel

$$y = \frac{S}{\gamma}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$$

des §. 379 leicht finden, wenn man annimmt, daß die Oberfläche (der Meniscus) ein halbes Sphäroid ABA, Fig. 649, bilde, dessen kreisförmige Basis AA mit dem Querschnitte der Röhre zusammenfällt. Behalten wir die Bezeichnung des vorigen Paragraphen bei, setzen wir also wieder die halbe Röhrenweite $CA = a$, und die Minimal- und Maximalerhebung BG und AF des Wassers in der Röhre über dem allgemeinen Wasserspiegel HR, $= h_1$ und h_2, so haben wir für

Fig. 649.



$$h_2 = \frac{S}{\gamma}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right),\ r_1 = a \text{ und } r_2 = \frac{(h_2 - h_1)^2}{a}, \text{ und für}$$

$$h_1 = \frac{S}{\gamma}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right),\ r_1 = r_2 = \frac{a^2}{h_2 - h_1} \text{ zu setzen, weshalb nun}$$

$$h_2 = \frac{S}{\gamma}\left(\frac{1}{a} + \frac{a}{(h_2 - h_1)^2}\right) \text{ und}$$

$$h_1 = \frac{2S}{\gamma}\cdot\frac{(h_2 - h_1)}{a^2} \text{ folgt.}$$

Durch Subtraction der letzten Gleichungen von einander erhält man:

$$h_2 - h_1 = \frac{S}{\gamma}\left(\frac{1}{a} + \frac{a}{(h_2 - h_1)^2} - \frac{2(h_2 - h_1)}{a^2}\right),$$

oder:

$$1 = \frac{S}{\gamma}\left(\frac{1}{a(h_2 - h_1)} + \frac{a}{(h_2 - h_1)^3} - \frac{2}{a^2}\right),$$

auch:

$$\left(\frac{\gamma}{S} + \frac{2}{a^2}\right)(h_2 - h_1)^3 - \frac{1}{a}(h_2 - h_1)^2 = a.$$

Ist a klein, so kann man auch

$$\frac{2}{a^2}(h_2 - h_1)^3 - \frac{1}{a}(h_2 - h_1)^2 = a$$

setzen, woraus dann

$$h_2 - h_1 = a$$

folgen würde. Nimmt man aber $h_2 - h_1 = a + \delta$ an, und setzt

$(h_2 - h_1)^2 = a^2 + 2a\delta$, sowie $(h_2 - h_1)^3 = a^3 + 3a^2\delta$,

so erhält man:

$$\left(\frac{\gamma}{S} + \frac{2}{a^2}\right)(a^3 + 3a^2\delta) - \frac{1}{a}(a^2 + 2a\delta) = a,$$

oder:

$$\frac{\gamma}{S}a^3 + \left(\frac{\gamma}{S} + \frac{2}{a^2}\right)\cdot 3a^2\delta - 2\delta = 0,$$

und es folgt:

$$\delta = -\frac{\gamma a^3}{3\gamma a^2 + 4S}, \text{ oder annähernd, } \delta = -\frac{\gamma a^3}{4S}.$$

Hiernach ist nun

$$h_2 - h_1 = a - \frac{\gamma a^3}{4S},$$

daher:

$$h_1 = \frac{2S}{\gamma}\cdot\frac{1}{a^2}\left(a - \frac{\gamma a^3}{4S}\right) = \frac{2}{a}\cdot\frac{S}{\gamma} - \frac{a}{2} \text{ und}$$

$$h_2 = \frac{S}{\gamma}\left(\frac{1}{a} + \frac{a}{\left(a - \frac{\gamma a^3}{4S}\right)^2}\right) = \frac{S}{\gamma}\left[\frac{1}{a} + \frac{a}{a^2}\left(1 + \frac{\gamma a^2}{4S}\right)^2\right],$$

$$= \frac{S}{\gamma}\left[\frac{1}{a} + \frac{1}{a}\left(1 + \frac{\gamma a^2}{2S}\right)\right] = \frac{2}{a}\cdot\frac{S}{\gamma} + \frac{a}{2}.$$

Es wächst also bei den Haarröhrchen die mittlere Erhebung umgekehrt wie die Röhrenweite.

Auch hat man zur Bestimmung von S:

$$\frac{S}{\gamma} = \frac{1}{2}a h_1 + \frac{a^2}{4}.$$

Beobachtungen, welche Hagen mit Brunnenwasser an Haarröhrchen angestellt hat, gaben Folgendes:

Röhrenweite a, Linien . . .	0,295	0,336	0,413	0,546	0,647	0,751	0,765
Erhebung h_1, Linien	10,08	8,50	6,87	5,17	4,28	3,72	3,59
Spannungsmaß $\frac{S}{\gamma}$, Gramme	1,508	1,455	1,458	1,478	1,473	1,512	1,494

Nach diesen Versuchen ist also im Mittel:

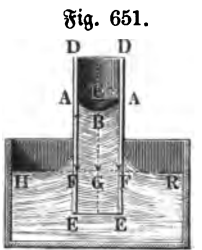
$$\frac{S}{\gamma} = 1{,}482 \text{ und } S = 0{,}0170 \text{ Gramme.}$$

Die Abweichungen dieser Werthe sollen ihren Grund darin haben, daß die Spannung S der Oberfläche des Wassers mit der Zeit abnimmt, und bei dem gekochten Wasser viel kleiner ausfällt als bei dem frischen Wasser. Es ist also anzunehmen, daß die Spannung des Wassers in jedem Streifen von 1 Linie Breite, $S = 0{,}0106$ bis $0{,}0170$ Gramm beträgt.

§. 383 Die vorstehende Theorie findet auch in dem Falle ihre Anwendung, wenn die Wand nicht von der Flüssigkeit benetzt wird; es findet hier keine Erhöhung, sondern eine Senkung der Oberfläche statt, und es ist die letztere auch nicht concav, sondern convex. Die aus dem Niveauabstande BG entstehende und von unten nach oben wirkende Verticalkraft P wird auch hier durch die Spannungen S und S der Oberfläche ABA, Fig. 650, der Flüssigkeit in der Röhre aufgehoben. Die Adhäsionskraft des festen Körpers kommt hierbei, der vorstehenden Theorie zu Folge, nicht weiter in Betracht.

Fig. 650.

Fig. 651.



Setzt man die Kraft, mit welcher die Röhrenwand die Flüssigkeitssäule BG, Fig. 651, an sich zieht, dem Röhrenumfange proportional, setzt also für eine cylindrische Röhre diese Kraft $P = \mu . 2\pi a$, wo μ einen Coefficienten ausdrückt, so hat man:

$$\pi a^2 h = 2 \mu \pi a,$$

und daher die mittlere Erhebung des Wassers in der Röhre:

$$h = \frac{2\mu}{a}.$$

Für zwei parallele Tafeln ist dagegen $P = 2\mu l$ und $P = 2ahl\gamma$, wo l die unbestimmte Länge der Wassersäule bezeichnet, und daher:

$$h = \frac{\mu}{a},$$

d. i. halb so groß wie bei der Röhre, wenn der Abstand $2a$ der Tafeln der

Röhrenweite gleich ist. Dieses stimmt auch mit den Resultaten der letzten Paragraphen vollkommen.

Nach den Hagen'schen Versuchen hängt die Festigkeit oder Spannung der Oberfläche einer Flüssigkeit nicht von dem Grade ihrer Flüssigkeit ab, ist aber um so größer, je schwerer die Flüssigkeit an anderen Körpern haftet. Nach Anderen, namentlich nach Brunner und Frankenheim (s. Poggendorff's Annalen, Bd. 70 und 72), nimmt aber die Steighöhe h in den Haarröhren und folglich auch S ab, wenn die Temperatur der Flüssigkeit eine größere wird.

Für Alkohol ist S ungefähr die Hälfte und für Quecksilber das Achtfache von der Festigkeit der Oberfläche des Wassers.

Anmerkung 1. Hagen findet durch Messung und Wägung von Flüssigkeitstropfen, welche sich von den Grundflächen kleiner Cylinder losreißen, ziemlich dieselben Werthe wie durch die Beobachtungen an Capillartafeln. Ebenso haben die Versuche mit Adhäsionsplatten eine gute Uebereinstimmung geliefert, unter der Voraussetzung, daß der Kraft zum Losreißen einer Platte durch das Gewicht des gehobenen Flüssigkeitscylinders und durch die Spannung in dem Mantel dieses Cylinders das Gleichgewicht gehalten wird.

Anmerkung 2. Die Anzahl der Schriften über die Capillarität ist zu groß, als daß hier eine vollständige Mittheilung derselben erfolgen könnte. Es haben sich mit diesem Gegenstande sogar die größten Mathematiker, wie Laplace, Poisson, Gauß u. s. w. beschäftigt. Eine vollständige Mittheilung der älteren Literatur findet man in Frankenheim's Lehre von der Cohäsion. Die Schrift, welche bei Bearbeitung dieses Capitels vorzüglich benutzt wurde, ist folgende: Ueber die Oberfläche der Flüssigkeiten von Hagen, eine in der Königl. Akademie der Wissenschaften gelesene Abhandlung, Berlin 1845. Eine neue physikalische Theorie der Capillarität von J. Mile enthält Bd. 45 von Poggendorff's Annalen (1838). Es gehören hierher auch Boutigny's Studien über die Körper im sphäroidalen Zustande, deutsch von Arendt. Leipzig 1858.

Viertes Capitel.

Vom Gleichgewichte und Drucke der Luft.

§. 384 **Spannkraft der Gase.** Die uns umgebende atmosphärische Luft, sowie auch alle übrigen Luftarten oder Gase (franz. gaz; engl. gas) besitzen, in Folge der Repulsivkraft ihrer Theile oder Moleküle, ein Bestreben, einen größeren und größeren Raum einzunehmen. Man erhält daher auch nur eine begrenzte Luftmasse durch Absperren oder Einschließen derselben in vollkommen verschlossenen Gefäßen. Die Kraft, mit welcher sich die Gase auszudehnen suchen, heißt ihre Elasticität, Spannkraft oder Expansivkraft (franz und engl. tension). Sie äußert sich durch einen Druck, welchen das Gas gegen die Wände des dasselbe einschließenden Gefäßes ausübt, und ist insofern von der Elasticität der festen oder tropfbar flüssigen Körper verschieden, als sie in jedem Zustande der Dichtigkeit sich wirksam zeigt, wogegen die Expansivkraft der letztgenannten Körper bei einem gewissen Zustande der Ausdehnung Null ist. Man mißt den Druck oder die Spannkraft der Luft und anderer Gase durch Barometer, Manometer und Ventile. Das Barometer (franz. baromètre; engl. barometer) wird vorzüglich angewendet, um den Druck der Atmosphäre zu bestimmen. Das gewöhnlichste oder sogenannte Gefäßbarometer, Fig. 652, besteht in einer, an einem Ende A verschlossenen und am anderen Ende B offenen Glasröhre, welche, nachdem sie mit Quecksilber gefüllt ist, umgestürzt und mit ihrem offenen Ende in ein ebenfalls Quecksilber enthaltendes Gefäß CD eingetaucht wird. Nach dem Umkehren dieses Instrumentes bleibt in der Röhre eine Quecksilbersäule BS zurück, welcher (s. §. 374) durch den Druck der Luft gegen die Oberfläche HR des Quecksilbers das Gleichgewicht gehalten wird. Der über der Quecksilbersäule befindliche Raum AS ist luftleer; es erleidet daher diese Säule von oben keinen Druck, weshalb denn auch die Höhe dieser Säule, oder vielmehr die Höhe des Quecksilbers in derselben über dem Quecksilberspiegel HR im Gefäße als Maß des Luftdruckes dienen kann. Um diese Höhe bequem und scharf messen zu können, ist eine genau eingetheilte Scala angebracht, welche längs der Röhre hinläuft und nach Befinden noch mit einem verschiebbaren Zeiger S versehen ist.

Fig. 652.



Anmerkung. Die ausführliche Beschreibung der verschiedenen Barometer, die Anleitung zum Gebrauche derselben u. s. w. gehört in die Physik. Siehe Lehrbuch der Physik und Meteorologie von Müller, Bd. I.

§. 385 **Atmosphärendruck.** Durch Barometer hat man gefunden, daß bei einem mittleren Zustande der Atmosphäre und an wenig über dem Meere gelegenen Orten dem Luftdrucke durch eine ungefähr 76 Centimeter oder nahe 28 Pariser Zoll = 29 preuß. Zoll hohe Quecksilbersäule von 0 Grad Wärme das Gleichgewicht gehalten wird. Da das specifische Gewicht des Quecksilbers bei Null Grad Wärme 13,6 ist, so folgt, daß der Luftdruck auch gleich ist dem Gewichte einer $0{,}76 \,.\, 13{,}6 = 10{,}336$ Meter = 31,73 Pariser Fuß = 32,84 preuß. Fuß hohen Wassersäule.

Man mißt die Spannung der Luft auch oft durch den Druck, welchen dieselbe auf die Flächeneinheit ausübt. Da ein Cubikcentimeter Quecksilber 0,0136 Kilogramm wiegt, so ist der Atmosphärendruck oder das Gewicht einer 76 Centimeter hohen Quecksilbersäule bei 1 Quadratcentimeter Basis:

$$p = 0{,}0136 \,.\, 76 = 1{,}0336 \text{ Kilogramm.}$$

Nun ist aber ein Quadratzoll 6,841 Quadratcentimeter, daher mißt der mittlere Druck der Atmosphäre auch $= 1{,}0336 \,.\, 6{,}841 = 7{,}071$ Kilogramm = 14,142 Pfund auf einen Quadratzoll und = 2036 Pfund auf einen Quadratfuß.

Den mittleren Barometerstand genau 28 pariser Zoll = 29 preuß. Zoll angenommen, erhält man den Druck der Atmosphäre auf einen Quadratzoll 14,103 Pfund, und auf einen Quadratfuß 2030,8 Pfund

Es ist sehr gewöhnlich in der Mechanik, den mittleren Atmosphärendruck als Einheit anzunehmen, und andere Expansivkräfte auf diesen zu beziehen, und in Atmosphärendrücken, oder Atmosphären, wie man schlechtweg sagt, anzugeben. Hiernach entspricht dem Drucke von n Atmosphären eine $28 \,.\, n$ Pariser Zoll hohe Quecksilbersäule oder ein Gewicht von $14{,}103\, n$ preuß. Pfund auf jeden Quadratzoll; und umgekehrt, einer h Zoll hohen Quecksilbersäule die Expansivkraft von $\frac{h}{28} = 0{,}03571\, h$ Atmosphären, und dem Drucke von p Pfund auf den Quadratzoll die Spannung von $\frac{p}{14{,}103} = 0{,}07091\, p$ Atmosphären. Uebrigens giebt die Gleichung $\frac{h}{28} = \frac{p}{14{,}103}$ die Reductionsformeln:

$$h = 1{,}985\, p \text{ Zoll und } p = 0{,}5037\, h \text{ Pfund.}$$

Bei einer Spannung von h Zoll $= p$ Pfund ist daher der Druck gegen eine ebene Fläche von F Quadratzoll:

$$P = Fp = 0{,}5037\, Fh \text{ Pfund}$$
$$= Fh\gamma = 1{,}985\, Fp \text{ Zoll.}$$

Beispiele. 1) Wenn bei einer Wassersäulenmaschine das Wasser 250 Fuß hoch über der Kolbenfläche steht, so ist der Druck gegen diese Fläche

$$= \frac{250}{32{,}84} = 7{,}6 \text{ Atmosphären.}$$

2) Wenn der Wind eines Cylindergebläses 1,2 Atmosphäre Spannung hat, so ist der Druck desselben auf jeden Quadratzoll

$$= 1{,}2 \,.\, 14{,}10 = 16{,}92 \text{ Pfund,}$$

und auf die Kolbenfläche von 50 Zoll Durchmesser,

$$= \frac{\pi \,.\, 50^2}{4} \cdot 16{,}92 = 33222 \text{ Pfund.}$$

Da die Atmosphäre den Gegendruck $\frac{\pi \,.\, 50^2}{4} \cdot 14{,}10 = 27685$ Pfund ausübt, so folgt die Kolbenkraft:

$$P = 33222 - 27685 = 5537 \text{ Pfund.}$$

§. 386 **Manometer.** Um die Spannung der in Gefäßen eingeschlossenen Gase oder Dämpfe zu finden, werden barometerähnliche Instrumente, welche man Manometer (franz. manomètres; engl. manometers) nennt, angewendet. Diese Instrumente werden mit Quecksilber oder mit Wasser angefüllt, und sind oben entweder offen oder verschlossen, im letzteren Falle aber wieder im oberen Theile entweder luftleer oder mit Luft erfüllt. Das Manometer mit dem luftleeren Raume, Fig. 653, ist von dem gewöhnlichen Barometer nicht verschieden. Um mit Hülfe desselben die Spannung der Luft in einem Behälter messen zu können, wird eine Röhre CE angebracht, die mit einem Ende C in dem Behälter und mit dem anderen Ende E über dem Quecksilberspiegel HR im Gehäuse HDR des Instrumentes ausmündet. Der Raum HER über dem Quecksilber wird dadurch mit dem Luftbehälter in Communication gesetzt; es nimmt daher die in ihm befindliche Luft die Spannung der Luft im Behälter an, und drückt eine Quecksilbersäule BS in die Röhre, welche sich mit dem zu messenden Luftdrucke ins Gleichgewicht setzt.

Fig. 653.



Das oben offene Hebermanometer ABC, Fig. 654, giebt den Ueberschuß der Spannung in einem Gefäße MN über den Atmosphärendruck an, weil dieser Spannung durch die Vereinigung des Luftdruckes über S mit der Quecksilbersäule RS das Gleichgewicht gehalten wird. Ist b der Barometerstand und h der Manometerstand oder der Höhen-

abstand RS der Quecksilberspiegel H und S in den beiden Schenkeln des Manometers, so hat man die durch die Höhe einer Quecksilbersäule gemessene Spannung der mit dem kleinen Schenkel communicirenden Luft:

$$b_1 = b + h,$$

oder durch den Druck auf den Quadratzoll gemessen:

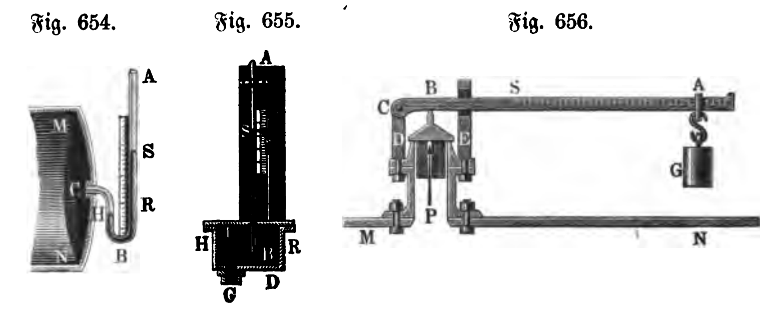
$$p = 0{,}5037\ (b + h) \text{ Pfund},$$

oder, wenn b der mittlere Barometerstand ist,

$$p = 14{,}10 + 0{,}5037\ h \text{ Pfund}.$$

Gewöhnlicher als die Hebermanometer sind die Gefäßmanometer, wie $ABCD$, Fig. 655. Da hier die Luft durch eine größere Quecksilber- oder nach Befinden Wassermasse, auf die Flüssigkeitssäule wirkt, so werden die Schwingungen der Luft nicht so schnell auf die Flüssigkeitssäule übergetra-

Fig. 654. Fig. 655. Fig. 656.



gen, und es wird das Messen dieser mehr in Ruhe befindlichen Säule erleichtert und sicherer. Der Bequemlichkeit des Messens oder Ablesens an der Scala wegen bringt man oft noch einen Schwimmer an, welcher auf dem Quecksilber schwimmt und mittels eines über einer Rolle liegenden Fadens mit einem über der Scala wegleitenden Zeiger verbunden ist.

Die Manometer lassen sich natürlich auch zum Messen des Druckes von Wasser und wasserförmigen Flüssigkeiten anwenden; man nennt sie aber dann Piezometer (franz. piézometres; engl. piezometers).

Mit Hülfe eines Ventils DE, Fig. 656, bestimmt sich ebenfalls, jedoch weniger scharf, die Expansivkraft des in MN abgeschlossenen Gases oder Dampfes, wenn man das Laufgewicht G so stellt, daß es eben dem Luft- oder Dampfdrucke das Gleichgewicht hält. Ist $CS = s$ die Entfernung des Schwerpunktes des armirten Hebels von der Drehaxe C, $CA = a$ der Hebelarm des Laufgewichtes, und Q das Gewicht des Hebels sammt Ventil, so hat man das statische Moment, mit welchem das Ventil durch die Gewichte zugedrückt wird,

$$= Ga + Qs;$$

ist ferner der Gas- oder Dampfdruck von unten, $= P$, der Atmosphärendruck

von oben, $= P_1$, und endlich der Hebelarm CB des Ventils, $= b$, so hat man das statische Moment, mit welchem sich das Ventil zu heben sucht,

$$= (P - P_1)\, b,$$

und es giebt nun das Gleichsetzen dieser beiden Momente:

$$Pb - P_1 b = Ga + Qs, \text{ folglich:}$$

$$P = P_1 + \frac{Ga + Qs}{b}.$$

Bezeichnet r den Halbmesser des Ventils DE, p die innere und p_1 die äußere Spannung, gemessen durch den Druck auf einen Quadratzoll, so hat man:

$$P = \pi r^2 p \text{ und } P_1 = \pi r^2 p_1, \text{ daher:}$$

$$p = p_1 + \frac{Ga + Qs}{\pi r^2 b}.$$

Beispiele. 1) Wenn der Quecksilberstand eines oben offenen Manometers, 3,5 Zoll, und der Barometerstand 27 Zoll beträgt, so ist die entsprechende Expansivkraft:

$$h = b + h_1 = 27 + 3{,}5 = 30{,}5 \text{ Zoll, oder:}$$
$$p = 0{,}5037 \,.\, h = 0{,}5037 \,.\, 30{,}5 = 15{,}36 \text{ Pfund.}$$

2) Wenn der Wassermanometerstand 21 Zoll hoch ist, so entspricht demselben bei dem Barometerstande von 27 Zoll, die Expansivkraft:

$$h = 27 + \frac{21}{13{,}6} = 28{,}54 \text{ Zoll} = 15{,}38 \text{ Pfund.}$$

3) Wenn das statische Moment eines unbelasteten Sicherheitsventils 10 Zollpfund, das statische Moment des 10 Pfund schweren Laufgewichtes, $= 15 \,.\, 10 = 150$ Zollpfund, der Hebelarm des Ventils, von Ventil- bis Drehaxe gemessen, $b = 4$ Zoll und der Halbmesser des Ventils, $r = 1{,}5$ Zoll beträgt, so ist die Differenz der Drücke auf beide Ventilflächen:

$$p - p_1 = \frac{150 + 10}{\pi\,(1{,}5)^2 \,.\, 4} = \frac{160}{9\pi} = 5{,}66 \text{ Pfund.}$$

Wäre der Atmosphärendruck $p_1 = 14$ Pfund, so fiele hiernach die Spannung der Luft unter dem Ventile:

$$p = 19{,}66 \text{ Pfund aus.}$$

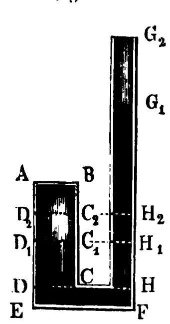
§. 387 **Mariotte'sches Gesetz.** Die Spannung der Gase wächst mit der Verdichtung derselben; je mehr man ein gewisses Luftquantum zusammendrückt oder verdichtet, desto größer wird auch dessen Spannkraft, und je mehr man dasselbe sich ausdehnen oder verdünnen läßt, desto kleiner zeigt sich auch seine Expansivkraft. Das Verhältniß, in welchem die Spannkraft und die Dichtigkeit oder das Volumen der Gase zu einander stehen, wird durch das von Mariotte (oder Boyle) entdeckte und nach ihm benannte Gesetz ausgedrückt. Es behauptet, daß die Dichtigkeit einer und derselben Luftmenge der Spannkraft derselben proportional, oder, da die Räume, welche von einer und derselben Masse eingenommen werden, den Dichtigkeiten umge-

kehrt proportional sind, daß sich die Volumina einer und derselben Gasmasse umgekehrt wie deren Expansivkräfte verhalten. Wird demnach eine gewisse Luftmenge bis auf die Hälfte ihres anfänglichen Volumens zusammengedrückt, ihre Dichtigkeit also verdoppelt, so stellt sich auch ihre Spannung noch einmal so groß heraus als anfänglich, und wird dagegen ein gewisses Luftquantum bis auf das Dreifache seines anfänglichen Raumes ausgedehnt, also seine Dichtigkeit bis auf den dritten Theil herabgezogen, so bleibt auch die Elasticität desselben nur ein Drittel von der anfänglichen Spannkraft. Ist z. B. unter dem Kolben EF eines Cylinders AC, Fig. 657, gewöhnliche atmosphärische Luft, welche anfänglich auf jeden Quadratzoll mit 14 Pfd. drückt, so wird dieselbe mit 28 Pfd. drücken, wenn man den Kolben nach $E_1 F_1$ geschoben und dadurch die eingeschlossene Luft bis auf die Hälfte ihres anfänglichen Volumens zusammengedrückt hat, und es wird diese Kraft 3 . 14 = 42 Pfund betragen, wenn der Kolben nach $E_2 F_2$ gekommen ist und zwei Drittel der ganzen Höhe zurückgelegt hat. Ist der Inhalt der Kolbenfläche 1 Quadratfuß, so beträgt der Atmosphärendruck gegen dieselbe = 144 . 14 = 2016 Pfund; um daher den Kolben um die halbe Cylinderhöhe niederzudrücken, sind nach und nach 2016 Pfund, und um ihn um zwei Drittel dieser Höhe niederzuschieben, sind allmälig 2 . 2016 = 4032 Pfund auf denselben aufzusetzen u. s. w.

Fig 657.

Ebenso läßt sich durch Zugießen von Quecksilber in die mit dem Luftcylinder AC, Fig. 658, communicirende Röhre $G_2 H$ das Mariotte'sche Gesetz prüfen. Hat man anfänglich durch die Quecksilbermasse $DEFH$ eine Luftsäule AC abgesperrt, welche mit der äußeren Luft gleiche Spannkraft besitzt, und später durch zugegossenes Quecksilber den Luftcylinder bis auf die Hälfte, auf das Viertel u. s. w. des anfänglichen Volumens zusammengedrückt, so wird man finden, daß die Niveauabstände $G_1 H_1$, $G_2 H_2$ u. s. w. der Oberflächen des Quecksilbers der einfachen, dreifachen Barometerhöhe b u. s. w. gleich sind, daß also, wenn man hierzu die dem äußeren Luftdrucke entsprechende einfache Höhe addirt, die Spannkraft zweimal, viermal u. s. w. so groß ist als beim anfänglichen Volumen.

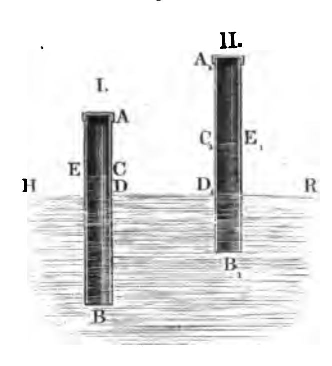
Fig. 658.



Sehr leicht läßt sich auch die Richtigkeit des Mariotte'schen Gesetzes auf der Seite der Ausdehnung der Luft nachweisen, wenn man eine cylindrische (gut calibrirte) Röhre AB, Fig. 659 (a. f. S.), senkrecht in das Quecksilber (Wasser) taucht und, nach gehörigem Verschlusse des oberen Endes A, das abgeschlossene Luftvolumen AE (I.) durch behutsames Aufziehen

dieser Röhre ausdehnt, so daß es nun ein Volumen $A_1 E_1$ (II.) annimmt. Die Dichtigkeiten der Luft in diesen Räumen AE und $A_1 E_1$ sind jedenfalls den Höhen AC und $A_1 C_1$ derselben umgekehrt, und ihre Spannungen den Differenzen zwischen dem Barometerstande b und den Höhen CD und $C_1 D_1$ der über der Oberfläche HR des Quecksilbers stehenden Quecksilbersäulen DE und $D_1 E_1$ direct proportional; es ist folglich nach dem Mariotte'schen Gesetze:

Fig. 659.



$$\frac{AC}{A_1 C_1} = \frac{b - C_1 D_1}{b - CD},$$

was auch durch die Beobachtung bei jeder beliebigen Eintauchung der Röhre AB bestätigt wird.

Sind h und h_1 oder p und p_1 die Spannkräfte, γ und γ_1 die entsprechenden Dichtigkeiten, und V und V_1 die zugehörigen Volumina einer und derselben Luftmenge, so hat man nach dem angegebenen Gesetze:

$$\frac{\gamma}{\gamma_1} = \frac{V_1}{V} = \frac{h}{h_1} = \frac{p}{p_1}; \text{ oder } V_1 \gamma_1 = V\gamma, \text{ sowie } V_1 p_1 = Vp; \text{ daher}$$

$$\gamma_1 = \frac{h_1}{h}\gamma = \frac{p_1}{p}\gamma \text{ sowie } V_1 = \frac{h}{h_1} V = \frac{p}{p_1} V.$$

Hiernach läßt sich die Dichtigkeit und auch das Volumen der Luft von einer Spannung auf die andere reduciren.

Anmerkung. Nur bei sehr großen Pressungen der Luft kommen bemerkbare Abweichungen von dem Mariotte'schen Gesetze vor. Nach Regnault ist z. B. für atmosphärische Luft, wenn das Luftvolumen V_0 von 1 Meter Pressung in V_1 übergeht, die Pressung desselben

$$p = \frac{V_0}{V}\left[1 - 0{,}0011054\left(\frac{V_0}{V} - 1\right) + 0{,}000019381\left(\frac{V_0}{V} - 1\right)^2\right] \text{ Meter},$$

so daß für $\frac{V_0}{V}$ =	5	10	15	20
p =	4,97944	9,91622	14,82484	19,71988 Met. ausfällt.

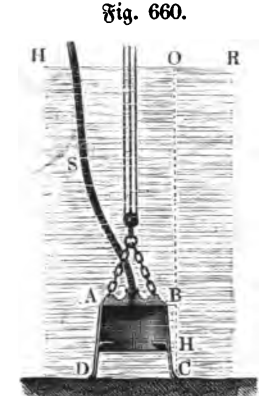
Beispiele. 1) Wenn bei einer Gebläsemaschine der Manometerstand 3 Zoll mißt, während der Barometerstand 28 Zoll beträgt, so ist die Dichtigkeit des Windes $= \frac{28 + 3}{28} = \frac{31}{28} = 1{,}107$ mal so groß, als die der äußeren Luft.

2) Wenn ein Cubikfuß atmosphärische Luft bei 28 Zoll Barometerstand $\frac{61{,}74}{770}$ Pfund wiegt, so hat er bei 34 Zoll Barometerstand ein Gewicht von:

$$\frac{61,74}{770} \cdot \frac{34}{28} = \frac{2099}{21560} = 0,09736 \text{ Pfund.}$$

3) Wie tief kann eine Taucherglocke (franz. cloche à plongeur; engl. diving-bell) $ABCD$, Fig. 660, unter das Wasser HRD getaucht werden, damit das Wasser nur bis zu einer gewissen Höhe $CH = y$ in dieselbe eindringe? Anfänglich steht die Glocke mit ihrer Mündung CD über dem Wasserspiegel HR, wobei ihr ganzer Raum V mit atmosphärischer Luft angefüllt ist, deren Wasserbarometerstand $= b$ sein möge. Sinkt nachher die Glocke um die Tiefe $OC = x$, und bringt hierbei ein Wasservolumen W in die Glocke, so geht, wenn keine Luft durch den Schlauch S zugedrückt wird, das Volumen der abgeschlossenen Luft in $V - W$ und der Barometerstand derselben in $b + x - y$ über, und es ist folglich:

Fig. 660.



$$\frac{b + x - y}{b} = \frac{V}{V - W},$$

woraus sich nun ergiebt:

$$x = y - b + \frac{Vb}{V - W} = y + \frac{Wb}{V - W}.$$

Ist der mittlere Querschnitt des unteren Theiles der Glocke, $= F$, so läßt sich noch $W = Fy$ und daher

$$x = y\left(1 + \frac{Fb}{V - Fy}\right) \text{ setzen.}$$

Für den Wasserbarometerstand $b = 30$ Fuß ist bei dem Volumen der Glocke, $V = 100$ Cubikfuß, dem mittleren Querschnitte ihrer unteren Hälfte, $F = 20$ Quadratfuß, und der zulässigen Höhe des Wassers in derselben, $y = 3$ Fuß, das Volumen des letzteren: $W = Fy = 20 . 3 = 60$ Cubikfuß, folglich das der abgesperrten Luft: $V - W = 40$ Cubikfuß, ferner die Dichtigkeit der letzteren $= \frac{100}{40} = 2\frac{1}{2}$ mal so groß als die der äußeren Luft, und die entsprechende Tiefe der Eintauchung:

$$x = 3 + \frac{60 . 30}{40} = 3 + 45 = 48 \text{ Fuß.}$$

§. 388 **Arbeit der comprimirten Luft.** Die Arbeit, welche aufzuwenden ist, um ein gewisses Luftquantum bis zu einem gewissen Grade zu verdichten, sowie auch die Arbeit, welche die Luft bei ihrem Ausdehnen zu verrichten vermag, läßt sich nicht sogleich angeben, weil die Expansivkraft in jedem Momente des Verdichtens oder Ausdehnens eine andere ist, wir müssen uns daher nach einer besonderen Formel zur Berechnung dieses Werthes umsehen. Denken wir uns in einem Cylinder AC, Fig. 661 (a. f. S.), durch einen Kolben EF eine gewisse Luftmasse AF abgesperrt, und untersuchen wir, welche Arbeit erfordert wird, um den Kolben um einen gewissen Weg $EE_1 = FF_1$ fortzuschieben. Ist die anfängliche

Spannung $= p$ und die anfängliche Höhe des Cylinderraumes, $AE = s$, dagegen die Spannung nach Durchlaufung des Raumes EE_1, $= p_1$, und die Höhe $E_1 A$ des noch übrigbleibenden Luftvolumens, $= s_1$, so gilt die Proportion:

Fig. 661.

$$p_1 : p = s : s_1, \text{ welche giebt } p_1 = \frac{s}{s_1} p.$$

Während Durchlaufung eines sehr kleinen Wegtheiles $E_1 E_2 = \sigma$ läßt sich die Spannung p_1 als unveränderlich ansehen, und es ist daher die dabei aufzuwendende mechanische Arbeit $= F p_1 \sigma = \frac{F p s \sigma}{s_1}$, wofern noch F die Kolbenfläche bezeichnet.

Den Lehren der Logarithmen zufolge *) ist aber eine sehr kleine Größe

$$x = Log.\ nat.\ (1 + x) = 2{,}3026\ Log.\ (1 + x),$$

wenn *Log. nat.* den natürlichen und *Log.* den gemeinen Logarithmen bezeichnet; es läßt sich folglich auch

$$F p s \frac{\sigma}{s_1} = F p s\ Log.\ nat.\ \left(1 + \frac{\sigma}{s_1}\right)$$
$$= 2{,}3026\ F p s\ Log.\left(1 + \frac{\sigma}{s_1}\right)$$

setzen. Nun ist aber

$$Log. nat. \left(1 + \frac{\sigma}{s_1}\right) = Log. nat. \left(\frac{s_1 + \sigma}{s_1}\right)$$
$$= Log. nat. (s_1 + \sigma) - Log. nat. s_1;$$

daher jene Elementararbeit auch

$$F p s \frac{\sigma}{s_1} = F p s\ [Log. nat. (s_1 + \sigma) - Log. nat. s_1].$$

Denken wir uns den ganzen Weg EE_1 aus n Wegtheilen wie σ bestehend, setzen wir also $EE_1 = n\sigma$, so finden wir die allen diesen Theilen entsprechenden Arbeiten, wenn wir in der letzten Formel nach und nach statt s_1; $s_1 + \sigma$, $s_1 + 2\sigma$, $s_1 + 3\sigma$, ... bis $s_1 + (n-1)\sigma$ und statt $s_1 + \sigma$; $s_1 + 2\sigma$, $s_1 + 3\sigma$ u. s. w. bis $s_1 + n\sigma$ oder s setzen, und finden nun durch Summiren der dadurch erhaltenen Werthe den vollständigen Arbeitsaufwand beim Durchlaufen des Weges $s - s_1$:

---

*) Nach der Reihe $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^2}{1.2.3} + \cdots$ (s. §. 194, sowie auch analytische Hülfslehren Art. 19) ist für ein kleines x, $e^x = 1 + x$, daher;

$$Log. nat.\ (1 + x) = x.$$

$$A = Fps \left\{ \begin{array}{ll} Log.\,nat.\,(s_1 + \sigma) & - \; Log.\,nat.\,s_1 \\ Log.\,nat.\,(s_1 + 2\,\sigma) & - \; Log.\,nat.\,(s_1 + \sigma) \\ Log.\,nat.\,(s_1 + 3\,\sigma) & - \; Log.\,nat.\,(s_1 + 2\,\sigma) \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ Log.\,nat.\,(s_1 + n\,\sigma) & - \; Log.\,nat.\,[s_1 + (n-1)\,\sigma] \end{array} \right\}$$

$$= Fps\,[Log.\,nat.\,(s_1 + n\,\sigma) - Log.\,nat.\,s_1]$$

$$= Fps\,(Log.\,nat.\,s - Log.\,nat.\,s_1) = Fps\;Log.\,nat.\left(\frac{s}{s_1}\right),$$

da sich immer ein Glied in der einen Zeile mit einem Gliede der folgenden Zeile aufhebt.

Da ferner $\frac{s}{s_1} = \frac{h_1}{h} = \frac{p_1}{p}$ ist, so läßt sich diese Arbeit auch setzen:

$$A = Fps\;Log.\,nat.\left(\frac{h_1}{h}\right) = Fps\;Log.\,nat.\left(\frac{p_1}{p}\right).$$

Nehmen wir den Kolbenweg $s - s_1 = x$ an, so finden wir hiernach auch die mittlere Kraft des Kolbens bei Verdichtung der Luft in dem Verhältnisse

$$\frac{h_1}{h} = \frac{p_1}{p},$$

$$P = \frac{A}{x} = Fp\,\frac{s}{x}\;Log.\,nat.\left(\frac{p_1}{p}\right).$$

Setzen wir $F = 1$ (Quadratfuß) und $s = 1$ (Fuß), so erhalten wir die Leistung

$$A = p\;Log.\,nat.\left(\frac{p_1}{p}\right) = 2{,}3026\,p\;Log.\left(\frac{p_1}{p}\right).$$

Diese Formel giebt die mechanische Arbeit an, welche aufzuwenden ist, um eine Raumeinheit (1 Cubikfuß) Luft aus der tieferen Pressung oder Spannung p in die höhere Spannung p_1 zu versetzen und sie dadurch auf das Volumen $\left(\frac{p}{p_1}\right)$ Cubikfuß zurückzuführen. Dagegen drückt

$$A = p_1\;Log.\,nat.\left(\frac{p_1}{p}\right) = 2{,}3026\,p_1\;Log.\left(\frac{p_1}{p}\right)$$

die Arbeit aus, welche eine Raumeinheit Gas ausgiebt oder verrichtet, wenn sie aus der höheren Pressung p_1 in die tiefere p übergeht.

Um eine Luftmasse vom Volumen V und der Spannung p durch Verdichtung auf das Volumen V_1 und auf die Spannung $p_1 = \frac{V}{V_1}\,p$ zurückzuführen, ist hiernach die mechanische Arbeit $Vp\;Log.\,nat.\left(\frac{V}{V_1}\right)$ aufzuwenden nöthig, und wenn umgekehrt, das Volumen V_1 bei der Spannung

$$P = Fp = 0{,}5037\ Fh \text{ Pfund}$$
$$= Fh\gamma = 1{,}985\ Fp \text{ Zoll.}$$

Beispiele. 1) Wenn bei einer Wassersäulenmaschine das Wasser 250 Fuß hoch über der Kolbenfläche steht, so ist der Druck gegen diese Fläche

$$= \frac{250}{32{,}84} = 7{,}6 \text{ Atmosphären.}$$

2) Wenn der Wind eines Cylindergebläses 1,2 Atmosphäre Spannung hat, so ist der Druck desselben auf jeden Quadratzoll

$$= 1{,}2 \,.\, 14{,}10 = 16{,}92 \text{ Pfund,}$$

und auf die Kolbenfläche von 50 Zoll Durchmesser,

$$= \frac{\pi \,.\, 50^2}{4} \cdot 16{,}92 = 33222 \text{ Pfund.}$$

Da die Atmosphäre den Gegendruck $\frac{\pi \,.\, 50^2}{4} \cdot 14{,}10 = 27685$ Pfund ausübt, so folgt die Kolbenkraft:

$$P = 33222 - 27685 = 5537 \text{ Pfund.}$$

§. 386 **Manometer.** Um die Spannung der in Gefäßen eingeschlossenen Gase oder Dämpfe zu finden, werden barometerähnliche Instrumente, welche man Manometer (franz. manomètres; engl. manometers) nennt, angewendet. Diese Instrumente werden mit Quecksilber oder mit Wasser angefüllt, und sind oben entweder offen oder verschlossen, im letzteren Falle aber wieder im oberen Theile entweder luftleer oder mit Luft erfüllt. Das Manometer mit dem luftleeren Raume, Fig. 653, ist von dem gewöhnlichen Barometer nicht verschieden. Um mit Hülfe desselben die Spannung der Luft in einem Behälter messen zu können, wird eine Röhre CE angebracht, die mit einem Ende C in dem Behälter und mit dem anderen Ende E über dem Quecksilberspiegel HR im Gehäuse HDR des Instrumentes ausmündet. Der Raum HER über dem Quecksilber wird dadurch mit dem Luftbehälter in Communication gesetzt; es nimmt daher die in ihm befindliche Luft die Spannung der Luft im Behälter an, und drückt eine Quecksilbersäule BS in die Röhre, welche sich mit dem zu messenden Luftdrucke ins Gleichgewicht setzt.

Fig. 653.



Das oben offene Hebermanometer ABC, Fig. 654, giebt den Ueberschuß der Spannung in einem Gefäße MN über den Atmosphärendruck an, weil dieser Spannung durch die Vereinigung des Luftdruckes über S mit der Quecksilbersäule RS das Gleichgewicht gehalten wird. Ist b der Barometerstand und h der Manometerstand oder der Höhen-

abstand RS der Quecksilberspiegel H und S in den beiden Schenkeln des Manometers, so hat man die durch die Höhe einer Quecksilbersäule gemessene Spannung der mit dem kleinen Schenkel communicirenden Luft:

$$b_1 = b + h,$$

oder durch den Druck auf den Quadratzoll gemessen:

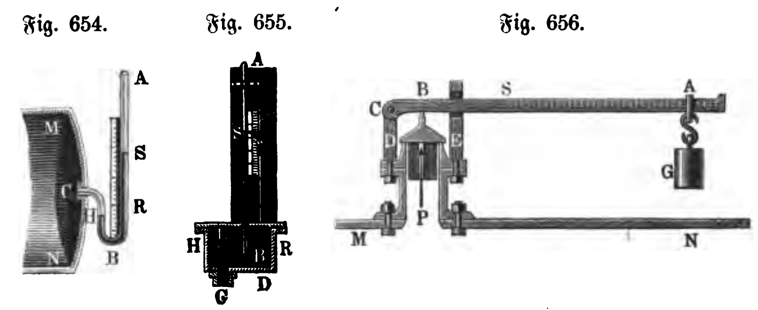
$$p = 0{,}5037\ (b + h) \text{ Pfund},$$

oder, wenn b der mittlere Barometerstand ist,

$$p = 14{,}10 + 0{,}5037\, h \text{ Pfund}.$$

Gewöhnlicher als die Hebermanometer sind die Gefäßmanometer, wie $ABCD$, Fig. 655. Da hier die Luft durch eine größere Quecksilber- oder nach Befinden Wassermasse, auf die Flüssigkeitssäule wirkt, so werden die Schwingungen der Luft nicht so schnell auf die Flüssigkeitssäule übergetra-

Fig. 654. Fig. 655. Fig. 656.



gen, und es wird das Messen dieser mehr in Ruhe befindlichen Säule erleichtert und sicherer. Der Bequemlichkeit des Messens oder Ablesens an der Scala wegen bringt man oft noch einen Schwimmer an, welcher auf dem Quecksilber schwimmt und mittels eines über einer Rolle liegenden Fadens mit einem über der Scala wegleitenden Zeiger verbunden ist.

Die Manometer lassen sich natürlich auch zum Messen des Druckes von Wasser und wasserförmigen Flüssigkeiten anwenden; man nennt sie aber dann Piezometer (franz. piézometres; engl. piezometers).

Mit Hülfe eines Ventils DE, Fig. 656, bestimmt sich ebenfalls, jedoch weniger scharf, die Expansivkraft des in MN abgeschlossenen Gases oder Dampfes, wenn man das Laufgewicht G so stellt, daß es eben dem Luft- oder Dampfdrucke das Gleichgewicht hält. Ist $CS = s$ die Entfernung des Schwerpunktes des armirten Hebels von der Drehaxe C, $CA = a$ der Hebelarm des Laufgewichtes, und Q das Gewicht des Hebels sammt Ventil, so hat man das statische Moment, mit welchem das Ventil durch die Gewichte zugedrückt wird,

$$= Ga + Qs;$$

ist ferner der Gas- oder Dampfdruck von unten, $= P$, der Atmosphärendruck

von oben, $= P_1$, und endlich der Hebelarm CB des Ventils, $= b$, so hat man das statische Moment, mit welchem sich das Ventil zu heben sucht,

$$= (P - P_1)\, b,$$

und es giebt nun das Gleichsetzen dieser beiden Momente:

$$Pb - P_1 b = Ga + Qs, \text{ folglich:}$$

$$P = P_1 + \frac{Ga + Qs}{b}.$$

Bezeichnet r den Halbmesser des Ventils DE, p die innere und p_1 die äußere Spannung, gemessen durch den Druck auf einen Quadratzoll, so hat man:

$$P = \pi r^2 p \text{ und } P_1 = \pi r^2 p_1, \text{ daher:}$$

$$p = p_1 + \frac{Ga + Qs}{\pi r^2 b}.$$

Beispiele. 1) Wenn der Quecksilberstand eines oben offenen Manometers, 3,5 Zoll, und der Barometerstand 27 Zoll beträgt, so ist die entsprechende Expansivkraft:

$$h = b + h_1 = 27 + 3{,}5 = 30{,}5 \text{ Zoll, oder:}$$
$$p = 0{,}5037 \,.\, h = 0{,}5037 \,.\, 30{,}5 = 15{,}36 \text{ Pfund.}$$

2) Wenn der Wassermanometerstand 21 Zoll hoch ist, so entspricht demselben bei dem Barometerstande von 27 Zoll, die Expansivkraft:

$$h = 27 + \frac{21}{13{,}6} = 28{,}54 \text{ Zoll} = 15{,}38 \text{ Pfund.}$$

3) Wenn das statische Moment eines unbelasteten Sicherheitsventils 10 Zollpfund, das statische Moment des 10 Pfund schweren Laufgewichtes, $= 15 \,.\, 10 = 150$ Zollpfund, der Hebelarm des Ventils, von Ventil- bis Drehaxe gemessen, $b = 4$ Zoll und der Halbmesser des Ventils, $r = 1{,}5$ Zoll beträgt, so ist die Differenz der Drücke auf beide Ventilflächen:

$$p - p_1 = \frac{150 + 10}{\pi\,(1{,}5)^2 \,.\, 4} = \frac{160}{9\pi} = 5{,}66 \text{ Pfund.}$$

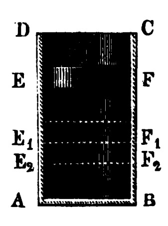
Wäre der Atmosphärendruck $p_1 = 14$ Pfund, so fiele hiernach die Spannung der Luft unter dem Ventile:

$$p = 19{,}66 \text{ Pfund aus.}$$

§. 387 **Mariotte'sches Gesetz.** Die Spannung der Gase wächst mit der Verdichtung derselben; je mehr man ein gewisses Luftquantum zusammendrückt oder verdichtet, desto größer wird auch dessen Spannkraft, und je mehr man dasselbe sich ausdehnen oder verdünnen läßt, desto kleiner zeigt sich auch seine Expansivkraft. Das Verhältniß, in welchem die Spannkraft und die Dichtigkeit oder das Volumen der Gase zu einander stehen, wird durch das von Mariotte (oder Boyle) entdeckte und nach ihm benannte Gesetz ausgedrückt. Es behauptet, daß die Dichtigkeit einer und derselben Luftmenge der Spannkraft derselben proportional, oder, da die Räume, welche von einer und derselben Masse eingenommen werden, den Dichtigkeiten umge-

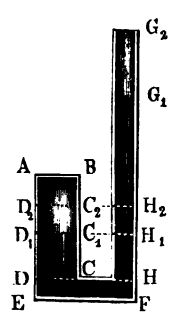
kehrt proportional sind, daß sich die Volumina einer und derselben Gasmasse umgekehrt wie deren Expansivkräfte verhalten. Wird demnach eine gewisse Luftmenge bis auf die Hälfte ihres anfänglichen Volumens zusammengedrückt, ihre Dichtigkeit also verdoppelt, so stellt sich auch ihre Spannung noch einmal so groß heraus als anfänglich, und wird dagegen ein gewisses Luftquantum bis auf das Dreifache seines anfänglichen Raumes ausgedehnt, also seine Dichtigkeit bis auf den dritten Theil herabgezogen, so bleibt auch die Elasticität desselben nur ein Drittel von der anfänglichen Spannkraft. Ist z. B. unter dem Kolben EF eines Cylinders AC, Fig. 657, gewöhnliche atmosphärische Luft, welche anfänglich auf jeden Quadratzoll mit 14 Pfd. drückt, so wird dieselbe mit 28 Pfd. drücken, wenn man den Kolben nach $E_1 F_1$ geschoben und dadurch die eingeschlossene Luft bis auf die Hälfte ihres anfänglichen Volumens zusammengedrückt hat, und es wird diese Kraft $3 . 14 = 42$ Pfund betragen, wenn der Kolben nach $E_2 F_2$ gekommen ist und zwei Drittel der ganzen Höhe zurückgelegt hat. Ist der Inhalt der Kolbenfläche 1 Quadratfuß, so beträgt der Atmosphärendruck gegen dieselbe $= 144 . 14 = 2016$ Pfund; um daher den Kolben um die halbe Cylinderhöhe niederzudrücken, sind nach und nach 2016 Pfund, und um ihn um zwei Drittel dieser Höhe niederzuschieben, sind allmälig $2 . 2016 = 4032$ Pfund auf denselben aufzusetzen u. s. w.

Fig 657.



Ebenso läßt sich durch Zugießen von Quecksilber in die mit dem Luftcylinder $A\,C$, Fig. 658, communicirende Röhre $G_2 H$ das Mariotte'sche Gesetz prüfen. Hat man anfänglich durch die Quecksilbermasse $DEFH$ eine Luftsäule $A\,C$ abgesperrt, welche mit der äußeren Luft gleiche Spannkraft besitzt, und später durch zugegossenes Quecksilber den Luftcylinder bis auf die Hälfte, auf das Viertel u. s. w. des anfänglichen Volumens zusammengedrückt, so wird man finden, daß die Niveauabstände $G_1 H_1$, $G_2 H_2$ u. s. w. der Oberflächen des Quecksilbers der einfachen, dreifachen Barometerhöhe b u. s. w. gleich sind, daß also, wenn man hierzu die dem äußeren Luftdrucke entsprechende einfache Höhe addirt, die Spannkraft zweimal, viermal u. s. w. so groß ist als beim anfänglichen Volumen.

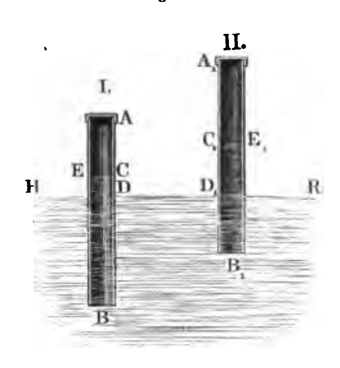
Fig. 658.



Sehr leicht läßt sich auch die Richtigkeit des Mariotte'schen Gesetzes auf der Seite der Ausdehnung der Luft nachweisen, wenn man eine cylindrische (gut calibrirte) Röhre AB, Fig. 659 (a. f. S.), senkrecht in das Quecksilber (Wasser) taucht und, nach gehörigem Verschlusse des oberen Endes A, das abgeschlossene Luftvolumen AE (I.) durch behutsames Aufziehen

dieser Röhre ausdehnt, so daß es nun ein Volumen $A_1 E_1$ (II.) annimmt. Die Dichtigkeiten der Luft in diesen Räumen AE und $A_1 E_1$ sind jedenfalls den Höhen AC und $A_1 C_1$ derselben umgekehrt, und ihre Spannungen den Differenzen zwischen dem Barometerstande b und den Höhen CD und $C_1 D_1$ der über der Oberfläche HR des Quecksilbers stehenden Quecksilbersäulen DE und $D_1 E_1$ direct proportional; es ist folglich nach dem Mariotte'schen Gesetze:

Fig. 659.



$$\frac{AC}{A_1 C_1} = \frac{b - C_1 D_1}{b - CD},$$

was auch durch die Beobachtung bei jeder beliebigen Eintauchung der Röhre AB bestätigt wird.

Sind h und h_1 oder p und p_1 die Spannkräfte, γ und γ_1 die entsprechenden Dichtigkeiten, und V und V_1 die zugehörigen Volumina einer und derselben Luftmenge, so hat man nach dem angegebenen Gesetze:

$$\frac{\gamma}{\gamma_1} = \frac{V_1}{V} = \frac{h}{h_1} = \frac{p}{p_1}; \text{ oder } V_1 \gamma_1 = V\gamma, \text{ sowie } V_1 p_1 = Vp; \text{ daher}$$

$$\gamma_1 = \frac{h_1}{h}\,\gamma = \frac{p_1}{p}\,\gamma \text{ sowie } V_1 = \frac{h}{h_1}\,V = \frac{p}{p_1}\,V.$$

Hiernach läßt sich die Dichtigkeit und auch das Volumen der Luft von einer Spannung auf die andere reduciren.

Anmerkung. Nur bei sehr großen Pressungen der Luft kommen bemerkbare Abweichungen von dem Mariotte'schen Gesetze vor. Nach Regnault ist z. B. für atmosphärische Luft, wenn das Luftvolumen V_0 von 1 Meter Pressung in V_1 übergeht, die Pressung desselben

$$p = \frac{V_0}{V}\left[1 - 0{,}0011054\left(\frac{V_0}{V} - 1\right) + 0{,}000019381\left(\frac{V_0}{V} - 1\right)^2\right] \text{ Meter,}$$

so daß für $\frac{V_0}{V} =$ 5	10	15	20
$p =$ 4,97944	9,91622	14,82484	19,71988 Met. ausfällt.

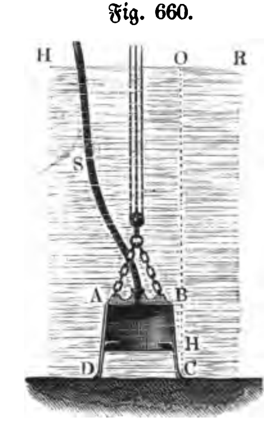
Beispiele. 1) Wenn bei einer Gebläsemaschine der Manometerstand 3 Zoll mißt, während der Barometerstand 28 Zoll beträgt, so ist die Dichtigkeit des Windes $= \frac{28 + 3}{28} = \frac{31}{28} = 1{,}107$ mal so groß, als die der äußeren Luft.

2) Wenn ein Cubikfuß atmosphärische Luft bei 28 Zoll Barometerstand $\frac{61{,}74}{770}$ Pfund wiegt, so hat er bei 34 Zoll Barometerstand ein Gewicht von:

$$\frac{61,74}{770} \cdot \frac{34}{28} = \frac{2099}{21560} = 0,09736 \text{ Pfund.}$$

3) Wie tief kann eine Taucherglocke (franz. cloche à plongeur; engl. diving-bell) $ABCD$, Fig. 660, unter das Wasser HRD getaucht werden, damit das Wasser nur bis zu einer gewissen Höhe $CH = y$ in dieselbe eindringe? Anfänglich steht die Glocke mit ihrer Mündung CD über dem Wasserspiegel HR, wobei ihr ganzer Raum V mit atmosphärischer Luft angefüllt ist, deren Wasserbarometerstand $= b$ sein möge. Sinkt nachher die Glocke um die Tiefe $OC = x$, und dringt hierbei ein Wasservolumen W in die Glocke, so geht, wenn keine Luft durch den Schlauch S zugedrückt wird, das Volumen der abgeschlossenen Luft in $V - W$ und der Barometerstand derselben in $b + x - y$ über, und es ist folglich:

Fig. 660.



$$\frac{b + x - y}{b} = \frac{V}{V - W},$$

woraus sich nun ergiebt:

$$x = y - b + \frac{Vb}{V - W} = y + \frac{Wb}{V - W}.$$

Ist der mittlere Querschnitt des unteren Theiles der Glocke, $= F$, so läßt sich noch $W = Fy$ und daher

$$x = y\left(1 + \frac{Fb}{V - Fy}\right) \text{ setzen.}$$

Für den Wasserbarometerstand $b = 30$ Fuß ist bei dem Volumen der Glocke, $V = 100$ Cubikfuß, dem mittleren Querschnitte ihrer unteren Hälfte, $F = 20$ Quadratfuß, und der zulässigen Höhe des Wassers in derselben, $y = 3$ Fuß, das Volumen des letzteren: $W = Fy = 20 . 3 = 60$ Cubikfuß, folglich das der abgesperrten Luft: $V - W = 40$ Cubikfuß, ferner die Dichtigkeit der letzteren $= \frac{100}{40} = 2\frac{1}{2}$ mal so groß als die der äußeren Luft, und die entsprechende Tiefe der Eintauchung:

$$x = 3 + \frac{60 . 30}{40} = 3 + 45 = 48 \text{ Fuß.}$$

§. 388 **Arbeit der comprimirten Luft.** Die Arbeit, welche aufzuwenden ist, um ein gewisses Luftquantum bis zu einem gewissen Grade zu verdichten, sowie auch die Arbeit, welche die Luft bei ihrem Ausdehnen zu verrichten vermag, läßt sich nicht sogleich angeben, weil die Expansivkraft in jedem Momente des Verdichtens oder Ausdehnens eine andere ist, wir müssen uns daher nach einer besonderen Formel zur Berechnung dieses Werthes umsehen. Denken wir uns in einem Cylinder AC, Fig. 661 (a. f. S.), durch einen Kolben EF eine gewisse Luftmasse AF abgesperrt, und untersuchen wir, welche Arbeit erfordert wird, um den Kolben um einen gewissen Weg $EE_1 = FF_1$ fortzuschieben. Ist die anfängliche

Spannung $= p$ und die anfängliche Höhe des Cylinderraumes, $AE = s$, dagegen die Spannung nach Durchlaufung des Raumes EE_1, $= p_1$, und die Höhe $E_1 A$ des noch übrigbleibenden Luftvolumens, $= s_1$, so gilt die Proportion:

Fig. 661.

D C E F E₁ E₂ F₁ F₂ A B

$$p_1 : p = s : s_1, \text{ welche giebt } p_1 = \frac{s}{s_1} p.$$

Während Durchlaufung eines sehr kleinen Wegtheiles $E_1 E_2 = \sigma$ läßt sich die Spannung p_1 als unveränderlich ansehen, und es ist daher die dabei aufzuwendende mechanische Arbeit $= F p_1 \sigma = \frac{F p s \sigma}{s_1}$, wofern noch F die Kolbenfläche bezeichnet.

Den Lehren der Logarithmen zufolge *) ist aber eine sehr kleine Größe

$$x = Log.\, nat.\, (1 + x) = 2{,}3026\; Log.\, (1 + x),$$

wenn *Log. nat.* den natürlichen und *Log.* den gemeinen Logarithmen bezeichnet; es läßt sich folglich auch

$$F p s \frac{\sigma}{s_1} = F p s\; Log.\, nat.\left(1 + \frac{\sigma}{s_1}\right)$$

$$= 2{,}3026\; F p s\; Log.\left(1 + \frac{\sigma}{s_1}\right)$$

setzen. Nun ist aber

$$Log.\, nat.\left(1 + \frac{\sigma}{s_1}\right) = Log.\, nat.\left(\frac{s_1 + \sigma}{s_1}\right)$$

$$= Log.\, nat.\, (s_1 + \sigma) - Log.\, nat.\, s_1;$$

daher jene Elementararbeit auch

$$F p s \frac{\sigma}{s_1} = F p s\; [Log.\, nat.\, (s_1 + \sigma) - Log.\, nat.\, s_1].$$

Denken wir uns den ganzen Weg EE_1 aus n Wegtheilen wie σ bestehend, setzen wir also $EE_1 = n\sigma$, so finden wir die allen diesen Theilen entsprechenden Arbeiten, wenn wir in der letzten Formel nach und nach statt s_1; $s_1 + \sigma$, $s_1 + 2\sigma$, $s_1 + 3\sigma$, ... bis $s_1 + (n-1)\sigma$ und statt $s_1 + \sigma$; $s_1 + 2\sigma$, $s_1 + 3\sigma$ u. s. w. bis $s_1 + n\sigma$ oder s setzen, und finden nun durch Summiren der dadurch erhaltenen Werthe den vollständigen Arbeitsaufwand beim Durchlaufen des Weges $s - s_1$:

---

*) Nach der Reihe $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^2}{1.2.3} + \cdots$ (s. §. 194, sowie auch analytische Hülfslehren Art. 19) ist für ein kleines x, $e^x = 1 + x$, daher;

$$Log.\, nat.\, (1 + x) = x.$$

$$A = Fps \left\{ \begin{array}{l} Log.nat.(s_1 + \sigma) - Log.nat.s_1 \\ Log.nat.(s_1 + 2\sigma) - Log.nat.(s_1 + \sigma) \\ Log.nat.(s_1 + 3\sigma) - Log.nat.(s_1 + 2\sigma) \\ \quad . \qquad\qquad\qquad . \\ \quad . \qquad\qquad\qquad . \\ \quad . \qquad\qquad\qquad . \\ Log.nat.(s_1 + n\sigma) - Log.nat.[s_1 + (n-1)\sigma] \end{array} \right\}$$

$$= Fps\,[Log.nat.(s_1 + n\sigma) - Log.nat.s_1]$$

$$= Fps\,(Log.nat.s - Log.nat.s_1) = Fps\,Log.nat.\left(\frac{s}{s_1}\right),$$

da sich immer ein Glied in der einen Zeile mit einem Gliede der folgenden Zeile aufhebt.

Da ferner $\frac{s}{s_1} = \frac{h_1}{h} = \frac{p_1}{p}$ ist, so läßt sich diese Arbeit auch setzen:

$$A = Fps\,Log.nat.\left(\frac{h_1}{h}\right) = Fps\,Log.nat.\left(\frac{p_1}{p}\right).$$

Nehmen wir den Kolbenweg $s - s_1 = x$ an, so finden wir hiernach auch die mittlere Kraft des Kolbens bei Verdichtung der Luft in dem Verhältnisse

$$\frac{h_1}{h} = \frac{p_1}{p},$$

$$P = \frac{A}{x} = Fp\,\frac{s}{x}\,Log.nat.\left(\frac{p_1}{p}\right).$$

Setzen wir $F = 1$ (Quadratfuß) und $s = 1$ (Fuß), so erhalten wir die Leistung

$$A = p\,Log.nat.\left(\frac{p_1}{p}\right) = 2{,}3026\,p\,Log.\left(\frac{p_1}{p}\right).$$

Diese Formel giebt die mechanische Arbeit an, welche aufzuwenden ist, um eine Raumeinheit (1 Cubikfuß) Luft aus der tieferen Pressung oder Spannung p in die höhere Spannung p_1 zu versetzen und sie dadurch auf das Volumen $\left(\frac{p}{p_1}\right)$ Cubikfuß zurückzuführen. Dagegen drückt

$$A = p_1\,Log.nat.\left(\frac{p_1}{p}\right) = 2{,}3026\,p_1\,Log.\left(\frac{p_1}{p}\right)$$

die Arbeit aus, welche eine Raumeinheit Gas ausgiebt oder verrichtet, wenn sie aus der höheren Pressung p_1 in die tiefere p übergeht.

Um eine Luftmasse vom Volumen V und der Spannung p durch Verdichtung auf das Volumen V_1 und auf die Spannung $p_1 = \frac{V}{V_1}\,p$ zurückzuführen, ist hiernach die mechanische Arbeit $Vp\,Log.nat.\left(\frac{V}{V_1}\right)$ aufzuwenden nöthig, und wenn umgekehrt, das Volumen V_1 bei der Spannung

p_1 durch Verdünnung in das Volumen V und in die Spannung $p = \frac{V_1}{V} p_1$ übergeht, so wird die Arbeit

$$V p \, Log. nat. \left(\frac{V}{V_1}\right) = V_1 p_1 \, Log. nat. \left(\frac{V}{V_1}\right) \text{ frei.}$$

Anmerkung. Zur Erzeugung mäßiger Spannungsdifferenzen $(p_1 - p)$ oder kleiner Volumenveränderungen $(V_1 - V)$ kann man auch einfach die erforderliche Arbeit

$$A = F\left(\frac{p+p_1}{2}\right)(s - s_1) = F s \left(1 - \frac{p}{p_1}\right)\left(\frac{p+p_1}{2}\right)$$
$$= V\left(1 - \frac{p}{p_1}\right)\left(\frac{p+p_1}{2}\right)$$

setzen, oder genauer, mit Hülfe der Simpson'schen Regel, wenn z den Druck beim mittleren Kolbenwege $\frac{s + s_1}{2}$ bezeichnet:

$$A = V\left(1 - \frac{p}{p_1}\right)\left(\frac{p + 4z + p_1}{6}\right).$$

Nun ist aber:

$$\frac{z}{p} = \frac{s}{\frac{1}{2}(s + s_1)} = \frac{2s}{s + s_1} = \frac{2}{1 + \frac{p}{p_1}} = \frac{2p_1}{p + p_1},$$

daher folgt:

$$A = \frac{1}{6} V \left(1 - \frac{p}{p_1}\right)\left(p + \frac{8 p p_1}{p + p_1} + p_1\right)$$
$$= \frac{1}{6} V p \left(\frac{p_1}{p} + \frac{8(p_1 - p)}{p_1 + p} - \frac{p}{p_1}\right).$$

Beispiele. 1) Wenn ein Gebläse pro Secunde 10 Cubikfuß Luft von 28 Zoll Spannung in Wind von 30 Zoll Spannung verwandelt, so ist die von demselben in jeder Secunde zu verrichtende Arbeit

$$A = 17280 \,.\, 0{,}5037 \,.\, 28 \, Log. nat. (\tfrac{30}{28}) = 243710 \, (Log. nat. 15 - Log. nat. 14)$$
$$= 243710 \, (2{,}708050 - 2{,}639057) = 243710 \,.\, 0{,}068993$$
$$= 16814 \text{ Zollpfund} = 1401 \text{ Fußpfund}.$$

Die Annäherungsformel in der Anmerkung giebt diese Arbeit:

$$A = \tfrac{1}{6} \,.\, 243710 \,.\left(\frac{30}{28} + \frac{8 \,.\, 2}{29} - \frac{28}{30}\right) = 40610 \,.\left(\frac{15}{14} + \frac{8}{58} - \frac{14}{15}\right)$$
$$= 40618 \,.\, 0{,}41387 = 16811 \text{ Zollpfund} = 1401 \text{ Fußpfund}.$$

2) Wenn bei einer Dampfmaschine unter der Kolbenfläche $F = \pi \,.\, 8^2 = 201$ Quadratzoll eine Dampfmasse von 15 Zoll Höhe und 3 Atmosphären Spannung steht, welche den Kolben bei ihrer Ausdehnung um 25 Zoll fortschiebt, so ist die hierbei entwickelte und auf den Kolben übergetragene mechanische Arbeit unter der Voraussetzung, daß der Dampf bei seiner Expansion dem Mariotte'schen Gesetze folgt:

$$A = 201 \,.\, 3 \,.\, 14{,}10 \,.\, 15 \, Log. nat. \left(\frac{15 + 25}{15}\right) = 127534 \, Log. nat. \tfrac{8}{3}$$
$$= 127534 \,.\, 0{,}98083 = 125089 \text{ Zollpfund} = 10424 \text{ Fußpfund}$$

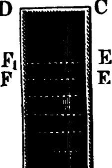
und die mittlere Kolbenkraft, ohne Rücksicht auf die Kolbenreibung und auf den Gegendruck:

$$P = \frac{125089}{25} = 4604 \text{ Pfund}.$$

§. 389 **Druck in den verschiedenen Luftschichten.** Die in einem Gefäße eingeschlossene Luft ist in verschiedenen Tiefen von verschiedener Dichtigkeit und Spannung, denn die oberen Luftschichten drücken die unteren Luftschichten, auf welchen sie ruhen, zusammen; es ist deshalb nur in einer und derselben Horizontalschicht einerlei Dichtigkeit und einerlei Spannung, und es nehmen beide mit der Tiefe zu. Um aber das Gesetz dieser Zunahme der Dichtigkeit von oben nach unten oder der Abnahme derselben von unten nach oben zu finden, schlagen wir einen Weg ein, der dem des vorigen Paragraphen sehr ähnlich ist.

Denken wir uns eine verticale Luftsäule AE, Fig. 662, vom Querschnitte $AB = 1$, und von der Höhe $AF = s$. Setzen wir für die untere Luftschicht die Dichtigkeit $= \gamma$ und die Spannung $= p$, und für die obere Luftschicht EF die Dichtigkeit $= \gamma_1$ und die Spannkraft $= p_1$, so haben wir zunächst $\frac{\gamma_1}{\gamma} = \frac{p_1}{p}$. Bezeichnet σ die Höhe EE_1 der Schicht E_1F, so ist das Gewicht derselben, sowie auch die dieser Höhe σ entsprechende Abnahme der Spannkraft:

Fig. 662.



$$v = 1 \,.\, \sigma \,.\, \gamma_1 = \frac{\sigma \gamma p_1}{p},$$

und umgekehrt:

$$\sigma = \frac{p}{\gamma} \cdot \frac{v}{p_1},$$

oder, wie im vorigen Paragraphen:

$$\sigma = \frac{p}{\gamma} Log.\, nat. \left(1 + \frac{v}{p_1}\right) = \frac{p}{\gamma} [Log.\, nat.\, (p_1 + v) - Log.\, nat.\, p_1].$$

Setzen wir hierin statt p_1, nach und nach $p_1 + v$, $p_1 + 2v$, $p_1 + 3v$ u. s. w. bis $p = p_1 + (n - 1)\, v$, und addiren wir die entsprechenden Luftschichthöhen oder Werthe von σ, so bekommen wir die Höhe der ganzen Luftsäule, ganz wie im vorigen Paragraphen:

$$s = \frac{p}{\gamma} (Log.\, nat.\, p - Log.\, nat.\, p_1) = \frac{p}{\gamma} Log.\, nat. \left(\frac{p}{p_1}\right)$$

oder auch:

$$s = \frac{p}{\gamma} Log.\, nat. \left(\frac{b}{b_1}\right) = 2{,}302 \, \frac{p}{\gamma} Log. \left(\frac{b}{b_1}\right),$$

wenn b und b_1 die den Spannkräften p und p_1 entsprechenden Barometerstände in A und in F bezeichnen.

Ist umgekehrt die Höhe s gegeben, so läßt sich die ihr entsprechende Expansivkraft und Dichtigkeit der Luft berechnen. Es ist nämlich:

$$\frac{p}{p_1} = \frac{\gamma}{\gamma_1} = e^{\frac{s\gamma}{p}}, \text{ also } \gamma_1 = \gamma\, e^{-\frac{s\gamma}{p}},$$

wobei $e = 2{,}71828$, die Grundzahl des natürlichen Logarithmensystemes bezeichnet.

Anmerkung. Diese Formel findet ihre Anwendung beim barometrischen Höhenmessen, welches im „Ingenieur", Seite 273 abgehandelt wird. Ohne Berücksichtigung der Temperatur u. s. w. läßt sich im Mittel

$$s = 58604 \, Log. \left(\frac{b}{b_1}\right) \text{ Fuß setzen.}$$

Beispiele. 1) Wenn man den Barometerstand am Fuße eines Berges, 339 und am Gipfel desselben, 315 Linien gefunden hat, so ergiebt sich die Höhe dieses Berges:

$$s = 58604 \,.\, Log. ({}^{339}/_{315}) = 58604 \,.\, 0{,}031889 = 1869 \text{ Fuß.}$$

2) Für die Dichtigkeit der Luft auf einem 10000 Fuß hohen Berge hat man:

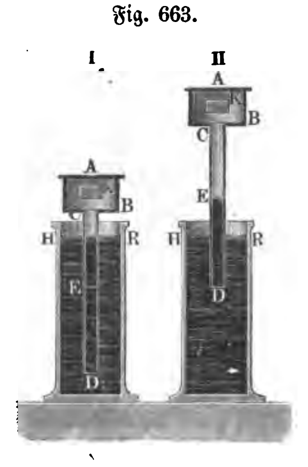
$$Log. \frac{\gamma}{\gamma_1} = {}^{10000}/_{58604} = 0{,}1706, \text{ daher } \frac{\gamma}{\gamma_1} = 1{,}481 \text{ und } \frac{\gamma_1}{\gamma} = \frac{1}{1{,}481} = 0{,}675;$$

es ist also dieselbe nur $67^1/_2$ Procent von der Dichtigkeit am Fuße.

§. 390 **Stereometer und Volumenometer.** Das Mariotte'sche Gesetz findet eine praktische Anwendung bei der Bestimmung der Volumina gewisser, namentlich pulverförmiger, faseriger Körper u. s. w. mittels der sogenannten Stereometer oder Volumenometer.

1) Das Stereometer von Say. Wird die mit dem verschlossenen Gefäße AB, Fig. 663 I., in Verbindung stehende und ins Quecksilber HDR eingetauchte Glasröhre CD emporgezogen, ohne ganz aus dem Quecksilber zu kommen (II.), so tritt in Folge der Ausdehnung der abgesperrten Luft, von oben eine gewisse Luftsäule CE, in die Röhre, und es bleibt von unten eine gewisse Quecksilbersäule DE in derselben zurück, wobei sich die nun verminderte Spannkraft der eingeschlossenen Luft mit dem um den Druck der Quecksilbersäule DE verminderten Atmosphärendruck ins Gleichgewicht setzt. Ist nun V_0 das Volumen des Raumes ABC, V_1 das zu bestimmende Volumen des in denselben gebrachten Körpers K und V das Volumen der Luftsäule CE, sowie b der Barometerstand und h die Höhe der eingedrungenen Quecksilbersäule DE, so hat man, da eine und dieselbe Luftmenge erst das Volumen $V_0 - V_1$ bei der Pressung b, und dann das Volumen $V_0 - V_1 + V$ bei der Pressung $b - h$, annimmt, nach dem Mariotte'schen Gesetze:

Fig. 663.



$$\frac{V_0 - V_1}{V_0 - V_1 + V} = \frac{b - h}{b},$$

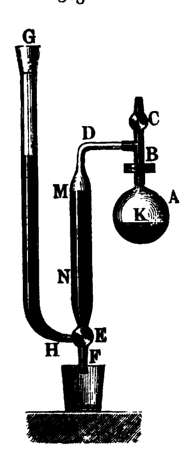
wonach dann das gesuchte Körpervolumen

$$V_1 = V_0 - \left(\frac{b - h}{h}\right) V \text{ folgt.}$$

Wenn man das Volumina V_0 kennt, und die Röhre bei der Bestimmung so weit herauszieht, daß die Länge und folglich auch das Volumen V der Luftsäule in der Röhre CD ein bestimmtes ist, und man beobachtet außer dem Barometerstande b, noch die Höhe h der Wassersäule DE, so kann man mittels dieser Formel das Volumen V_1 des Körpers K berechnen.

2) Das Volumenometer von Regnault. Wird der mit atmosphärischer Luft erfüllte Raum $ABCD$, Fig. 664, welcher auch den Körper K enthält, dessen Volumen V_1 bestimmt werden soll, durch den Hahn bei C abgesperrt, und dann durch den geöffneten Hahn E so viel Quecksilber aus der Röhre DE abgelassen, daß dessen Oberfläche von M nach N sinkt, so kann man nach dem Mariotte'schen Gesetze wieder die obige Formel

Fig. 664.

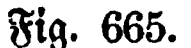


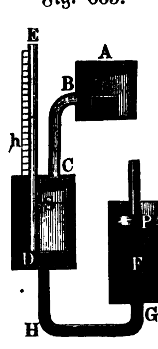
$$\frac{V_0 - V_1}{V_0 - V_1 + V} = \frac{b - h}{b}$$

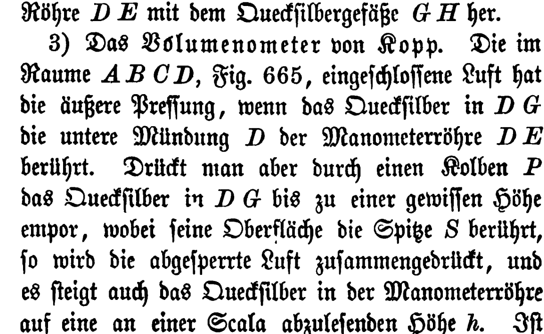
aufstellen, wenn man das Volumen des Raumes $ABDM$ durch V_0, das Volumen des abgelassenen Quecksilbers durch V und die Höhe MN desselben durch h bezeichnet. Es folgt deshalb auch genau wie oben das Volumen des Körpers in A,

$$V_1 = V_0 - \left(\frac{b - h}{h}\right) V.$$

Um für eine zweite Messung die Röhre DE von Neuem mit Quecksilber zu füllen, stellt man durch Drehung des Hahnes E eine Communication der Röhre DE mit dem Quecksilbergefäße GH her.


Fig. 665.





3) Das Volumenometer von Kopp. Die im Raume $ABCD$, Fig. 665, eingeschlossene Luft hat die äußere Pressung, wenn das Quecksilber in DG die untere Mündung D der Manometerröhre DE berührt. Drückt man aber durch einen Kolben P das Quecksilber in DG bis zu einer gewissen Höhe empor, wobei seine Oberfläche die Spitze S berührt, so wird die abgesperrte Luft zusammengedrückt, und es steigt auch das Quecksilber in der Manometerröhre auf eine an einer Scala abzulesenden Höhe h. Ist

nun wieder V_0 das Volumen des Luftraumes $ABCD$, V_1 das gesuchte Volumen des in denselben gebrachten Körpers und V das Volumen des zugeflossenen Quecksilbers, so hat man dies Mal

$$\frac{V_0 - V_1}{V_0 - V_1 - V} = \frac{b + h}{b},$$

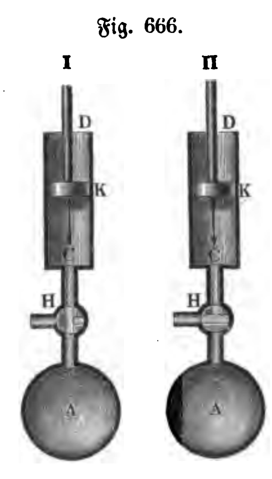
und daher das gesuchte Körpervolumen:

$$V_1 = V_0 - \left(\frac{b + h}{h}\right) V.$$

Die constanten Volumina V_0 und V sind durch Einfüllung mit Quecksilber und Abwägen der eingenommenen Quecksilbermenge für jedes Instrument besonders zu bestimmen.

§. 391 **Die Luftpumpe** (franz. machine pneumatique; engl. air-pump, syringe). Wenn man den Kolben K, Fig. 666, einer Luftpumpe bei der Hahnstellung (I) aufzieht und bei der Hahnstellung (II) niederdrückt, so wirkt dieselbe als Verdünnungspumpe; wenn man dagegen denselben bei Hahnstellung (II) aufzieht und bei der Hahnstellung (I) zurückschiebt, so wirkt sie als Verdichtungspumpe. Bei wiederholtem Auf- und Niederziehen des Kolbens K im Cylinder CD wird dadurch die Luft im Recipienten A, im ersten Falle immer mehr und mehr verdünnt, im zweiten dagegen immer dichter und dichter.

Fig. 666.



1) Die Verdünnungspumpe. Ist V der Recipientenraum, bis zum Hahne H gemessen, ferner V_1 der schädliche Raum, von H bis tiefsten Kolbenstande gerechnet, und bezeichnet C den vom Kolben K durchlaufenen Raum, welcher auch durch das Product Fs von Kolbenfläche F und Kolbenweg s gemessen wird, so geht, nach dem Mariotte'schen Gesetze, die Pressung b der anfangs im Recipienten eingeschlossenen Luft, am Ende des Kolbenschubes in die Pressung:

$$b_1 = \left(\frac{V + V_1}{V + V_1 + C}\right) b \text{ über.}$$

Da beim Rückgange des Kolbens der schädliche Raum mit Luft von der äußeren Pressung b gefüllt bleibt, so ist ferner für die Pressung b_2 der Luft im Recipienten am Ende des zweiten Zuges:

$$(V + V_1 + C)\, b_2 = V b_1 + V_1 b$$
$$= \frac{V^2 b}{V + V_1 + C} + \frac{V V_1 b}{V + V_1 + C} + V_1 b, \text{ daher}$$
$$b_2 = \left(\frac{V}{V + V_1 + C}\right)^2 b + \frac{V V_1 b}{(V + V_1 + C)^2} + \frac{V_1 b}{V + V_1 + C}.$$

Ebenso ist für die Spannung b_3 am Ende des dritten Zuges

$$(V + V_1 + C)\, b_3 = V b_2 + V_1 b, \text{ und daher}$$
$$b_3 = \left(\frac{V}{V + V_1 + C}\right)^3 b + \frac{V^2 V_1 b}{(V + V_1 + C)^3} + \frac{V V_1 b}{(V + V_1 + C)^2}$$
$$+ \frac{V_1 b}{V + V_1 + C} = \left(\frac{V}{V + V_1 + C}\right)^3 b + \left[\left(\frac{V}{V + V_1 + C}\right)^2 + \frac{V}{V + V_1 + C} + 1\right] \frac{V_1 b}{V + V_1 + C},$$

und es läßt sich hiernach leicht ermessen, daß die Pressung b_n am Ende des n ten Zuges,

$$b_n = \left(\frac{V}{V + V_1 + C}\right)^n b$$
$$+ \left[\left(\frac{V}{V + V_1 + C}\right)^{n-1} + \left(\frac{V}{V + V_1 + C}\right)^{n-2} + \cdots + 1\right] \frac{V_1 b}{V + V_1 + C}$$

zu setzen ist.

Bezeichnet man $\frac{V}{V + V_1 + C}$ durch p, und $\frac{V_1}{V + V_1 + C}$ durch q, so hat man hiernach:

$$b_n = p^n b + (1 + p + p^2 + \cdots + p^{n-1})\, q b,$$

oder, da die Summe der in der Parenthese eingeschlossenen geometrischen Reihe, $= \frac{p^n - 1}{p - 1} = \frac{1 - p^n}{1 - p}$ ist (s. „Ingenieur" Seite 82), so folgt einfach die gesuchte **Endpressung**:

$$b_n = \left[p^n + \left(\frac{1 - p^n}{1 - p}\right) q\right] b.$$

Für $n = \infty$ fällt $p^n = 0$, und folglich die möglich **kleinste Spannung** $b_n = \frac{q b}{1 - p} = \frac{V_1 b}{C + V_1}$ aus.

2) **Die Verdichtungspumpe.** Gelten dieselben Bezeichnungen wie für die Verdünnungspumpe, so hat man hier für die Luftpressung b_1 am Ende des ersten Schubes:

$$(V + V_1)\, b_1 = (V + V_1 + C)\, b, \text{ daher } b_1 = \left(\frac{V + V_1 + C}{V + V_1}\right) b;$$

ferner für die Pressung b_2 am Ende des zweiten Schubes:

$$(V + V_1)\, b_2 = V b_1 + (V_1 + C)\, b, \text{ daher}$$

$$b_2 = \frac{(V + V_1 + C)\, V b}{(V + V_1)^2} + \frac{V_1 + C}{V + V_1} b$$

$$= \left(\frac{V}{V + V_1}\right)^2 b + \left(\frac{V}{V + V_1} + 1\right) \frac{V_1 + C}{V + V_1} b.$$

Ebenso folgt für die Pressung am Ende des dritten Schubes:

$$(V + V_1)\, b_3 = V b_2 + (V_1 + C)\, b, \text{ und daher}$$

$$b_3 = \left(\frac{V}{V + V_1}\right)^3 b + \left[\left(\frac{V}{V + V_1}\right)^2 + \frac{V}{V + V_1} + 1\right] \frac{V_1 + C}{V + V_1} b,$$

oder, wenn man

$$\frac{V}{V + V_1} = p_1 \text{ und } \frac{V_1 + C}{V + V_1} = q_1 \text{ setzt,}$$

$$b_3 = [p_1^3 + (1 + p_1 + p_1^2)\, q_1]\, b.$$

Allgemein hat man die Pressung am Ende des $n$ten Kolbenspieles:

$$b_n = [p_1^n + (1 + p_1 + p_1^2 + \cdots + p_1^{n-1})\, q_1]\, b, \text{ oder da}$$

$$1 + p_1 + p_1^2 + \cdots + p_1^{n-1} = \frac{p_1^n - 1}{p_1 - 1} = \frac{1 - p_1^n}{1 - p_1} \text{ ist,}$$

$$b_n = \left[p_1^n + \left(\frac{1 - p_1^n}{1 - p_1}\right) q_1\right] b.$$

Für $n = \infty$, wo $p_1^n = 0$ ist, stellt sich

$$b_n = \frac{q\, b_1}{1 - p_1} = \frac{V_1 + C}{V_1} b$$

heraus. Dies ist natürlich auch die größte Spannung, welche durch diese Compressionspumpe erzeugt werden kann.

Wäre der schädliche Raum also $V_1 =$ Null, so hätte man bei der Verdünnnungspumpe $q = 0$, daher:

$$b_n = p^n b = \left(\frac{V}{V + C}\right)^n p;$$

dagegen bei der Verdichtungspumpe $p_1 = 1$ und $\frac{1 - p_1^n}{1 - p_1} = n$, folglich:

$$b_n = (1 + n q_1)\, b = \left(1 + n \frac{C}{V}\right) b.$$

Beispiel. Wenn bei einer Luftpumpe der Recipient das Volumen $V = 1000$ Cubikzoll und der schädliche Raum die Größe von 10 Cubikzoll einnimmt, während der Cylinderraum 300 Cubikzoll mißt, so ist die Spannung der eingeschlossenen Luft nach 20 Spielen:

1) beim Verdünnen, da

$$p = \frac{1000}{1310} = 0{,}76336 \text{ und}$$

$$q = \frac{10}{1310} = \frac{1}{131} = 0{,}0076336 \text{ mißt,}$$

$$b_n = b_{20} = \left(0{,}76336^{20} + \frac{1 - 0{,}76336^{20}}{1 - 0{,}76336} \cdot 0{,}0076336\right) b$$
$$= (0{,}0045143 + 0{,}0321126)\, b = 0{,}076269\, b;$$ dagegen

2) beim Verdichten, wo

$$p_1 = \frac{1000}{1010} = 0{,}99010$$ und

$$q_1 = \frac{310}{1010} = 0{,}30693$$ ist,

$$b_n = b_{20} = \left(0{,}9901^{20} + \frac{1 - 0{,}9901^{20}}{1 - 0{,}9901} \cdot 0{,}30693\right) b$$
$$= \left(0{,}81954 + \frac{0{,}18046}{0{,}009901} \cdot 0{,}30693\right) b = 6{,}414\, b.$$

§. 392 **Gay-Lussac'sches Gesetz.** Einen wesentlichen Einfluß auf die Dichtigkeit und Expansivkraft der Gase hat die Wärme oder Temperatur derselben. Je mehr die in einem Gefäße eingeschlossene Luft erwärmt wird, desto größer zeigt sich auch die Expansivkraft derselben, und je mehr die Temperatur der in einem Gefäße durch einen Kolben abgeschlossenen Luft erhöht wird, desto mehr dehnt sich auch die Luft aus und schiebt den Kolben auswärts. Versuche von Gay-Lussac, welche in neueren Zeiten von Rudberg, Magnus und Regnault wiederholt worden sind, haben ergeben, daß bei gleicher Dichtigkeit die Expansivkraft, und bei gleicher Expansivkraft das Volumen einer und derselben Luftmenge wie die Temperatur wächst. Man kann dieses Gesetz dem Mariotte'schen an die Seite setzen, und es zur Unterscheidung das Gay-Lussac'sche Gesetz nennen. Nach den neuesten Versuchen nimmt die Expansivkraft eines gewissen Luftvolumens bei Erwärmung vom Frost- bis Siedepunkt um 0,367 ihres anfänglichen Werthes zu, oder es wächst bei dieser Temperaturerhöhung das Volumen einer gewissen Luftmasse bei unveränderlicher Spannung um 36,7 Procent. Giebt man die Temperatur nach Centesimalgraden an, deren der Raum zwischen Frost- und Siedepunkt 100 enthält, so folgt die Ausdehnung auf jeden Grad, $= 0{,}00367$ und auf t^0 Temperatur, $= 0{,}00367 \,.\, t$; bedient man sich dagegen der Réaumur-schen Grade, von denen 80 auf den Abstand zwischen dem Frost- und Siedepunkt gehen, so hat man die Ausdehnung auf jeden Grad 0,00459, also für $t^0 = 0{,}00459 \,.\, t$.

Diese Verhältnißzahl oder der sogenannte Ausdehnungscoefficient $\delta = 0{,}00367$, gilt eigentlich nur für die atmosphärische Luft; den übrigen Gasen entsprechen meist wenig größere Werthe, auch nimmt selbst bei der atmosphärischen Luft dieser Coefficient mit der Temperatur wenig zu.

Wird eine Luftmasse vom anfänglichen Volumen V_0 und von der Temperatur Null um t Grad erwärmt, ohne eine andere Spannung anzunehmen, so ist das neue Volumen:

$$V = (1 + 0{,}00367\, t)\, V_0,$$

und erhält es die Temperatur t_1, so entsteht das Volumen:

$$V_1 = (1 + 0{,}00367\ t_1)\ V_0,$$

und es folgt durch Division das Volumenverhältniß:

$$\frac{V}{V_1} = \frac{1 + 0{,}00367\ t}{1 + 0{,}00367\ t_1},$$

dagegen das entsprechende Dichtigkeitsverhältniß:

$$\frac{\gamma}{\gamma_1} = \frac{V_1}{V} = \frac{1 + 0{,}00367\ t_1}{1 + 0{,}00367\ t},$$

oder allgemein:

$$\frac{\gamma}{\gamma_1} = \frac{V_1}{V} = \frac{1 + \delta t_1}{1 + \delta t}.$$

Geht außerdem noch eine Veränderung in der Spannung vor, ist p_0 die Spannung bei Null, p die bei t, und p_1 die bei t_1 Wärme, so hat man:

$$V = (1 + 0{,}00367\ t) \frac{p_0}{p} V_0,$$

ferner:

$$V_1 = (1 + 0{,}00367\ t_1) \frac{p_0}{p_1} V_0,$$

$$\frac{V}{V_1} = \frac{1 + 0{,}00367\ t}{1 + 0{,}00367\ t_1} \cdot \frac{p_1}{p} \text{ und}$$

$$\frac{\gamma}{\gamma_1} = \frac{1 + 0{,}00367\,.\,t_1}{1 + 0{,}00367\,.\,t} \cdot \frac{p}{p_1}, \text{ oder:}$$

$$\frac{\gamma}{\gamma_1} = \frac{1 + 0{,}00367\,.\,t_1}{1 + 0{,}00367\,.\,t} \cdot \frac{b}{b_1}, \text{ sowie}$$

$$\frac{p}{p_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{1 + 0{,}00367\,t}{1 + 0{,}00367\,t_1} \cdot \frac{\gamma}{\gamma_1}.$$

Beispiel. Wenn eine Luftmasse von 800 Cubikfuß Inhalt, 15 Pfd. Spannkraft und 10 Grad Wärme, durch das Gebläse und durch den Erwärmungsapparat eines Hohofens in eine Spannung von 19 Pfd. und in eine Temperatur von 200 Grad versetzt wird, so nimmt sie zuletzt das größere Volumen:

$$V_1 = \frac{1 + 0{,}00367\,.\,200}{1 + 0{,}00367\,.\,10} \cdot {}^{15}/_{19} \,.\, 800 = \frac{1{,}734}{1{,}0367} \cdot \frac{12000}{19} = 1056 \text{ Cubikfuß an.}$$

Anmerkung. Die Formel:

$$\frac{\gamma}{\gamma_1} = \frac{V_1}{V} = \frac{1 + \delta t_1}{1 + \delta t}$$

läßt sich auf feste und einige liquide Körper anwenden, nur ist hierin für jeden festen Stoff ein besonderes Ausdehnungsverhältniß einzuführen; z. B.

für Gußeisen: $\delta = 0{,}0000336$,
für Glas: $\delta = 0{,}0000258$,
für Quecksilber: $\delta = 0{,}0001802$.

Dichtigkeit der Luft. Mit Hülfe der Formel am Ende des vorigen Paragraphen läßt sich nun auch die einer gegebenen Temperatur und Spannung der Luft entsprechende Dichtigkeit γ berechnen. Durch neuere Wägungen und Messungen von Seiten Regnault's hat man das Gewicht von einem Cubikmeter atmosphärische Luft bei Null Grad Wärme und 0,76 Meter Barometerstand, = 1,2935 Kilogramm gefunden. Da ein Cubikfuß (preuß.) = 0,030916 Cubikmeter und 1 Kilogramm = 2,0 Neupfund ist, so beträgt bei den angegebenen Verhältnissen, die Dichtigkeit der Luft

$$= 2 . 0{,}030916 . 1{,}2935 = 0{,}07998 \text{ Pfund.}$$

§. 393

Ist nun die Temperatur = t^0 Cent., so folgt die Dichtigkeit, für das französische Maß:

$$\gamma = \frac{1{,}2935}{1 + 0{,}00367\, t} \text{ Kilogramm,}$$

und für das preußische Maß:

$$\gamma = \frac{0{,}07998}{1 + 0{,}00367 . t} \text{ Pfund.}$$

Weicht auch noch die Expansivkraft von der mittleren ab, ist also der Barometerstand nicht 0,76 Meter, sondern b, so erhält man:

$$\gamma = \frac{1{,}2935}{1 + 0{,}00367 . t} . \frac{b}{0{,}76} = \frac{1{,}702 . b}{1 + 0{,}00367\, t} \text{ Kilogramm,}$$

oder wenn man, wie in Deutschland gewöhnlich, b in Pariser Zoll giebt, da 0,76 Meter = 28,075 Zoll ist:

$$\gamma = \frac{0{,}07998}{1 + 0{,}00367 . t} . \frac{b}{28{,}075} = \frac{0{,}002849 . b}{1 + 0{,}00367\, t} \text{ Pfund.}$$

Sehr oft drückt man aber auch die Expansivkraft durch den Druck p auf das Quadratcentimeter oder auf den Quadratzoll aus, deshalb ist dann der Factor $\frac{p}{1{,}0336}$ oder $\frac{p}{14{,}10}$ einzuführen, und es folgt so:

$$\gamma = \frac{1{,}2935}{1 + 0{,}00367 . t} . \frac{p}{1{,}0336} = \frac{1{,}2514\, p}{1 + 0{,}00367\, t} \text{ Kilogramm}$$

oder:

$$\gamma = \frac{0{,}07998}{1 + 0{,}00367 . t} . \frac{p}{14{,}10} = \frac{0{,}005672\, p}{1 + 0{,}00367 . t} \text{ Pfund.}$$

Bei gleicher Temperatur und Expansivkraft ist die Dichtigkeit des Wasserdampfes nahe $^5/_8$ von der Dichtigkeit der atmosphärischen Luft, weshalb man für Wasserdampf

$$\gamma = \frac{0{,}8084}{1 + 0{,}00367\, t} . \frac{p}{1{,}0336} = \frac{0{,}7821\, p}{1 + 0{,}00367\, t} \text{ Kilogramm}$$

oder

$$\gamma = \frac{0,04999}{1 + 0,00367 . t} \cdot \frac{p}{14,10} = \frac{0,003539\, p}{1 + 0,00367\, t} \text{ Pfund}$$

erhält.

Beispiele. 1) Welches Gewicht hat der in einem cylindrischen Regulator von 40 Fuß Länge und 6 Fuß Weite enthaltene Wind bei 10 Grad Wärme und 18 Pfund Pressung? Die Dichtigkeit dieses Windes ist:

$$\gamma = \frac{0,005672 . 18}{1,0367} = \frac{0,102096}{1,0367} = 0,09848 \text{ Pfund},$$

und der Fassungsraum des Regulatorkessels:

$$V = \pi . 3^2 . 40 = 1131 \text{ Cubikfuß},$$

daher wiegt die gedachte Windmasse:

$$V\gamma = 0,09848 . 1131 = 111,4 \text{ Pfund}.$$

2) Eine Dampfmaschine verbraucht in der Minute 500 Cubikfuß Dampf von 107^0 Wärme und 36 Pariser Zoll $= 0,5037 . 36 = 18,133$ Pfund Spannkraft; wie viel Pfund Wasser bedarf sie zur Erzeugung dieser Dampfmenge? Die Dichtigkeit dieses Dampfes ist

$$= \frac{0,003539 . 18,133}{1 + 0,00367 . 107} = \frac{0,06417}{1,393} = 0,04607 \text{ Pfund},$$

daher das Gewicht von 500 Cubikfuß Dampf, oder das Gewicht der entsprechenden Wassermenge

$$V\gamma = 500 . 0,04607 = 23,035 \text{ Pfund}.$$

§. 394 **Luftmanometer.** Mit Hülfe der in den letzten Paragraphen gewonnenen Ergebnisse läßt sich nun auch die Theorie des Luftmanometers entwickeln. Dasselbe besteht aus einer gut calibrirten, oben mit Luft und unten mit Quecksilber angefüllten Barometerröhre AB, Fig. 667, und aus einem ebenfalls Quecksilber enthaltenden Gefäße CER, welches mit dem Gase oder Dampfe, dessen Spannkraft man wissen will, durch ein Rohr CE in Communication gesetzt wird. Aus den Höhen der Luft- und Quecksilbersäulen in AB läßt sich diese Spannkraft wie folgt berechnen. Gewöhnlich ist das Instrument so eingerichtet, daß das Quecksilber in der Röhre mit dem Quecksilber im Gefäße auf gleiche Höhe steht, wenn die Temperatur der eingeschlossenen Luft, $t = 10$ Grad und die Spannung im Raume ER dem mittleren Atmosphärendrucke $b = 0,76$ Meter oder 28 Zoll gleich ist.

Fig. 667.



Ist aber beim Barometerstande b, im Raume ER eine Quecksilbersäule h_1 in die Röhre gestiegen und die Länge AS der übrig bleibenden Luftsäule, $= h_2$, so hat man die Spannung derselben

$$z = \left(\frac{h_1 + h_2}{h_2}\right) b,$$

und daher den Barometerstand der Luft in ER:

$$b_1 = h_1 + z = h_1 + \left(\frac{h_1 + h_2}{h_2}\right) b.$$

Findet noch ein Temperaturwechsel statt, ist die Temperatur bei der Beobachtung von h_1 und h_2 nicht wie anfänglich, $= t$, sondern $= t_1$, so hat man die Spannung der Luftsäule AS:

$$z = \frac{1 + 0{,}00367 \, . \, t_1}{1 + 0{,}00367 \, . \, t} \cdot \left(\frac{h_1 + h_2}{h_2}\right) . \, b,$$

und daher den in Frage stehenden Barometerstand:

$$b_1 = h_1 + \frac{1 + 0{,}00367 \, . \, t_1}{1 + 0{,}00367 \, . \, t} \cdot \left(\frac{h_1 + h_2}{h_2}\right) \cdot b.$$

Für $b = 28$ Zoll (Paris.) und $t = 10^0$ C. folgt:

$$b_1 = h_1 + 27 \; (1 + 0{,}00367 \; t_1) \; \frac{h}{h_2},$$

wobei noch $h = h_1 + h_2$ die ganze Röhrenlänge, vom oberen Ende A bis zum Quecksilberspiegel HR gemessen, bezeichnet.

Aus dem Barometerstande b_1 Zoll folgt die Pressung auf den Quadratzoll (preuß.):

$$p_1 = \frac{14{,}10}{28} \, h_1 + 14{,}10 \, . \, {}^{27}/_{28} \; (1 + 0{,}00367 \; t_1) \; \frac{h}{h_2}$$

$$= 0{,}5037 \; h_1 + 13{,}60 \; (1 + 0{,}00367 \; t_1) \; \frac{h}{h_2} \text{ Pfund.}$$

Setzt man $\dfrac{1 + \delta t_1}{1 + \delta t} = \mu$, so folgt

$$(b_1 - h_1)\,(h - h_1) = \mu h b, \text{ und daher}$$

$$h_1 = \frac{b_1 + h}{2} + \sqrt{\left(\frac{b_1 + h}{2}\right)^2 + (\mu b - b_1) h}.$$

Nach dieser Formel läßt sich eine Scala berechnen, an welcher man die Pressung b_1 durch die Manometerhöhe angegeben abliest.

Beispiel. Wenn ein Luftmanometer von 25 Zoll Länge bei 21^0 Wärme eine Luftsäule von 12 Zoll Länge zeigt, so ist der entsprechende Barometerstand:

$$b_1 = 25 - 12 + 27 \; (1 + 0{,}00367 \, . \, 21) \, . \, {}^{25}/_{12} = 13 + 9 \, . \, 1{,}07707 \, . \, {}^{25}/_{4}$$
$$= 13 + 60{,}58 = 73{,}58 \text{ Zoll,}$$

und der Druck auf einen Quadratzoll

$$p_1 = 0{,}5037 \, . \, 73{,}58 = 3706 \text{ Pfund.}$$

Auftrieb der Luft. Das aus §. 364 bekannte Gesetz vom Auftriebe des Wassers gegen die in dasselbe eingetauchten festen Körper läßt sich natür- §. 395

lich auch auf die in der Luft befindlichen Körper anwenden. Ist V das Volumen dieses Körpers und γ die Dichtigkeit der Luft, worin sich derselbe befindet, so beträgt, diesem Gesetze zufolge, der Auftrieb $P = V\gamma$; hat folglich der Körper das scheinbare Gewicht G (in der Luft), so ist sein wahres Gewicht (im luftleeren Raume):

$$G_1 = G + V\gamma.$$

Ist ferner γ_1 die Dichtigkeit dieses Körpers, so hat man auch:

$$G_1 = V\gamma_1, \text{ daher:}$$

$$V = \frac{G_1}{\gamma_1}, \text{ so daß nun:}$$

$$G_1 = G + \frac{G_1\gamma}{\gamma_1}, \text{ oder } G_1(\gamma_1 - \gamma) = G\gamma_1, \text{ also:}$$

$$G_1 = \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_1 - \gamma}\right) G \text{ folgt.}$$

Wird der Körper an der Wage durch ein Gewichtsstück G_2 gewogen, dessen Dichtigkeit γ_2 ist, so gilt für dasselbe die Gleichung:

$$G_2 = \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_2 - \gamma}\right) G,$$

und es folgt endlich mittels Division der letzten Gleichungen durch einander das Gewichtsverhältniß

$$\frac{G_1}{G_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \cdot \frac{\gamma_2 - \gamma}{\gamma_1 - \gamma} = \frac{1 - \frac{\gamma}{\gamma_2}}{1 - \frac{\gamma}{\gamma_1}},$$

oder annähernd und meist genügend scharf:

$$\frac{G_1}{G_2} = 1 + \frac{\gamma}{\gamma_1} - \frac{\gamma}{\gamma_2} = 1 + \gamma\left(\frac{1}{\gamma_1} - \frac{1}{\gamma_2}\right),$$

oder auch:

$$\frac{G_1}{G_2} = 1 + \varepsilon\left(\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\varepsilon_2}\right),$$

wenn ε, ε_1 und ε_2 die specifischen Gewichte der Luft, des abgewogenen Körpers und der Gewichtsmasse bezeichnen.

In vielen Fällen der Anwendung sind $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}$ und $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_2}$ so kleine Brüche, daß man sie ganz außer Acht und das wahre Gewicht (G_1) dem scheinbaren Gewichte G gleichsetzen kann.

Anmerkung. Das Gesetz vom Auftriebe der Luft findet auch noch seine Anwendung bei der Bestimmung der Steigkraft und Steighöhe eines Luftballons (franz. aérostat; engl. air-balloon) AB, Fig. 668. Ist V das Volumen des Ballons, G das ganze scheinbare Gewicht desselben sammt Schiff u. s. w., γ_1 die Dichtigkeit der äußeren und γ_2 die der eingeschlossenen Luft, so hat man den Auftrieb:

$$P = V\gamma_1 = V\gamma_2 + G,$$

und daher:

$$V(\gamma_1 - \gamma_2) = G,$$

also z. B. den nöthigen Fassungsraum des Ballons:

$$V = \frac{G}{\gamma_1 - \gamma_2},$$

Fig. 668.



und die Dichtigkeit der äußeren Luft beim höchsten Stande des Ballons:

$$\gamma_1 = \gamma_2 + \frac{G}{V}.$$

Aus dieser Dichtigkeit läßt sich noch mittels der in §. 389 gefundenen Formel:

$$s = \frac{p}{\gamma} Log. nat. \left(\frac{b}{b_1}\right) = \frac{p}{\gamma} Log. nat. \left(\frac{\gamma}{\gamma_1}\right)$$

die größte Steighöhe s des Ballons bestimmen, wenn wir hierin für γ die nach § 393 zu bestimmende Dichtigkeit der Luft am Anfangspunkte einsetzen.

Beispiel 1. Wie verhält sich das wahre Gewicht des trockenen Nadelholzes zum scheinbaren Gewichte desselben, wenn das letztere mittels Messinggewichte bei 0 Grad Wärme und 27 Zoll Barometerstand bestimmt worden ist. Die Dichtigkeit der Luft ist nach §. 393:

$$\gamma = 0{,}002849 \,.\, 27 = 0{,}07692 \text{ Pfund},$$

die des Holzes:

$$\gamma_1 = 0{,}453 \,.\, 61{,}74,$$

und des Messings:

$$\gamma_2 = 8{,}55 \,.\, 61{,}74 \text{ (s. §. 61)},$$

folglich das gesuchte Gewichtsverhältniß:

$$\frac{G_1}{G_2} = 1 + \frac{0{,}07692}{61{,}74} \cdot \left(\frac{1}{0{,}453} - \frac{1}{8{,}55}\right) = 1 + 0{,}001246 \,.\, 2{,}091 = 1{,}00261.$$

Es verlieren also hiernach 1000 Pfund Holz durch den Auftrieb der Luft ungefähr $2\frac{2}{3}$ Pfund an Gewicht.

Beispiel 2. Wenn ein Luftballon eine Kugel von $d = 30$ Fuß Durchmesser bildet, die Füllung derselben die Dichtigkeit $\gamma_1 = 0{,}017$ Pfund hat und das Gewicht des ganzen Ballons sammt Schiff und Last, $G = 500$ Pfund beträgt, so ist die Dichtigkeit der äußeren Luft an der Stelle, wo das Luftschiff zu steigen aufhört:

$$\gamma_1 = \gamma_2 + \frac{G}{V} = \gamma_2 + \frac{6\,G}{\pi\, d^3} = 0{,}017 + \frac{3000}{\pi \,.\, 30^3} = 0{,}017 + 0{,}03537$$
$$= 0{,}05237 \text{ Pfund}.$$

Ist nun die Dichtigkeit der äußeren Luft am Fußpunkte, $\gamma = 0{,}0800$ Pfund, so hat man:

$$Log. nat. \left(\frac{\gamma}{\gamma_1}\right) = Log. nat. \left(\frac{8000}{5237}\right) = 0{,}4948,$$

und nimmt man noch das Verhältniß des Druckes per Quadratfuß zur Dichtigkeit γ der Luft, d. i. $\frac{p}{\gamma} = 25393$ an, so erhält man die größte Steighöhe dieses Luftschiffes:

$$s = \frac{p}{\gamma} Log. nat. \left(\frac{\gamma}{\gamma_1}\right) = 25393 \,.\, 0{,}4948 = 12564 \text{ Fuß}.$$

Siebenter Abschnitt.

Dynamik flüssiger Körper.

Erstes Capitel.

Die allgemeinen Lehren über den Ausfluß des Wassers aus Gefäßen.

§. 396 **Ausfluss.** Die Lehre vom Ausflusse (franz. écoulement; engl. efflux) der Flüssigkeiten aus Gefäßen macht den ersten Haupttheil der Hydrodynamik aus. Wir unterscheiden zuerst den Ausfluß des Wassers und den Ausfluß der Luft, und dann noch den Ausfluß bei veränderlichem und den bei unveränderlichem Drucke von einander. Zunächst ist von dem Ausflusse des Wassers unter constantem Drucke die Rede. Als constant läßt sich der Druck des Wassers annehmen, wenn von einer Seite eben soviel Wasser zutritt, als auf einer anderen Seite ausfließt, oder wenn die in einer gewissen Zeit ausfließende Wassermenge in Beziehung auf den Fassungsraum des Gefäßes sehr klein ist. Die Hauptaufgabe, um deren Lösung es sich hier handelt, ist die Bestimmung der Wassermenge (franz. dépense; engl. discharge), welche unter gegebenem Drucke in einer bestimmten Zeit durch eine gegebene Oeffnung (franz. orifice; engl. aperture) ausfließt.

Ist die in jeder Secunde ausfließende Wassermenge $= Q$, so hat man für die im Laufe von t Secunden unter unveränderlichem Drucke ausfließende Wassermenge:

$$V = Qt.$$

Um aber die Ausflußmenge pro Secunde zu erhalten, ist es nöthig, die Größe der Oeffnung und die Geschwindigkeit der ausfließenden Wasserelemente zu kennen. Der Einfachheit der Untersuchung wegen nehmen wir zunächst an, daß die Wasserelemente in geraden und parallelen Linien ausströmen und

deshalb einen prismatischen **Wasserstrahl** (franz. veine, courant de fluide; engl. stream of the fluid) bilden. Ist nun F der **Querdurchschnitt** des Wasserstrahls und v die Geschwindigkeit des Wassers oder eines jeden Wasserelementes, so bildet die Ausflußmenge pro Secunde ein Prisma von der Basis F und Höhe v, es ist also:

$$Q = Fv \text{ Raumeinheiten}$$

und

$$G = Fv\gamma \text{ Gewichtseinheiten,}$$

wofern γ die Dichtigkeit des Wassers oder der ausströmenden Flüssigkeit bezeichnet.

Beispiele. 1) Wenn durch eine Schutzöffnung von 1,7 Quadratfuß das Wasser mit 14 Fuß Geschwindigkeit ausfließt, so beträgt die Wassermenge pro Secunde:

$$Q = 14 \,.\, 1{,}7 = 23{,}8 \text{ Cubikfuß,}$$

und daher die stündlich ausfließende Wassermenge

$$= 23{,}8 \,.\, 3600 = 85680 \text{ Cubikfuß.}$$

2) Wenn durch eine Mündung von 5 Quadratzoll in 3 Minuten 10 Secunden 264 Cubikfuß Wasser ausgeflossen sind, so betrug die mittlere Ausflußgeschwindigkeit:

$$v = \frac{V}{Ft} = \frac{264}{\frac{5}{144} \cdot 190} = \frac{264 \,.\, 144}{5 \,.\, 190} = 40 \text{ Fuß.}$$

§. 397 **Ausflussgeschwindigkeit.** Denken wir uns ein mit Wasser angefülltes Gefäß AC, Fig. 669, mit einer innen abgerundeten horizontalen Ausmündung F, welche nur einen sehr kleinen Theil von der Oberfläche HR des Wassers einnimmt. Setzen wir die während des Ausflusses als unveränderlich anzusehende **Druckhöhe** FG (franz. charge d'eau; engl. height of water) $= h$, die Ausflußgeschwindigkeit $= v$, und die in jeder Secunde ausfließende Wassermenge $= Q$, also ihr Gewicht $= Q\gamma$. Die mechanische Arbeit, welche diese Wassermasse beim Herabsinken von der Höhe h zu verrichten vermag, ist $= Qh\gamma$, und die mechanische Arbeit, welche die ausfließende Masse $Q\gamma$ in sich aufnimmt, indem sie aus der Ruhe in die Geschwindigkeit v übergeht, ist $\frac{v^2}{2g} Q\gamma$ (§. 74). Findet nun ein Arbeitsverlust beim Durchgange durch die Oeffnung nicht statt, so sind beide Arbeiten einander gleich, es ist also $hQ\gamma = \frac{v^2}{2g} Q\gamma$, d. i.:

Fig. 669.

$$h = \frac{v^2}{2g}$$

und umgekehrt,

$$v = \sqrt{2gh},$$

in Metermaß:

$$h = 0{,}0510\, v^2, \text{ und } v = 4{,}429 \sqrt{h},$$

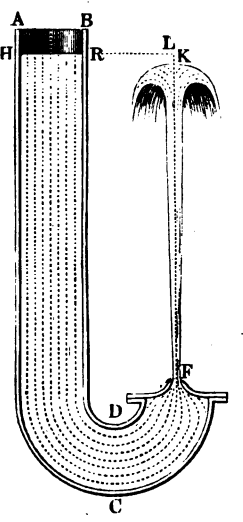
dagegen in Fußmaß:

$$h = 0{,}016\, v^2, \text{ und } v = 7{,}906 \sqrt{h}.$$

Es ist also die Geschwindigkeit des ausfließenden Wassers so groß wie die Endgeschwindigkeit eines von der Druckhöhe frei herabfallenden Körpers.

Die Richtigkeit dieses Gesetzes läßt sich auch durch folgenden Versuch erweisen. Wenn man im Gefäße ACF, Fig. 670, eine nach oben gerichtete Oeffnung anbringt, so steigt der Wasserstrahl FK vertical in die Höhe und erreicht beinahe das Niveau HR des Wassers im Gefäße, und es läßt sich annehmen, daß er es vollkommen erreichen würde, wenn alle Hindernisse, wie z. B. Widerstand der Luft, Reibung an den Gefäßwänden, Störung durch das zurückfallende Wasser u. s. w. beseitigt wären. Da aber ein auf eine senkrechte Höhe h aufsteigender Körper die Anfangsgeschwindigkeit

Fig. 670.



$$v = \sqrt{2gh}$$

hat (§. 15), so folgt hiernach auch, daß die Ausflußgeschwindigkeit

$$v = \sqrt{2gh}$$

sein muß.

Für eine andere Druckhöhe h_1 ist die Ausflußgeschwindigkeit

$$v_1 = \sqrt{2gh_1},$$

man hat daher:

$$v : v_1 = \sqrt{h} : \sqrt{h_1};$$

es verhalten sich also die Ausflußgeschwindigkeiten einer und derselben Flüssigkeit wie die Quadratwurzeln aus den Druckhöhen.

Beispiele. 1) Die Wassermenge, welche in jeder Secunde durch eine 10 Quadratzoll große Oeffnung unter dem Drucke von 5 Fuß ausströmt, ist:

$$Q = Fv = 10 \,.\, 12\sqrt{2gh} = 120 \,.\, 7{,}906\sqrt{5} = 948{,}7 \,.\, 2{,}236 = 2121 \text{ Cubikzoll.}$$

2) Damit durch eine Oeffnung von 6 Quadratzoll in der Secunde 252 Cubikzoll Wasser ausfließen, ist die Druckhöhe

$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{1}{2g}\left(\frac{Q}{F}\right)^2 = \frac{0{,}016}{12} \cdot \left(\frac{252}{6}\right)^2 = \frac{0{,}004}{3} \cdot 42^2 = 2{,}35 \text{ Zoll}$$

nöthig.

Zu- und Ausflussgeschwindigkeit. Wenn das Wasser mit einer gewissen Geschwindigkeit c zufließt, so kommt zur Arbeit $h \,.\, Q\gamma$ noch die der Geschwindigkeitshöhe $h_1 = \frac{c^2}{2g}$ entsprechende und dem zufließenden Wasser innewohnende Arbeit $\frac{c^2}{2g} Q\gamma$ hinzu, weshalb nun zu setzen ist: §. 398

$$(h + h_1)\, Q\gamma = \frac{v^2}{2g} Q\gamma, \text{ oder } h + h_1 = \frac{v^2}{2g},$$

und daher die Ausflußgeschwindigkeit:

$$v = \sqrt{2g\,(h + h_1)} = \sqrt{2gh + c^2}.$$

Da bei einem beständig voll erhaltenen Gefäße die zufließende Wassermasse ebenso groß ist, wie die ausfließende Masse Q, so läßt sich $Gc = Fv$ setzen, wofern G den Inhalt des Querschnittes HR (Fig. 669) vom zuströmenden Wasser bezeichnet. Setzen wir hiernach $c = \frac{F}{G} v$, so erhalten wir:

$$h = \frac{v^2}{2g} - \left(\frac{F}{G}\right)^2 \frac{v^2}{2g} = \left[1 - \left(\frac{F}{G}\right)^2\right] \frac{v^2}{2g},$$

und daher:

$$v = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1 - \left(\frac{F}{G}\right)^2}}.$$

Dieser Formel zufolge nimmt die Geschwindigkeit um so mehr zu, je größer das Querschnittsverhältniß $\frac{F}{G}$ ist, nach ihr fällt ferner die Geschwindigkeit am kleinsten, nämlich $= \sqrt{2gh}$ aus, wenn der Querschnitt F der Ausflußöffnung sehr klein ist gegen den Querdurchschnitt G der Zuflußöffnung, und es nähert sich dieselbe immer mehr und mehr dem Unendlichen, je kleiner der Unterschied zwischen diesen Mündungen ist. Wenn $F = G$, also $\frac{F}{G} = 1$ ist, so fällt $v = \frac{\sqrt{2gh}}{0} = \infty$ und also auch $c = \infty$ aus. Dieser unendliche Werth ist so zu verstehen, daß bei einem bodenlosen Gefäße AC, Fig. 671, das Wasser mit einer unmeßbar großen Geschwindigkeit zu- und abfließen muß, damit der Wasserstrahl GF die Ausmündung CD ausfüllt. Setzt man $v = \frac{Gc}{F}$ ein, so erhält man:

Fig. 671.

$$h = \left[\left(\frac{G}{F}\right)^2 - 1\right] \frac{c^2}{2g}, \text{ daher } F = \frac{G}{\sqrt{1 + \frac{2gh}{c^2}}},$$

welcher Ausdruck anzeigt, daß der Querschnitt F des ausfließenden Strahles bei einer endlichen Zuflußgeschwindigkeit stets kleiner ist als der Querschnitt G des zufließenden Strahles, und daß er daher die Ausmündung gar nicht ausfüllt, wenn dieselbe größer ist als $\frac{G}{\sqrt{1 + \frac{2gh}{c^2}}}$.

Anmerkung. Die Richtigkeit der schon von Daniel Bernoulli aufgestellten Formel

$$v = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1 - \left(\frac{F}{G}\right)^2}}$$

ist später von Vielen in Zweifel gezogen worden; wie unbegründet aber die gemachten Ausstellungen sind, habe ich in der allgemeinen Maschinenencyklopädie von Hülsse, Artikel „Ausfluß", zu beweisen gesucht.

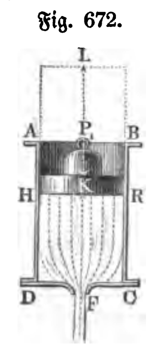
Beispiel. Wenn aus einem prismatischen Gefäße von 60 Quadratzoll Querschnitt das Wasser durch eine 5 Zoll weite kreisrunde Bodenöffnung bei einer Druckhöhe von 6 Fuß ausfließt, so ist die Geschwindigkeit:

$$v = \frac{7{,}906\sqrt{6}}{\sqrt{1 - \left(\frac{25\pi}{4.60}\right)^2}} = \frac{7{,}906 \,.\, 2{,}449}{\sqrt{1 - (0{,}327)^2}} = \frac{19{,}362}{\sqrt{0{,}8931}} = \frac{19{,}362}{0{,}945} = 20{,}49 \text{ Fuß}.$$

§. 399 Ausflussgeschwindigkeit, Druck und Dichtigkeit.

Die gefundenen Formeln gelten nur dann, wenn der Luftdruck auf den Wasserspiegel ebenso groß ist, wie der Druck der Luft gegen die Ausmündung; sind aber diese Drücke verschieden von einander, so bedürfen diese Formeln noch einer Ergänzung. Wird die Oberfläche HR, Fig. 672, durch einen Kolben K mit einer Kraft P_1 gedrückt, welcher Fall z. B. bei Feuerspritzen vorkommt, so denke man sich diese Kraft durch den Druck einer Wassersäule ersetzt. Ist h_1 die Höhe LK dieser Säule, und γ die Dichtigkeit der Flüssigkeit, so setze man also:

Fig. 672.



$$P_1 = G h_1 \gamma.$$

Führt man nun statt h die um $h_1 = \frac{P_1}{G\gamma}$ vergrößerte Druckhöhe

$$h + h_1 = h + \frac{P_1}{G\gamma}$$

ein, so bekommt man für die Ausflußgeschwindigkeit:

$$v = \sqrt{2g\left(h + \frac{P_1}{G\gamma}\right)},$$

wobei wir überdies $\frac{F}{G}$ sehr klein voraussetzen. Bezeichnen wir noch den Druck auf jede Flächeneinheit der Oberfläche G durch p_1, so haben wir einfacher:

$$\frac{P_1}{G} = p_1,$$

und daher:

$$v = \sqrt{2g\left(h + \frac{p_1}{\gamma}\right)}.$$

Bezeichnen wir endlich den Wasserdruck im Niveau der Ausmündung durch p, so können wir auch setzen:

$$p = \left(h + \frac{p_1}{\gamma}\right)\gamma,$$

also:

$$h + \frac{p_1}{\gamma} = \frac{p}{\gamma},$$

weshalb

$$v = \sqrt{2g\,\frac{p}{\gamma}}$$

folgt

Hiernach wächst also die Ausflußgeschwindigkeit wie die Quadratwurzel aus der Pressung auf die Flächeneinheit, und umgekehrt wie die Quadratwurzel aus der Dichtigkeit der Flüssigkeit. Bei gleichem Drucke fließt also z. B. die 4mal so schwere Flüssigkeit $^1/_2$mal so schnell aus, als die einfach schwere Flüssigkeit. Da die Luft 770mal so leicht als Wasser ist, so würde sie, wenn sie unelastisch wäre, unter gleichem Drucke $\sqrt{770} = 27^3/_4$mal so schnell ausfließen, als Wasser.

Diese Theorie findet auch ihre Anwendung auf die Fälle, wo das ausfließende Wasser noch durch eine andere Flüssigkeitssäule gedrückt wird. Steht über der Oberfläche HR des Wassers HEF in einem Gefäße ACD,

Fig. 673.

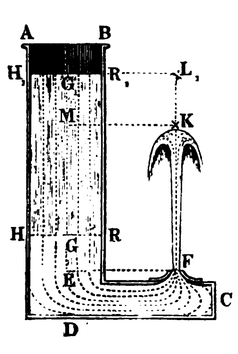


Fig. 673, noch eine Flüssigkeitssäule HR_1, deren Höhe $GG_1 = h_1$ und Dichtigkeit $= \gamma_1$ ist, während das Wasser die Dichtigkeit γ hat, so kann man dieselbe durch eine Wassersäule von der Höhe $\frac{\gamma_1}{\gamma} h_1$ ersetzen, ohne daß sich der Druck auf HR ändert und folglich auch die Geschwindigkeit v des durch die Mündung F fließenden Wassers eine andere wird. Ist folglich noch h die Druckhöhe EG des Wassers, d. i. die Höhe der Trennungsfläche HR über der Mündung F, so hat man folglich die Geschwindigkeitshöhe:

$$\frac{v^2}{2g} = h + \frac{\gamma_1}{\gamma} h_1,$$

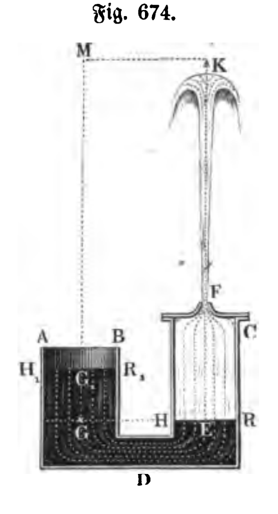
und daher:

$$v = \sqrt{2g\left(h + \frac{\gamma_1}{\gamma} h_1\right)}.$$

Ist nun $\gamma_1 < \gamma$, und also auch $h + \frac{\gamma_1}{\gamma} h_1 < h + h_1$, so reicht auch der senkrecht in die Höhe steigende Wasserstrahl FK nicht bis in das Niveau $H_1 R_1 L_1$ der Oberfläche der Flüssigkeit $H_1 R$.

Steht die Trennungsfläche HR, Fig. 674, nicht über, sondern um eine gewisse Höhe $EF = h$ unter der Mündung F des Ausflußgefäßes ADC, während die Oberfläche $H_1 R_1$ der Flüssigkeit $H_1 DR$ um die Höhe $GG_1 = h_1$ über der Trennungsfläche HR liegt, so hat man:

Fig. 674.



$$\frac{v^2}{2g} = \frac{\gamma_1}{\gamma} h_1 - h,$$

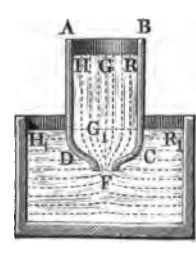
und daher die Ausflußgeschwindigkeit:

$$v = \sqrt{2g\left(\frac{\gamma_1}{\gamma} h_1 - h\right)}.$$

Dieser Fall setzt voraus, daß $\frac{\gamma_1}{\gamma} h_1 > h$, oder $\frac{h_1}{h} > \frac{\gamma}{\gamma_1}$ sei. Es ist hiernach leicht zu ermessen, daß in diesem Falle der emporsteigende Wasserstrahl FK über die Oberfläche $H_1 R_1$ der Flüssigkeit $H_1 DR$ steigen kann. Ist $GM = \frac{\gamma_1}{\gamma} h_1$ die auf Wasser reducirte Höhe der Flüssigkeit, so giebt M das Niveau an, welches der steigende Strahl fast erreicht.

Fließt das Wasser nicht frei, sondern unter Wasser aus, so tritt wegen des Gegendruckes eine Verminderung der Ausflußgeschwindigkeit ein. Ist die Mündung F des Gefäßes AC, Fig. 675, um die Höhe $FG = h$ unter dem Wasserspiegel HR des Oberwassers, und um die Höhe $FG_1 = h_1$ unter dem Wasserspiegel $H_1 R_1$ des Unterwassers, so hat man von oben nach unten die Pressung:

Fig. 675.



$$p = h\gamma,$$

und von unten nach oben die Gegenpressung:

$$p_1 = h_1 \gamma,$$

daher die Kraft des Ausflusses:

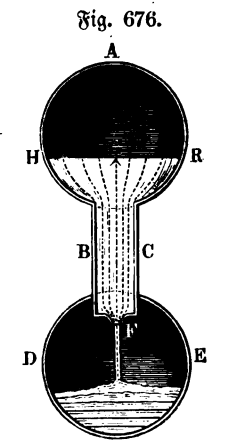
$$p - p_1 = (h - h_1)\,\gamma,$$

und die Ausflußgeschwindigkeit:

$$v = \sqrt{2g\left(\frac{p - p_1}{\gamma}\right)} = \sqrt{2g\,(h - h_1)}.$$

Beim Ausflusse unter Wasser ist also der Niveauabstand $h - h_1$ zwischen den Wasserspiegeln als Druckhöhe anzusehen.

Fig. 676.



Wird das Wasser auf der Seite der Ausmündung durch die Kraft p und auf der Seite der Einmündung oder des Wasserspiegels durch die Kraft p_1 gepreßt, so hat man nun allgemein:

$$v = \sqrt{2g\left(h + \frac{p_1 - p}{\gamma}\right)}.$$

Dieser Fall kommt z. B. vor, wenn das Wasser aus einem verschlossenen Gefäße ABC in ein anderes verschlossenes Gefäß DE, Fig. 676, fließt. Es ist hier h die Tiefe FG der Mündung F unter dem Wasserspiegel HR, p_1 die Pressung der Luft in AHR, und p die Pressung der Luft, oder, nach Befinden, des Dampfes, in DE.

Beispiele. Wenn der Kolben im 12 Zoll weiten Cylinder oder Stiefel einer Feuerspritze mit 3000 Pfund Kraft niedergedrückt wird und Hindernisse in den Röhren und Schläuchen nicht vorkämen, so würde das Wasser mit der Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{2g\frac{p_1}{\gamma}} = \sqrt{2g\frac{P_1}{G\gamma}} = 7{,}906\sqrt{\frac{3000}{\frac{\pi}{4}\cdot 66}}$$

$$= 7{,}906\,.\sqrt{\frac{2000}{11\,\pi}} = 60{,}14 \text{ Fuß}$$

durch das Mundstück am Schlauche ausströmen und, vertical gerichtet, auf die Höhe

$$h = 0{,}016\,.\,v^2 = 57{,}9 \text{ Fuß}$$

steigen.

2) Wenn das Wasser in einen luftverdünnten Raum einströmt, z. B. in den Condensator einer Dampfmaschine, während es von oben oder an seiner freien Oberfläche von der Atmosphäre gedrückt wird, so ist die letzte Formel

$$v = \sqrt{2g\left(h + \frac{p_1 - p}{\gamma}\right)}$$

für die Ausflußgeschwindigkeit in Anwendung zu bringen. Ist die Druckhöhe des Wassers $h = 3$ Fuß, der äußere Barometerstand 27 und der innere 4 Pariser Zoll, so hat man:

$$\frac{p_1 - p}{\gamma} = 27 - 4 = 23 \text{ Pariser Zoll} = \frac{23}{12}\cdot 1{,}035 = 1{,}9837 \text{ preuß. Fuß},$$

oder als Wassersäule

$$= 13{,}6\,.\,1{,}9837 = 26{,}98 \text{ Fuß},$$

und es folgt die Geschwindigkeit des in den inneren oder luftverdünnten Raum einströmenden Wassers:

$$v = 7{,}906 \sqrt{3 + 26{,}98} = 7{,}906 \sqrt{29{,}98} = 43{,}29 \text{ Fuß}.$$

3) Steht das Wasser in der Speiseröhre eines Dampfkessels 12 Fuß über der Oberfläche des Wassers im Kessel, und ist der Dampfdruck 20 Pfund, der Luftdruck aber nur 15 Pfund auf den Quadratzoll, so beträgt die Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser in den Kessel eintritt:

$$v = 7{,}906 \sqrt{12 + \frac{(15-20).144}{66}} = 7{,}906 \sqrt{12 - \frac{5.144}{66}}$$
$$= 7{,}906 \sqrt{1{,}0909} = 8{,}25 \text{ Fuß}.$$

§. 400 **Hydraulischer Druck.** Wenn das in einem Gefäße eingeschlossene Wasser in Bewegung ist, so drückt es gegen die Gefäßwände schwächer, als wenn es in Ruhe bleibt. Man hat daher den hydrodynamischen oder hydraulischen Wasserdruck von dem hydrostatischen Drucke des Wassers zu unterscheiden. Ist p_1 der Druck auf jede Einheit des Wasserspiegels $H_1 R_1 = G_1$, Fig. 677, p der Druck außerhalb der Mündung F, und h die Druckhöhe $F G_1$, so hat man für die Ausflußgeschwindigkeit:

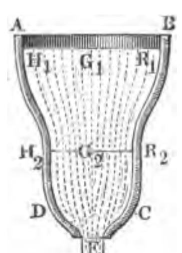
$$v = \sqrt{2g\left(h + \frac{p_1 - p}{\gamma}\right)} : \sqrt{1 - \left(\frac{F}{G_1}\right)^2},$$

oder:

$$h + \frac{p_1 - p}{\gamma} = \left[1 - \left(\frac{F}{G_1}\right)^2\right]\frac{v^2}{2g};$$

ist ferner in einem anderen Querschnitte $H_2 R_2 = G_2$, welcher um die Höhe $F G_2 = h_1$ über der Mündung steht, der Druck $= p_2$, so hat man ebenso:

Fig. 677.



$$h_1 + \frac{p_2 - p}{\gamma} = \left[1 - \left(\frac{F}{G_2}\right)^2\right]\frac{v^2}{2g}.$$

Subtrahirt man beide Ausdrücke von einander, so folgt:

$$h - h_1 + \frac{p_1 - p_2}{\gamma} = \left[\left(\frac{F}{G_2}\right)^2 - \left(\frac{F}{G_1}\right)^2\right]\frac{v^2}{2g},$$

oder, wenn man die Druckhöhe $\overline{G_1 G_2}$ der Schicht $\overline{H_2 R_2} = G_2$, durch h_2 bezeichnet, das Maß des hydraulischen Wasserdrucks in $\overline{H_2 R_2}$:

$$\frac{p_2}{\gamma} = h_2 + \frac{p_1}{\gamma} - \left[\left(\frac{F}{G_2}\right)^2 - \left(\frac{F}{G_1}\right)^2\right]\frac{v^2}{2g}.$$

Nun ist aber noch $\frac{Fv}{G_1}$ die Geschwindigkeit v_1 des Wassers in der Oberfläche G_1, und $\frac{Fv}{G_2}$ die Geschwindigkeit v_2 des Wassers im Querschnitte G_2, daher läßt sich einfacher

$$\frac{p_2}{\gamma} = \frac{p_1}{\gamma} + h_2 - \left(\frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g}\right) \text{ setzen.}$$

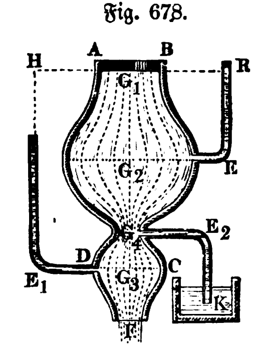
Es ist also hiernach die hydraulische Druckhöhe $\frac{p_2}{\gamma}$ an irgend einer Stelle im Gefäße gleich der hydrostatischen Druckhöhe $\frac{p_1}{\gamma} + h_2$ vermindert um die Differenz der Geschwindigkeitshöhen des Wassers an dieser und an der Eintrittsstelle. Ist die freie Oberfläche G_1 des Wassers groß, so kann man die Zuflußgeschwindigkeit außer Acht lassen, und daher

$$\frac{p_2}{\gamma} = \frac{p_1}{\gamma} + h_2 - \frac{v_2^2}{2g}$$

setzen, und es ist hiernach die hydraulische Druckhöhe um die Geschwindigkeitshöhe kleiner, als die hydrostatische Druckhöhe. Je schneller also das Wasser in einer Röhrenleitung fließt, je schwächer drückt dasselbe gegen die Röhrenwand. Aus diesem Grunde zerspringen die Röhren oft dann erst, oder lassen erst dann Wasser durch, wenn die Bewegung des Wassers in denselben gehemmt wird, wenn sich die Röhren verstopfen u. s. w.

Durch einen in Fig. 678 abgebildeten Ausflußapparat $ABCD$ kann man die Verschiedenheit zwischen dem hydraulischen und dem hydrostatischen Drucke vor Augen führen. Führt man von dem Querschnitte G_2 ein Röhrchen ER in die Höhe, so füllt sich dasselbe mit Wasser, und dieses steigt in demselben über das Niveau des Wasserspiegels, wenn $G_2 > G_1$, also $v_2 < v_1$ ist, denn da der Druck p_1 auf den Wasserspiegel durch den Luftdruck an der Röhrenmündung aufgehoben wird, so läßt sich die den Druck in G_2 messende Höhe

Fig. 678.



$$x = \frac{p_2}{\gamma} = h_2 - \left(\frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g}\right)$$

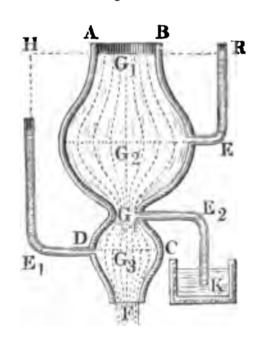
setzen, und es fällt also $x > h_2$ aus, wenn $\frac{v_2^2}{2g} < \frac{v_1^2}{2g}$ ist. Ist dagegen der Querschnitt $G_3 < G_1$, fließt also das Wasser durch G_3 schneller als durch G_1, so hat man die Höhe der Wassersäule in dem bei G_3 einmündenden Röhrchen E_1:

$$y = h_3 - \left(\frac{v_3^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g}\right)$$

kleiner als h_3, und es reicht sonach dieselbe nicht bis zum Niveau HR von G_1. Ist endlich G_4 sehr klein, und also die entsprechende Geschwindigkeit

v_4 sehr groß, so kann sogar $\frac{v_4^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g} > h_4$, und daher die entsprechende hydraulische Druckhöhe z negativ sein, d. h. die Luft von außen mehr drücken als das Wasser von innen. Dann wird also in einem nach unten geführten und unter Wasser ausmündenden Röhrchen $E_2 K$ eine Wassersäule emporsteigen, welche in Vereinigung mit dem Wasserdrucke dem äußeren Atmosphärendrucke das Gleichgewicht hält. Ist dieses Röhrchen kurz, so steigt sogar das zu diesem Zwecke vielleicht gefärbte Wasser aus dem untergesetzten Gefäße K durch das Röhrchen empor, tritt in das Ausflußreservoir und gelangt bei F mit zum Ausflusse.

Fig. 679.



Anmerkung. Besteht das Ausflußgefäß ACE, Fig. 680, aus einem weiten Reservoir AC und aus einer engeren vertical stehenden Röhre CE, so ist der hydraulische Druck an allen Stellen dieser Röhre negativ. Läßt man den Atmosphärendruck p_1 unberücksichtigt, so ist der Druck des Wassers in der Nähe der Ausmündung F, $=$ Null zu setzen, weil hier die ganze Druckhöhe $GF = h$ auf die Erzeugung der Geschwindigkeit $v = \sqrt{2gh}$ verwendet wird, dagegen ist an einer Stelle $D_1 E_1$, welche um die Höhe $G_1 G = h_1$ unter dem Wasserspiegel steht, die hydraulische Druckhöhe

$$= h_1 - h = -(h - h_1)$$

negativ; wenn also ein Loch in diese Röhre gebohrt wird, so fließt hier kein Wasser heraus, es wird vielmehr Luft eingesaugt, die bei F mit zum Ausflusse gelangt. Dieser negative Druck ist unmittelbar unter dem Gefäße am größten, weil hier h_2 am kleinsten ausfällt.

Fig. 680.

§. 401 **Rectanguläre Seitenöffnung.** Mit Hülfe der Formel

$$Q = Fv = F\sqrt{2gh}$$

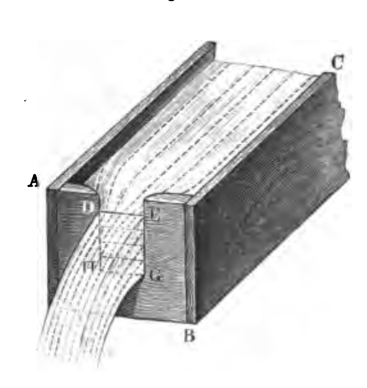
läßt sich die in einer Secunde ausfließende Wassermenge nur dann unmittelbar berechnen, wenn die Mündung horizontal ist, weil nur hier im ganzen Querschnitte F einerlei Geschwindigkeit vorkommt; hat aber der Querschnitt der Mündung eine Neigung gegen den Horizont, befindet sich z. B. die Oeffnung in einer Seitenwand des Gefäßes, so fließen die in verschiedenen Tiefen befindlichen Wasserelemente mit verschiedenen Geschwindigkeiten aus, und es kann die Wassermenge Q nicht als ein Prisma angesehen werden, und daher auch die Formel $Q = Fv = F\sqrt{2gh}$ nicht unmittelbar zur Anwendung kommen. Es ist allgemein

$$Q = F_1\sqrt{2gh_1} + F_2\sqrt{2gh_2} + F_3\sqrt{2gh_3} + \cdots$$
$$= \sqrt{2g}(F_1\sqrt{h_1} + F_2\sqrt{h_2} + F_3\sqrt{h_3} + \cdots)$$

zu setzen, wobei F_1, F_2, F_3 ... die Inhalte und h_1, h_2, h_3 ... die Druckhöhen der Theile der Mündung bezeichnen.

Den einfachsten Fall bietet der Ausfluß durch einen Wandeinschnitt oder der sogenannte Ueberfall, Fig. 681, dar. Dieser Wandeinschnitt bildet eine rectanguläre Ausflußöffnung $DEGH$, deren Breite $DE = GH$ durch b und Höhe $DH = EG$ durch h bezeichnet werden möge. Zerlegen wir diese Fläche bh durch Horizontallinien in eine sehr große Anzahl n gleich breiter Streifen, so können wir innerhalb eines jeden einerlei Geschwindigkeit voraussetzen. Da, von oben nach unten gegangen, die Druckhöhen dieser Streifen

Fig. 681.



$$\frac{h}{n},\ \frac{2h}{n},\ \frac{3h}{n} \text{ u. s. w.}$$

sind, so hat man die entsprechenden Geschwindigkeiten:

$$\sqrt{2g\cdot\frac{h}{n}},\ \sqrt{2g\cdot\frac{2h}{n}},\ \sqrt{2g\cdot\frac{3h}{n}},$$

und da ferner der Inhalt eines Streifens $= b\cdot\frac{h}{n} = \frac{bh}{n}$ ist, so hat man die zugehörigen Wassermengen:

$$\frac{bh}{n}\sqrt{2g\cdot\frac{h}{n}},\ \frac{bh}{n}\sqrt{2g\cdot\frac{2h}{n}},\ \frac{bh}{n}\sqrt{2g\cdot\frac{3h}{n}} \text{ u. s. w.};$$

und folglich das Wasserquantum durch den ganzen Querschnitt:

$$Q = \frac{bh}{n}\left(\sqrt{2g\cdot\frac{h}{n}} + \sqrt{2g\cdot\frac{2h}{n}} + \sqrt{2g\cdot\frac{3h}{n}} + \cdots\right)$$
$$= \frac{bh\sqrt{2gh}}{n\sqrt{n}}(\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{n}).$$

Nun ist aber, wie im „Ingenieur“, Seite 88, angegeben wird,

$$\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{n},$$

oder:

$$1^{1/2} + 2^{1/2} + 3^{1/2} + \cdots + n^{1/2}, = \frac{n^{1+1/2}}{1+1/2} = {}^2/_3\, n^{3/2} = {}^2/_3\, n\sqrt{n};$$

daher folgt die in Frage stehende Wassermenge:

$$Q = \frac{bh\sqrt{2gh}}{n\sqrt{n}} \cdot {}^2/_3\, n\sqrt{n} = {}^2/_3\, bh\sqrt{2gh} = {}^2/_3\, b\sqrt{2gh^3}.$$

Versteht man unter der mittleren Geschwindigkeit v diejenige, welche an allen Stellen vorhanden sein müßte, damit ebenso viel Wasser ausfließt, als bei den verschiedenen Ausflußgeschwindigkeiten innerhalb des ganzen Querprofiles, so läßt sich setzen:

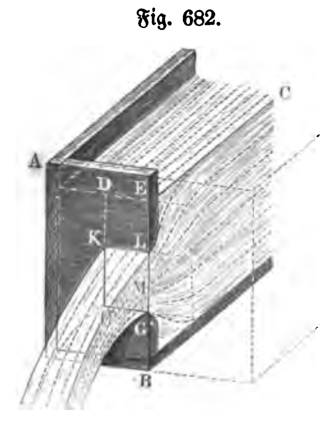
$Q = bh \cdot v$, und es folgt sonach:

$$v = {}^2/_3\sqrt{2gh},$$

d. h. es ist die mittlere Geschwindigkeit des durch einen rectangulären Wandeinschnitt ausfließenden Wassers zwei Drittel von der Geschwindigkeit an der Schwelle oder unteren Kante des Einschnittes.

Reicht die rectanguläre Ausflußöffnung KG, Fig. 682, mit horizontaler Schwelle GH nicht bis zum Wasserspiegel CE, so findet man die Ausflußmenge, wenn man dieselbe als die Differenz zweier Wandeinschnitte $DEGH$ und $DELK$ ansieht. Ist h_1 die Tiefe EG der unteren und $h_2 = EL$ die der oberen Kante, so hat man die Ausflußmenge dieser Einschnitte:

Fig. 682.



$${}^2/_3\, b\sqrt{2gh_1^3},$$

und

$${}^2/_3\, b\sqrt{2gh_2^3},$$

daher das Wasserquantum für die rectanguläre Oeffnung $GHKL$:

$$Q = {}^2/_3\, b\sqrt{2gh_1^3} - {}^2/_3\, b\sqrt{2gh_2^3} = {}^2/_3\, b\sqrt{2g}\,(h_1^{3/2} - h_2^{3/2}),$$

und die mittlere Ausflußgeschwindigkeit:

$$v = \frac{Q}{b(h_1 - h_2)} = {}^2/_3\sqrt{2g} \cdot \frac{h_1^{3/2} - h_2^{3/2}}{h_1 - h_2}.$$

Ist h die mittlere Druckhöhe $EM = \frac{h_1 + h_2}{2}$, oder die Tiefe des Mittelpunktes der Oeffnung unter dem Wasserspiegel und a die Oeffnungshöhe $KH = LG = h_1 - h_2$, so kann man setzen:

$$v = {}^2/_3\sqrt{2g} \cdot \frac{\left(h + \frac{a}{2}\right)^{3/2} - \left(h - \frac{a}{2}\right)^{3/2}}{a}, \text{ oder annähernd:}$$

$$= \left[1 - {}^1/_{96}\left(\frac{a}{h}\right)^2\right]\sqrt{2gh}.$$

Beispiel. Wenn eine rectanguläre Ausflußöffnung 3 Fuß breit und $1^1/_4$ Fuß hoch ist, und die untere Kante um $2^3/_4$ Fuß unter dem Wasserspiegel liegt, so ist die entsprechende Ausflußmenge:

$$Q = {}^2/_3 \,.\, 7{,}906 \,.\, 3\,(2{,}75^{3/2} - 1{,}5^{3/2}) = 15{,}812\,(4{,}560 - 1{,}837)$$
$$= 15{,}812 \,.\, 2{,}723 = 43{,}06 \text{ Cubikfuß}.$$

Nach der Näherungsformel beträgt die mittlere Ausflußgeschwindigkeit:

$$v = \left[1 - {}^1/_{96}\left(\frac{1{,}25}{2{,}125}\right)^2\right] \cdot 7{,}906\,\sqrt{2{,}125} = (1 - 0{,}0036) \,.\, 11{,}525$$
$$= 11{,}525 - 0{,}042 = 11{,}483 \text{ Fuß},$$

und daher die Ausflußmenge:

$$Q = 3 \,.\, {}^5/_4 \,.\, 11{,}483 = 43{,}06 \text{ Cubikfuß}.$$

Anmerkung. Wenn der Wandeinschnitt unter dem Winkel δ gegen den Horizont geneigt ist, so hat man die Mündungshöhe $\frac{h_1 - h_2}{sin.\,\delta}$ statt ihrer Verticalprojection $(h_1 - h_2)$ einzuführen, weshalb

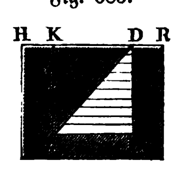
$$Q = {}^2/_3\, \frac{b\sqrt{2g}}{sin.\,\delta}\,(\sqrt{h_1^3} - \sqrt{h_2^3})$$

zu setzen ist. Ist der Querschnitt des Ausflußreservoirs parallel zur Mündung nicht bedeutend größer als der Querschnitt der Mündung, so hat man noch die Geschwindigkeit $v_1 = \frac{F}{G}v$ des ankommenden Wassers zu berücksichtigen, und deshalb zu setzen:

$$Q = {}^2/_3\, b\sqrt{2g}\left[\left(h_1 + \frac{v_1^2}{2g}\right)^{3/2} - \left(h_2 + \frac{v_1^2}{2g}\right)^{3/2}\right].$$

Trianguläre Seitenöffnung. Außer rectangulären Seitenöffnungen kommen noch trianguläre und kreisförmige Mündungen in der Praxis vor. Handeln wir zunächst von dem Ausflusse durch eine trianguläre Mündung DEG, Fig. 683, mit horizontaler Basis EG und der im Wasserspiegel HR befindlichen Spitze D. Setzen wir die Basis $EG = b$ und die Höhe $DE = h$, theilen wir die letztere in n gleiche Theile und führen wir durch die Theilpunkte Parallellinien zur Basis, so zerlegen wir die ganze Fläche in schmale Elemente von den Inhalten $\frac{b}{n}\cdot\frac{h}{n}$, $\frac{2b}{n}\cdot\frac{h}{n}$, $\frac{3b}{n}\cdot\frac{h}{n}$ u. s. w., und den Druckhöhen $\frac{h}{n}$, $\frac{2h}{n}$, $\frac{3h}{n}$ u. s. w. Für diese folgen die Ausflußmengen: §. 402

Fig. 683.



$$\frac{bh}{n}\sqrt{2g\cdot\frac{h}{n}},\ \frac{2bh}{n^2}\sqrt{2g\cdot\frac{2h}{n}},\ \frac{3bh}{n^2}\sqrt{2g\cdot\frac{3h}{n}} \text{ u. s. w.}$$

und es ergiebt sich durch Summation derselben die Ausflußmenge für die ganze trianguläre Mündung:

$$Q = \frac{bh}{n^2}\sqrt{2g\frac{h}{n}}\,(1 + 2\sqrt{2} + 3\sqrt{3} + \cdots + n\sqrt{n})$$
$$= \frac{bh\sqrt{2gh}}{n^2\sqrt{n}}\,(1^{3/2} + 2^{3/2} + 3^{3/2} + \cdots + n^{3/2}),$$

oder da die Reihe in der Parenthese, $= \frac{n^{3/2+1}}{3/2 + 1} = {}^2/_5\, n^{5/2}$ giebt,

$$Q = {}^2/_5\, bh\sqrt{2gh} = {}^2/_5\, b\sqrt{2gh^3}.$$

Liegt die Basis DK der Mündung DGK im Wasserspiegel und die Spitze G um h tiefer, so hat man, da durch das Rechteck $DEGK$, ${}^2/_3\, bh\sqrt{2gh}$ ausfließt, die entsprechende Wassermenge:

$$Q = {}^2/_3\, bh\sqrt{2gh} - {}^2/_5\, bh\sqrt{2gh} = {}^4/_{15}\, bh\sqrt{2gh}.$$

Durch das **Trapez** $ABCD$, Fig. 684, dessen obere im Wasserspiegel liegende Basis $AB = b_1$ und dessen untere Basis $CD = b_2$ und Höhe $DE = h$ ist, findet man die Wassermenge durch Zusammensetzung aus einem Rechtecke und zwei Dreiecken, nämlich:

$$Q = {}^2/_3\, b_2 h\sqrt{2gh} + {}^4/_{15}\,(b_1 - b_2)\, h\sqrt{2gh}$$
$$= {}^2/_{15}\,(2b_1 + 3b_2)\, h\sqrt{2gh}.$$

Fig. 684.

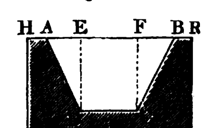
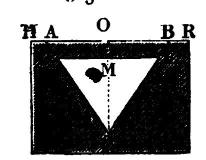


Fig. 685.

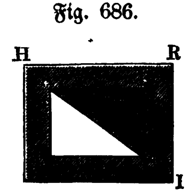


Ferner folgt noch die Ausflußmenge für ein Dreieck CDE, Fig. 685, dessen Basis $DE = b_1$ um die Höhe $OM = h_1$ und dessen Spitze C um $OC = h$ von dem Wasserspiegel HR absteht:

$$Q = \text{Wassermenge durch } ABC \text{ minus Wassermenge durch } AE$$
$$= {}^4/_{15}\, bh\sqrt{2gh} - {}^2/_{15}\,(2b + 3b_1)\, h_1\sqrt{2gh_1}$$
$$= {}^2/_{15}\sqrt{2g}\,[2b\,(h^{5/2} - h_1^{5/2}) - 3b_1 h_1^{5/2}].$$

Da sich die Breite $AB = b$ durch die Proportion $b : b_1 = h : (h - h_1)$ bestimmen läßt, so folgt:

Fig. 686.



$$Q = \frac{2\sqrt{2g}\,.\,b_1}{15}\left(\frac{2h\,(h^{5/2} - h_1^{5/2})}{h - h_1} - 3h_1^{5/2}\right)$$
$$= \frac{2\sqrt{2g}\,.\,b_1}{15}\left(\frac{2h^{7/2} - 5hh_1^{5/2} + 3h_1^{7/2}}{h - h_1}\right).$$

Endlich ergiebt sich noch für ein Dreieck ACD, Fig. 686, dessen Spitze A über der Basis liegt, die Ausflußmenge:

$$Q = {}^2/_3 \sqrt{2g} \,.\, b_1 (h^{3/2} - h_1^{3/2}) - \frac{2\sqrt{2g}\,.\,b_1}{15} \left(\frac{2 h^{5/2} - 5 h h_1^{3/2} + 3 h_1^{5/2}}{h - h_1} \right)$$

$$= \frac{2\sqrt{2g}\,.\,b_1}{15} \left(\frac{3 h^{5/2} - 5 h_1 h^{3/2} + 2 h_1^{5/2}}{h - h_1} \right).$$

Beispiel. Welche Wassermasse fließt durch das Quadrat $ABCD$, Fig 687, mit verticaler Diagonale AC von 1 Fuß Länge, wenn der Eckpunkt A bis zum Wasserspiegel reicht? Die obere Hälfte dieses Quadrates giebt die Ausflußmenge:

$Q = {}^2/_5\, b \sqrt{2 g h^3} = {}^2/_5 \,.\, 1 \,.\, 7{,}906 \sqrt{{}^1/_8} = 1{,}581 \,.\, 0{,}7071 = 1{,}118$ Cubikfuß,
und die untere die Wassermenge:

Fig. 687.

$$Q_1 = \frac{2 b \sqrt{2g}}{15} \left(\frac{2 h^{5/2} - 5 h h_1^{3/2} + 3 h_1^{5/2}}{h - h_1} \right)$$

$$= \frac{2 \,.\, 7{,}906}{15} \left(\frac{2 - 5\, ({}^1/_2)^{3/2} + 3\, ({}^1/_2)^{5/2}}{1 - {}^1/_2} \right)$$

$$= \frac{31{,}624}{15} (2 - 1{,}7678 + 0{,}5303)$$

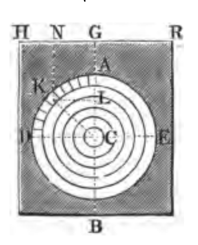
$$= \frac{31{,}624 \,.\, 0{,}7625}{15} = 1{,}608 \text{ Cubikfuß},$$

olglich fließt durch die ganze Mündung die Wassermenge:

$$Q = 1{,}118 + 1{,}608 = 2{,}726 \text{ Cubikfuß}.$$

Kreisförmige Seitenöffnung. Für eine kreisförmige Mündung AB, Fig. 688, bestimmt sich die Ausflußmenge nur durch eine auf folgende Weise zu ermittelnde Näherungsformel. Zerlegen wir den Kreis durch concentrische Kreise in gleich schmale Ringe, und jeden Ring in lauter gleiche, als Parallelogramme anzusehende Elemente. Ist nun r der Halbmesser eines solchen Ringes, b dessen Breite und n die Anzahl seiner Elemente, folglich $\frac{2\pi r}{n}$ die Länge eines Ringelementes, so hat man die Größe desselben: §. 403

Fig. 688.



$$K = \frac{2\pi r b}{n}.$$

Ist ferner h die Tiefe CG des Mittelpunktes C unter dem Wasserspiegel HR, und φ der Winkel ACK, um welchen ein Element K vom höchsten Punkte A des Ringes absteht, so hat man die Druckhöhe dieses Elementes:

$$KN = CG - CL = h - r \cos. \varphi,$$

und daher die Ausflußmenge dieses Elementes:

$$= \frac{2\pi r b}{n} \sqrt{2 g (h - r \cos. \varphi)}.$$

Nun ist aber:

$$\sqrt{h - r\cos.\varphi}$$
$$= \sqrt{h}\left[1 - \tfrac{1}{2}\frac{r}{h}\cos.\varphi - \tfrac{1}{8}\left(\frac{r}{h}\right)^2\cos.\varphi^2 + \cdots\right]$$
$$= \sqrt{h}\left[1 - \tfrac{1}{2}\frac{r}{h}\cos.\varphi - \tfrac{1}{16}\left(\frac{r}{h}\right)^2(1 + \cos.2\varphi) + \cdots\right],$$

daher folgt die Ausflußmenge eines Elementes:

$$= \frac{2\pi r b}{n}\sqrt{2gh}\left[1 - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{r}{h}\cos.\varphi - \tfrac{1}{16}\left(\frac{r}{h}\right)^2(1 + \cos.2\varphi) + \cdots\right].$$

Die Ausflußmenge des ganzen Ringes ergiebt sich, wenn man in der Parenthese statt 1, $n.1 = n$, statt $\cos.\varphi$ die Summe aller Cosinus φ von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$, und statt $\cos.2\varphi$ die Summe aller Cosinus 2φ von $2\varphi = 0$ bis $2\varphi = 4\pi$ nimmt. Da aber die Summe aller Cosinus eines Vollkreises = Null ist, so fallen diese Cosinus ganz aus, und es folgt die Ausflußmenge für den Ring:

$$= \frac{2\pi r b}{n}\sqrt{2gh}\left[n - \tfrac{1}{16}\left(\frac{r}{h}\right)^2\cdot n - \cdots\right]$$
$$= 2\pi r b\sqrt{2gh}\left[1 - \tfrac{1}{16}\left(\frac{r}{h}\right)^2 - \cdots\right].$$

Setzt man man jetzt statt b, $= \frac{r}{m}$ und statt r, $\frac{r}{m}, \frac{2r}{m}, \frac{3r}{m}$ bis $\frac{mr}{m}$, so erhält man die Ausflußmenge aller die ganze Kreisfläche ausmachenden Ringe, und es folgt zuletzt das Ausflußquantum des ganzen Kreises:

$$Q = 2\pi r\sqrt{2gh}\left(\frac{r}{m^2}(1+2+3+\cdots+m) - \tfrac{1}{16}\frac{r^3}{m^4 h^2}(1^3+2^3+3^3+\cdots+m^3)\right)$$
$$= 2\pi r\sqrt{2gh}.\left(\frac{r}{m^2}\cdot\frac{m^2}{2} - \tfrac{1}{16}\cdot\frac{r^3}{m^4 h^2}\cdot\frac{m^4}{4}\right)$$
$$= \pi r^2\sqrt{2gh}\left[1 - \tfrac{1}{32}\left(\frac{r}{h}\right)^2 - \cdots\right],$$

oder genauer:

$$Q = \pi r^2\sqrt{2gh}\left[1 - \tfrac{1}{32}\left(\frac{r}{h}\right)^2 - \tfrac{5}{1024}\left(\frac{r}{h}\right)^4 - \cdots\right].$$

Reicht der Kreis bis zum Wasserspiegel, so ist

$$Q = \tfrac{987}{1024}\pi r^2\sqrt{2gh} = 0{,}964\, F\sqrt{2gh},$$

wenn $F = \pi r^2$, den Inhalt der ganzen Kreisfläche bezeichnet.

Uebrigens ist leicht zu erachten, daß man in allen den Fällen, wenn die Druckhöhe im Mittelpunkte gleich oder größer ist als der Durchmesser der Mündung, den Werth der ganzen Reihe = 1 setzen und

$$Q = F\sqrt{2gh}$$

annehmen kann. Auch läßt sich diese Regel auf andere Mündungen anwenden, und also in allen den Fällen, wenn der Schwerpunkt einer Mündung

mindestens ebenso tief unter dem Wasserspiegel liegt, als die Mündung hoch ist, die Tiefe h dieses Punktes als Druckhöhe ansehen und

$$Q = F\sqrt{2gh} \text{ setzen.}$$

Wenn man in Betracht zieht, daß das Mittel aller Cosinus des ersten Quadranten $= \frac{2}{\pi}$ und das Mittel aller Cosinus des zweiten Quadranten $= -\frac{2}{\pi}$, also das Mittel aller Cosinus des ersten und zweiten Quadranten = Null ist, so bestimmt sich auf dem oben eingeschlagenen Wege die Ausflußmenge des oberen Halbkreises:

$$Q_1 = \frac{\pi r^2}{2}\sqrt{2gh}\left[1 - \frac{2}{3\pi}\left(\frac{r}{h}\right) - {}^1/_{32}\left(\frac{r}{h}\right)^2\right]$$
$$= F\sqrt{2gh}\left[1 - \frac{2}{3\pi}\left(\frac{r}{h}\right) - {}^1/_{32}\left(\frac{r}{h}\right)^2\right],$$

und die durch den unteren Halbkreis:

$$Q_2 = \frac{\pi r^2}{2}\sqrt{2gh}\left[1 + \frac{2}{3\pi}\left(\frac{r}{h}\right) - {}^1/_{32}\left(\frac{r}{h}\right)^2 + \cdots\right]$$
$$= F\sqrt{2gh}\left[1 + \frac{2}{3\pi}\left(\frac{r}{h}\right) - {}^1/_{32}\left(\frac{r}{h}\right)^2 + \cdots\right],$$

wobei F den Inhalt der Mündung bezeichnet.

Uebrigens gelten diese Formeln für Q, Q_1 und Q_2 auch bei elliptischen Mündungen mit horizontaler Axe, da die Ausflußmengen, unter übrigens gleichen Verhältnissen, den Breiten der Mündungen proportional sind, und die Breiten einer Ellipse mit den Breiten eines gleichhohen Kreises proportional wachsen (s. analyt. Hülfslehren, Art. 12).

Beispiel. Welche Wassermenge fließt stündlich durch eine kreisförmige Oeffnung von 1 Zoll Durchmesser, über welcher der Wasserspiegel eine Linie hoch steht? Es ist hier:

$$\frac{r}{h} = {}^6/_7, \text{ daher } \left(\frac{r}{h}\right)^2 = {}^{36}/_{49} = 0{,}735,$$

ferner:

$$1 - {}^1/_{32}\left(\frac{r}{h}\right)^2 = 1 - 0{,}023 = 0{,}977,$$

und folglich die Ausflußmenge pr. Secunde:

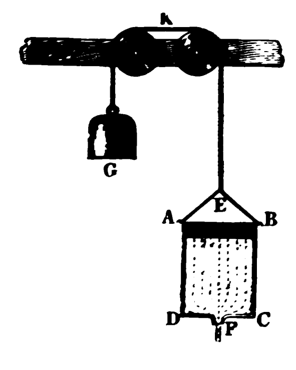
$$Q = \frac{\pi \,.\, 1^2}{4} \cdot 12 \cdot 7{,}906 \sqrt{\frac{7}{144}} \cdot 0{,}977 = \frac{\pi}{4} \cdot 7{,}906 \,.\, 0{,}977\, \sqrt{7} = 16{,}05 \text{ Cubikzoll,}$$

pr. Minute = 963 Cubikzoll, und pr. Stunde = $33^1/_2$ Cubikfuß.

Bewegte Ausflussgefässe Die Ausflußgeschwindigkeit ändert sich, wenn ein vorher in Ruhe oder in gleichförmiger Bewegung befindliches Gefäß in Bewegung übergeht, oder seinen Bewegungszustand ändert, weil in diesem Falle jedes Waffertheilchen außer seinem Gewichte auch noch durch seine Trägheit gegen die Umgebung wirkt. §. 404

Bewegt man das Gefäß $A\,C$, Fig. 689, beschleunigt vertical aufwärts, während das Wasser durch die Bodenöffnung F abfließt, so findet eine Vergrößerung, und bewegt man es beschleunigt vertical abwärts, so findet eine Verminderung der Ausflußgeschwindigkeit statt. Ist die Acceleration p, so drückt jedes Wassermassenelement M nicht bloß durch sein Gewicht Mg, sondern auch durch seine Trägheit Mp, es ist folglich die Kraft eines jeden Elementes in einem Falle $(g + p)\,M$ und im zweiten $(g - p)\,M$, also statt g, $g \pm p$ zu setzen. Hiernach folgt

Fig. 689.



$$\frac{v^2}{2} = (g \pm p)\,h$$

und sonach für die Ausflußgeschwindigkeit:

$$v = \sqrt{2\,(g \pm p)\,h}.$$

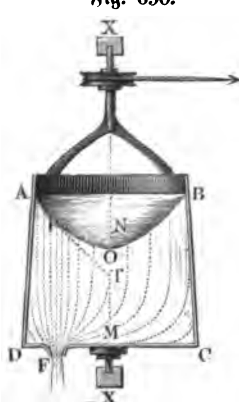
Steigt das Gefäß mit der Acceleration g empor, so ist

$$v = \sqrt{2 \,.\, 2\,g\,h} = 2\sqrt{g\,h},$$

also die Ausflußgeschwindigkeit 1,414 mal so groß als beim stillstehenden Gefäße. Fällt das Gefäß durch sein eigenes Gewicht, also mit der Acceleration g, so ist $v = \sqrt{0} = 0$, dann fließt also kein Wasser aus. Bewegt sich das Gefäß gleichförmig auf- oder abwärts, so bleibt $v = \sqrt{2\,g\,h}$, steigt es aber verzögert, so wird $v = \sqrt{2\,(g - p)\,h}$, und fällt es verzögert, so fällt $v = \sqrt{2\,(g + p)\,h}$ aus.

Bewegt man das Ausflußgefäß horizontal oder unter einem schiefen Winkel gegen den Horizont, so stellt sich (s. §. 354) der Wasserspiegel schief gegen den Horizont und es findet daher auch eine Veränderung der Ausflußgeschwindigkeit statt.

Fig. 690.



Bei Umdrehung eines Gefäßes $A\,C$, Fig. 690, um seine verticale Axe $X\overline{X}$ bildet nach §. 354 der Wasserspiegel einen parabolischen Trichter $A\,O\,B$, es steht daher über der Mitte M des Bodens eine kleinere Druckhöhe $M\,O$, als nahe am Rande desselben, und es fließt daher auch durch eine Mündung in der Axe das Wasser langsamer, als durch jede andere gleich große Bodenöffnung F. Bezeichnet h die Druckhöhe $M\,O$ in der Mitte M, so wäre die Ausflußgeschwindigkeit durch eine Mündung

daselbst, $= \sqrt{2gh}$; bezeichnet aber y die Entfernung $MF = NP$ einer Mündung F von der Axe $X\overline{X}$, und ω die Winkelgeschwindigkeit, so hat man, da die Subtangente TN des Parabelbogens OP der doppelten Abscisse ON gleich ist, die entsprechende Erhebung des Wassers über der Mitte O:

$$ON = \frac{1}{2}\, TN = \frac{1}{2}\, PN . tang.\, NPT,$$

folglich, wenn man noch $tang.\, NPT = tang.\, \varphi = \frac{\omega^2 y}{g}$ (s. §. 354) einführt, und die Umdrehungsgeschwindigkeit von F, d. i. ωy, durch w bezeichnet,

$$ON = x = \frac{1}{2}\, y \cdot \frac{\omega^2 y}{g} = \frac{\omega^2 y^2}{2g} = \frac{w^2}{2g}.$$

Hiernach ist denn die Ausflußgeschwindigkeit für die Mündung F:

$$v = \sqrt{2g\left(h + \frac{w^2}{2g}\right)} = \sqrt{2gh + w^2}.$$

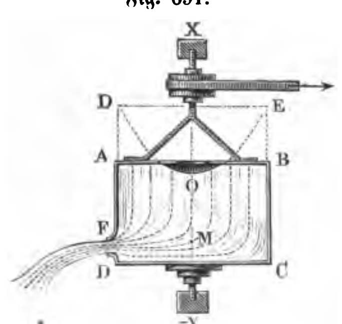


Fig. 691.

Diese Formel gilt für jedes beliebig gestaltete Gefäß, und auch dann noch, wenn es oben verschlossen ist, wie z. B. für AC, Fig. 691, so daß sich der Trichter DOE gar nicht vollständig bilden kann. Es ist auch hier h die Tiefe MO der Mündung unter dem Scheitel O des Trichters, und v die Umdrehungsgeschwindigkeit von der Mündung. Sie findet bei den Reactionsrädern und Turbinen in der Folge ihre Anwendung.

Beispiele. 1) Wenn das mit Wasser angefüllte Gefäß AC, Fig. 689, 350 Pfund wiegt und mittels eines über Leitrollen K gehenden Seiles durch ein Gewicht G von 450 Pfund aufgezogen wird, so steigt es mit einer Acceleration:

$$p = \frac{450 - 350}{450 + 350} \cdot g = \frac{100}{800}\, g = \frac{1}{8}\, g,$$

und es ist deshalb die Ausflußgeschwindigkeit:

$$v = \sqrt{2\,(g + p)\, h} = \sqrt{2 \,.\, \frac{9}{8} \,.\, g h} = \sqrt{\frac{9}{4}\, g h}.$$

Wäre die Druckhöhe $h = 4$ Fuß, so würde folglich die Ausflußgeschwindigkeit

$$v = \sqrt{9 \,.\, g} = 3\sqrt{31,25} = 16,77 \text{ Fuß betragen.}$$

2) Wenn sich das mit Wasser angefüllte Gefäß AC, Fig. 691, so umdreht, daß es in der Minute 100 Umdrehungen macht, während die Tiefe der Mündung F unter dem Wasserspiegel in der Mitte 2 Fuß und die Entfernung von der Axe $X\overline{X}$, 3 Fuß beträgt, so ist die Ausflußgeschwindigkeit:

$$v = \sqrt{2gh + w^2} = \sqrt{62,5 \,.\, 2 + \left(\frac{3 \,.\, \pi \,.\, 100}{30}\right)^2} = \sqrt{125 + 100 \,.\, \pi^2}$$

$$= \sqrt{125 + 987} = \sqrt{1112} = 33,35 \text{ Fuß.}$$

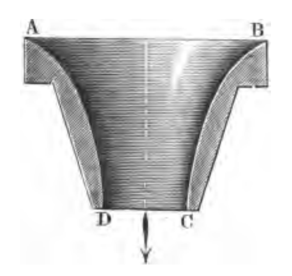
Steht das Gefäß still, so ist $v = \sqrt{125} = 11,18$ Fuß.

Zweites Capitel.

Von der Contraction der Wasserstrahlen beim Ausflusse des Wassers durch Mündungen in der dünnen Wand.

§. 405 **Geschwindigkeitscoefficient.** Die in dem vorstehenden Capitel entwickelten Ausflußgesetze stimmen mit den Erfahrungen fast ganz überein, so lange die Druckhöhe in Ansehung der Mündungsweite nicht sehr klein ist, und so lange sich die Ausflußöffnung nach innen allmälig erweitert und sich, ohne Ecken und Kanten zu biden, an der Boden- oder Seitenfläche des Gefäßes anschließt. Die hierüber an glattpolirten metallenen Mundstücken angestellten Versuche von Michelotti, Eytelwein und Anderen, sowie auch die Versuche des Verfassers haben nachgewiesen, daß die effective oder wirklich ausfließende Wassermenge 96 bis 99 Procent von dem theoretisch bestimmten Wasserquantum ist. Das in der halben natürlichen Größe abgebildete Mundstück AD, Fig. 692, gab die effective Ausflußmenge, bei einer Druckhöhe von 10 Fuß, 98 Procent, bei 5 Fuß, 97 Procent und bei 1 Fuß, 96 Procent des theoretisch bestimmten Ausflußquantums (Versuche mit größeren Mündungen s. Untersuchungen in dem Gebiete der Mechanik und Hydraulik, zweite Abtheil.). Damit der Ausfluß durch ein solches Mundstück möglichst ungestört erfolge, muß die Abrundung desselben nicht nach einem Kreise, sondern nach einer Curve $AD = BC$ erfolgen, deren Krümmung von innen nach außen (von A nach D) allmälig abnimmt. Da ferner bei diesem Ausflusse der Strahl mit der Mündung gleichen Querschnitt F hat, so ist anzunehmen, daß diese Verminderung der Wassermenge aus einem Verluste an Geschwindigkeit hervorgeht, der in der Reibung oder Adhäsion des Wassers an dem inneren Umfange der Mündung und in der Klebrigkeit des Wassers seinen Grund hat. Wir nennen in der Folge das Verhältniß der effectiven Ausflußgeschwindigkeit zur theoretischen Geschwindigkeit $v = \sqrt{2gh}$ den Geschwindigkeitscoefficienten (franz. coefficient de vitesse; engl. coefficient of velocity) und bezeichnen denselben durch φ. Hiernach ist also die effective Ausflußgeschwindigkeit im einfachsten Falle:

Fig. 692.



$$v_1 = \varphi v = \varphi \sqrt{2gh},$$

und die effective Ausflußmenge:

$$Q = F v_1 = \varphi F v = \varphi F \sqrt{2 g h}.$$

Führen wir für φ den mittleren Werth 0,975 ein, so erhalten wir für das Fußmaß:

$$Q = 0{,}975 \,.\, F \sqrt{2 g h} = 0{,}975 \,.\, 7{,}906\, F \sqrt{h} = 7{,}708\, F \sqrt{h}.$$

Einer mit der Geschwindigkeit v_1 ausfließenden Wassermenge Q wohnt die lebendige Kraft $\frac{Q \gamma}{g} \cdot v_1^2$ inne, vermöge welcher sie die mechanische Arbeit $Q \gamma \cdot \frac{v_1^2}{2 g}$ zu leisten vermag. Da aber beim Niedersinken von der Höhe $h = \frac{v^2}{2 g}$ das Gewicht $Q \gamma$ die Arbeit $Q \gamma \,.\, h = Q \gamma \frac{v^2}{2 g}$ verrichtet, so folgt, daß durch den Ausfluß das Wasser den Arbeitsverlust

$$L = Q \gamma \left(\frac{v^2}{2 g} - \frac{v_1^2}{2 g}\right) = (1 - \varphi^2)\, Q \gamma \cdot \frac{v^2}{2 g} = (1 - 0{,}975^2)\, Q \gamma \cdot \frac{v^2}{2 g},$$

d. i.

$$L = 0{,}049\, Q \gamma \cdot \frac{v^2}{2 g} \text{ oder } 4{,}9 \text{ Procent}$$

erleidet. Es wird also das ausfließende Wasser durch seine lebendige Kraft 4,9 Procent weniger Arbeit verrichten, als durch sein Gewicht beim Herabsinken von der Höhe h.

Anmerkung. Der Verfasser hat das durch die Formel $v = \sqrt{2 g h}$ ausgedrückte Ausflußgesetz auch unter sehr verschiedenem, namentlich unter sehr hohem Druck von 100 Metern und unter sehr kleinem Druck von 0,02 Meter geprüft. Ein innen gut abgerundetes Mundstück von 1 Centimeter Weite gab bei den Druckhöhen:

$h_2 = 0{,}02$ Meter	0,50 Meter	3,5 Meter	17 Meter	103 Meter
$\varphi = 0{,}959$	0,967	0,975	0,994	0,994

s. Civilingenieur, Neue Folge, Band V, erstes und zweites Heft.

§. 406 **Contractionscoefficient.** Fließt das Wasser durch eine Mündung in der dünnen Wand (franz. orifice en mince paroi; engl. orifice in a thin plate), so tritt unter übrigens gleichen Umständen eine bedeutende Verminderung der Ausflußmenge ein, indem die Wasserelemente in convergenten Richtungen durch die Mündung hindurch gehen und dadurch einen zusammengezogenen oder contrahirten Wasserstrahl (franz. veine contractée; engl. contracted stream) hervorbringen. Die von Mehreren,

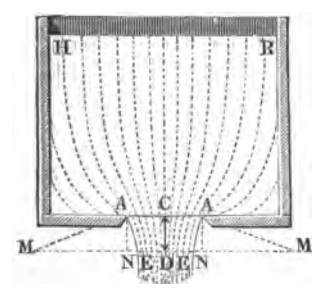
namentlich auch die in der neuesten Zeit von dem Verfasser angestellten Strahlenmessungen haben ergeben, daß der Strahl in einer Entfernung, die ungefähr der halben Mündungsweite gleich kommt, die stärkste Zusammenziehung und eine Dicke hat, die 0,8 des Durchmessers der Mündung gleichkommt. Ist F_1 der Querschnitt des zusammengezogenen Wasserstrahles, sowie F der Querschnitt der Mündung, so hat man hiernach:

$$F_1 = (0{,}8)^2\, F = 0{,}64\, F.$$

Man nennt das Verhältniß $\frac{F_1}{F}$ dieser Querschnitte den Contractionscoefficienten (franz. coefficient de contraction; engl. coefficient of contraction) und bezeichnet ihn mit α, und es ist sonach der mittlere Werth für den Ausfluß des Wassers durch Mündungen in der dünnen Wand $\alpha = 0{,}64$ zu setzen.

So lange man keine nähere Kenntniß über das Gesetz der Contraction der Wasserstrahlen hat, kann man annehmen, daß der durch eine kreisrunde Oeffnung AB, Fig. 693, fließende Strahl einen Rotationskörper $AEEA$ bilde, dessen Umfläche durch Umdrehung eines Kreisbogens AE um die Axe CD des Strahles entsteht. Setzen wir den Durchmesser AA der Mündung, $= d$, und die Entfernung CD des contrahirten Querschnittes EE von der Mündung $= \frac{1}{2} d$, so erhalten wir für den Halbmesser

Fig. 693.



$$MA = ME = r$$

des Erzeugungsbogens AE mittels der Gleichung

$$\overline{AN}^2 = EN\,(2\,ME - EN)$$

oder

$$\frac{d^2}{4} = \frac{d}{10}\left(2\,r - \frac{d}{10}\right),$$

und hiernach

$$r = 1{,}3\, d.$$

Mündungen, nach dieser Gestalt des contrahirten Wasserstrahles geformt, geben so ziemlich die Ausflußgeschwindigkeit:

$$v_1 = 0{,}97 \,.\, v.$$

Die Contraction des Wasserstrahles hat ihren Grund darin, daß nicht allein das Wasser, welches unmittelbar über der Mündung befindlich ist, ausfließt, sondern auch das zur Seite befindliche Wasser herbeiströmt und mit zum Ausflusse gelangt. Es findet also schon im Inneren des Gefäßes eine Convergenz der Wasserfäden, ähnlich wie sie die Figur andeutet, statt, und es besteht die Contraction des Wasserstrahles in einer bloßen Fortsetzung dieser Convergenz. Von dieser Bewegung des Wassers in der Nähe der Mündung kann man sich mit Hülfe eines gläsernen Ausflußapparates

überzeugen, wenn man kleine Körper, welche wenig leichter oder schwerer als Wasser sind, wie z. B. Sägespäne von Eichenholz, Stücke von Siegellack u. s. w., in das Wasser bringt und mit zum Ausflusse gelangen läßt.

Contrahirte Wasserstrahlen. Fließt das Wasser durch dreiseitige, vierseitige Mündungen u. s. w. im dünnen Bleche, so nimmt der Wasserstrahl besondere Gestalten an. In die Augen fallend ist zumal die Umkehrung des Strahles, oder die veränderte Stellung seines Querschnittes in Hinsicht auf den Querschnitt der Mündung, vermöge welcher ein Eck dieses Querschnittes mit der Mitte einer Seite der Mündung gleichzuliegen kommt. Hiernach bildet bei einer dreiseitigen Mündung ABC, Fig. 694, der Querschnitt des Strahles in einem gewissen Abstande von der Mündung einen dreistrahligen Stern DEF, bei einer vierseitigen Mündung $ABCD$, Fig. 695, einen vierstrahligen Stern $EFGH$, ebenso bei einer fünfseitigen

§. 407

Fig. 694. Fig. 695. Fig. 696.

Mündung $ABCDE$, Fig. 696, einen Stern $EGHKL$ mit fünf Strahlen u. s. w. Diese Querschnitte sind aber in verschiedenen Abständen von der Mündung sehr verschieden, sie nehmen auf einer gewissen Distanz ab und auf einer folgenden wieder zu u. s. w.; es besteht daher der Strahl aus Blättern oder Rippen von veränderlicher Breite und bildet dadurch, was namentlich beim Ausflusse unter sehr großem Drucke zu beobachten ist, Bäuche und Knoten, ähnlich wie die Cacteen. Ist die Mündung $ABCD$, Fig. 697, rectangulär, so bildet in kleinerer Entfernung von der Mündung der Querschnitt zwar ebenfalls ein Kreuz oder einen Stern, allein in größerer Entfernung nimmt derselbe wieder mehr die Gestalt eines verwendeten Rechteckes EF an.

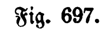
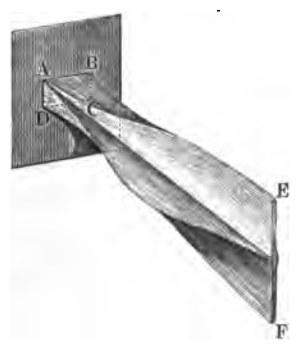


Fig. 697.



Den Ausfluß bei den verschiedenartigsten Mündungen hat Bidone beobachtet; genaue Strahlenmessungen bei quadratischen Mündungen sind aber nur von Poncelet und Lesbros angestellt worden (s. Allgemeine Maschinenencyklopädie, Artikel „Ausfluß“). Die letzten

Messungen haben auf einen kleinen Contractionscoefficienten 0,563 geführt. Wassermessungen beim Ausflusse durch kleinere Mündungen führen aber auf größere Contractionscoefficienten, sie weisen sogar nach, daß dieselben bei langgezogenen Rechtecken größer sind als bei Rechtecken, die sich mehr den Quadraten nähern.

§. 408 **Ausflusscoefficient.** Wäre beim Ausflusse des Wassers durch Mündungen in der dünnen Wand die effective Geschwindigkeit gleich der theoretischen $v = \sqrt{2gh}$, so hätte man die effective Ausflußmenge

$$Q = \alpha F . v = \alpha F \sqrt{2gh},$$

weil αF den Querschnitt des Strahles an der Stelle der größten Zusammenziehung, wo sich die Wasserelemente in parallelen Richtungen bewegen, bezeichnet. Diesem ist aber keineswegs so, es zeigt sich vielmehr in der Erfahrung, daß Q noch kleiner als $\alpha F \sqrt{2gh}$ ist, daß man also die theoretische Wassermenge $F\sqrt{2gh}$ durch einen Coefficienten multipliciren muß, der kleiner als der Contractionscoefficient ist, um die effective Ausflußmenge zu erhalten. Wir müssen daher annehmen, daß beim Ausflusse durch eine Mündung in der dünnen Wand noch ein gewisser Geschwindigkeitsverlust eintrete, deshalb auch einen Geschwindigkeitscoefficienten φ einführen und daher die effective Ausflußgeschwindigkeit

$$v_1 = \varphi v = \varphi \sqrt{2gh}$$

setzen. Hiernach ist also die effective Ausflußmenge:

$$Q_1 = F_1 . v_1 = \alpha F . \varphi v = \alpha \varphi F v = \alpha \varphi F \sqrt{2gh}.$$

Nennen wir endlich noch das Verhältniß der effectiven Ausflußmenge Q_1 zum theoretischen oder hypothetischen Ausflußquantum Q den Ausflußcoefficienten (franz. coefficient de dépense; engl. coefficient of effluxion) und bezeichnen wir ihn in der Folge durch μ, so haben wir:

$$Q_1 = \mu Q = \mu F v = \mu F \sqrt{2gh},$$

und daher

$$\mu = \alpha \varphi,$$

d. h. der Ausflußcoefficient ist das Product aus dem Contractions- und dem Geschwindigkeitscoefficienten.

Vielfältige Beobachtungen, namentlich aber auch die Messungen des Verfassers, haben darauf geführt, daß der Ausflußcoefficient für Mündungen in der dünnen Wand nicht constant ist, daß er bei kleinen Mündungen und kleinen Ausflußgeschwindigkeiten größer ist, als bei großen Mündungen und bei großen Geschwindigkeiten, daß er auch bei langen und schmalen Mündungen bedeutend größer ausfällt als bei Mündungen, die sich einer regelmäßigen Form oder dem Kreise nähern.

Für quadratische Mündungen von 1 bis 9 Quadratzoll Inhalt bei 7 bis

21 Fuß Druckhöhe ist, nach den Versuchen von Bossut und Michelotti, der mittlere Ausflußcoefficient $\mu = 0{,}610$, für kreisförmige von $^1/_2$ bis 6 Zoll Durchmesser bei 4 bis 21 Fuß Druckhöhe aber fällt derselbe $\mu = 0{,}615$ oder ungefähr $^8/_{13}$ aus. Die einzelnen Beobachtungswerthe von Bossut und Michelotti weichen unter einander nicht unbedeutend ab, doch läßt sich aus ihnen eine Abhängigkeit von der Größe der Mündung und der Größe der Druckhöhe nicht entnehmen. Nach den Versuchen des Verfassers ist bei einem Drucke von 0,6 Meter der Ausflußcoefficient für eine kreisrunde Mündung

von 1 Centimeter Durchmesser . . . $\mu = 0{,}628$
„ 2 „ „ . . . $= 0{,}621$
„ 3 „ „ . . . $= 0{,}614$
„ 4 „ „ . . . $= 0{,}607$.

Dagegen bei einem Drucke von $^1/_4$ Meter für dieselbe Mündung

von 1 Centimeter Durchmesser . . . $\mu = 0{,}637$
„ 2 „ „ . . . $= 0{,}629$
„ 3 „ „ . . . $= 0{,}622$
„ 4 „ „ . . . $= 0{,}614$.

Man sieht aus diesen Versuchsresultaten deutlich, daß der Ausflußcoefficient zunimmt, wenn die Mündungsgröße und die Druckhöhe abnehmen.

Nehmen wir für μ den mittleren Werth $= 0{,}62$, und für $\alpha = 0{,}64$ an, so bekommen wir den Geschwindigkeitscoefficienten beim Ausflusse durch Mündungen in der dünnen Wand:

$$\varphi = \frac{\mu}{\alpha} = 0{,}97,$$

also ziemlich so groß wie beim Ausflusse durch abgerundete oder conoidische Mündungen.

Anmerkungen. 1) Versuche von Buff (s. Poggendorff's Annalen, Bd. XLVI.) zeigen, daß die Ausflußcoefficienten bei kleinen Mündungen und kleinen Druckhöhen oder Geschwindigkeiten bedeutend größer sind als bei großen und mittleren Mündungen und Geschwindigkeiten. Eine Mündung von 2,084 Linien Durchmesser gab bei $1^1/_2$ Zoll Druck, $\mu = 0{,}692$, bei 35 Zoll aber $\mu = 0{,}644$; dagegen eine Mündung von 4,848 Linien Weite bei $4^1/_2$ Zoll Druck, $\mu = 0{,}682$ und bei 29 Zoll, $\mu = 0{,}653$. Aehnliches hat auch der Verfasser gefunden.

2) Beim Ausflusse unter Wasser fallen, nach den Versuchen des Verfassers, die Ausflußcoefficienten nahe um $1^1/_3$ Procent kleiner aus als beim Ausflusse in die Luft.

Versuche. Es läßt sich der Ausflußcoefficient μ, welcher einer gewissen Ausflußmündung entspricht, finden, wenn man das Wasserquantum V kennt, welches in einer gewissen Zeit t bei einer bekannten Druckhöhe h durch den bekannten Querschnitt F der Mündung ausströmt; es ist nämlich: **§. 409**

$$V = \mu . F . \sqrt{2gh} . t,$$

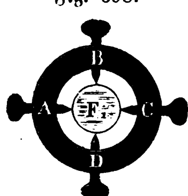
also umgekehrt,

$$\mu = \frac{V}{F t . \sqrt{2 g h}}.$$

Um aber die beiden Factoren desselben, nämlich den Contractions- und den Geschwindigkeitscoefficienten zu ermitteln, bedarf es entweder noch einer Ausmessung des Strahlenquerschnittes $F_1 = \alpha F$, oder einer Bestimmung der Ausflußgeschwindigkeit $v_1 = \varphi v = \varphi \sqrt{2 g h}$ mittels der Sprungweite des Strahles. Beide Messungen lassen sich jedoch nur bei dünnen Strahlen mit kreisförmigen Querschnitten erträglich genau bewerkstelligen.

Der kreisförmige Querschnitt F_1 eines Strahles bestimmt sich sehr sicher mit Hülfe eines in Fig. 698 abgebildeten, aus einem Ringe und vier spitz zulaufenden Schrauben A, B, C, D bestehenden Apparates. Die Schrauben sind nach dem Mittelpunkte des Strahlenquerschnittes gerichtet, und werden so lange gestellt, bis ihre Spitzen die Oberfläche des Strahles berühren. Nach diesem wird der Ring von dem Strahle abgezogen und es werden die Abstände der gegenüberstehenden Schraubenspitzen von einander gemessen; zuletzt wird das Mittel d_1 dieser Abstände als Durchmesser des Strahles angenommen. Ist noch d der Durchmesser des Mündungsquerschnittes, so hat man nun:

Fig. 698.



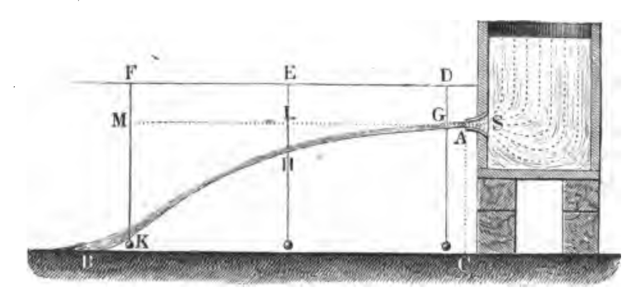
$$\alpha = \frac{F_1}{F} = \left(\frac{d_1}{d}\right)^2,$$

und dann:

$$\varphi = \frac{\mu}{\alpha}.$$

Mißt man die Sprungweite $B C = b$ eines aus dem Mundstücke $S A$ horizontal ausfließenden Strahles $A B$, Fig. 699, welche einer gewissen Höhe $A C = a$ zukommt, so hat man nach §. 36 die Ausflußgeschwindigkeit:

Fig. 699.



$$v_1 = \sqrt{\frac{g\,b^2}{2\,a}},$$

und da nun $v_1 = \varphi\,v = \varphi\sqrt{2gh}$ ist, so erhält man dann:

$$\varphi = \frac{v_1}{v} = \sqrt{\frac{b^2}{4\,a\,h}} = \frac{b}{2\sqrt{a\,h}},$$

und hieraus: $\alpha = \frac{\mu}{\varphi} = \frac{2\sqrt{a\,h}}{\mu\,b}$.

Die Bestimmung von v ist jedoch noch sicherer, wenn man statt a und b die horizontalen und verticalen Coordinaten dreier Punkte der parabolischen Axe AB des Strahles ausmißt, weil dann auch die Axe des Mundstückes eine unbekannte Neigung gegen den Horizont haben kann. Am einfachsten geht man zu Werke, wenn man eine horizontale Schnur DF über dem Strahle ausspannt, von drei gleichweit von einander abstehenden Punkten D, E, F derselben Lothe herabläßt, und an diesen die Abstände DG, EH und FK der Axe des Strahles von DF abmißt. Ist $DF = x$ die horizontale Entfernung der äußersten Punkte von einander, sind ferner die Verticalabstände DG, EH und FK, $= z$, z_1 und z_2, und nimmt man G als Coordinatenanfangspunkt an, so hat man die Coordinaten für den Punkt H:

$$x_1 = GL = DE = {}^1/_2\,DF = \frac{x}{2} \text{ und } y_1 = LH = EH - DG = z_1 - z,$$

und die für den Punkt K:

$$x_2 = GM = DF = x \text{ und } y_2 = MK = FK - DG = z_2 - z.$$

Nach §. 39 ist nun, wenn α den Neigungswinkel der Strahlenaxe in G bezeichnet:

$$y_1 = x_1\, tang.\,\alpha + \frac{g\,x_1^2}{2\,v_1^2\,cos.\,\alpha^2} \text{ und auch}$$

$$y_2 = x_2\, tang.\,\alpha + \frac{g\,x_2^2}{2\,v_1^2\,cos.\,\alpha^2}, \text{ oder}$$

$$y_1 - x_1\, tang.\,\alpha = \frac{g\,x_1^2}{2\,v_1^2\,cos.\,\alpha^2} \text{ und}$$

$$y_2 - x_2\, tang.\,\alpha = \frac{g\,x_2^2}{2\,v_1^2\,cos.\,\alpha^2};$$

es folgt durch Division, da $x_2 = 2\,x_1$ ist,

$$\frac{y_1 - x_1\, tang.\,\alpha}{y_2 - x_2\, tang.\,\alpha} = {}^1/_4; \text{ hieraus aber } tang.\,\alpha = \frac{4\,y_1 - y_2}{x}.$$

Setzt man in eine der vorigen Formeln statt $\frac{1}{cos.\,\alpha^2} = 1 + tang.\,\alpha^2$, und führt man statt $tang.\,\alpha$ den letzten Ausdruck ein, so erhält man für die in Frage stehende Ausflußgeschwindigkeit die Formel:

$$v_1 = \sqrt{\frac{g\,x^2}{2\,(y_2 - x\,tang.\,\alpha)\,cos.\,\alpha^2}} = \sqrt{\frac{(1 + tang.\,\alpha^2)\,g\,x^2}{2\,(2\,y_1 - 4\,y_1)}}$$
$$= \sqrt{\frac{g\,[x^2 + (4\,y_1 - y_2)^2]}{4\,(y_2 - 2\,y_1)}}.$$

Der Geschwindigkeitscoefficient ist hiernach:

$$\varphi = \frac{v_1}{v} = \frac{v_1}{\sqrt{2\,g\,h}} = \sqrt{\frac{x^2 + (4\,y_1 - y_2)^2}{8\,h\,(y_2 - 2\,y_1)}}.$$

Beispiele. 1) Bei einem Strahle, welcher aus einem gut abgerundeten Mundstücke von 1 Centimeter Weite ohne Contraction ausfloß, wurden folgende Messungsresultate gefunden:

$x = 2{,}480$ Meter,
$y_1 = z_1 - z = 0{,}267 - 0{,}1135 = 0{,}1535$ Meter,
$y_2 = z_2 - z = 0{,}669 - 0{,}1135 = 0{,}5555$ „

und die Druckhöhe $h = 3{,}359$ Meter. Hiernach ist der Geschwindigkeitscoefficient:

$$\varphi = \sqrt{\frac{2{,}48^2 + 0{,}059^2}{8\,.\,3{,}359\,.\,0{,}2485}} = \sqrt{\frac{6{,}185}{26{,}872\,.\,0{,}2485}} = 0{,}963.$$

Da keine Contraction statt fand, so ist $\alpha = 1$ und daher $\mu = \varphi$. Hiermit stimmen die in der Anmerkung zu §. 405 mitgetheilten Messungsresultate ganz gut überein.

2) Messungen an einem vollständig contrahirten Strahle, welcher durch eine 1 Centimeter weite kreisrunde Mündung in der ebenen dünnen Wand floß, gaben bei der Druckhöhe $h = 3{,}396$ Meter Folgendes:

$x = 2{,}70$ Meter,
$y_1 = z_1 - z = 0{,}2465 - 0{,}1115 = 0{,}1350$ Meter, und
$y_2 = z_2 - z = 0{,}6620 - 0{,}1115 = 0{,}5505$ „

und es folgt hieraus:

$$\varphi = \sqrt{\frac{2{,}70^2 + 0{.}01^2}{8\,.\,3{,}396\,.\,0{,}2805}} = \sqrt{\frac{7{,}2901}{27{,}168\,.\,0{,}2805}} = 0{,}978.$$

Aus der gemessenen Ausflußmenge berechnete sich aber $\mu = 0{,}617$, daher ist der Contractionscoefficient $\alpha = \frac{\mu}{\varphi} = 0{,}631$, womit auch die Strahlenquerschnittsmessungen gut übereinstimmen.

§. 410 **Rectanguläre Seitenöffnungen.** Die genauesten Versuche über den Ausfluß durch größere rectanguläre Seitenmündungen sind in Metz von Poncelet und Lesbros angestellt worden. Die Weiten dieser Mündungen waren 2, und in einigen Fällen 6 Decimeter und die Höhen derselben sehr verschieden, nämlich 1 Centimeter bis 2 Decimeter. Um eine vollständige Contraction herbeizuführen, wurden zur Herstellung dieser Mündungen 4 Millimeter dicke Messingbleche verwendet. Aus den Ergebnissen dieser Versuche haben diese Experimentatoren mit Hülfe des Interpolirens die am Ende des Paragraphen folgenden Tabellen für die Ausflußcoefficienten berechnet, die man zur Messung oder Berechnung der Ausflußmenge benutzen kann.

Ist b die Breite der Ausflußöffnung KL, Fig. 700, und sind h_1 und h_2 die Wasserstände EG und EL über der untersten und über der obersten horizontalen Kante der Mündung, so hat man nach §. 401 die Ausflußmenge:

$$Q = \frac{2}{3} b \sqrt{2g} \left(h_1^{3/2} - h_2^{3/2}\right).$$

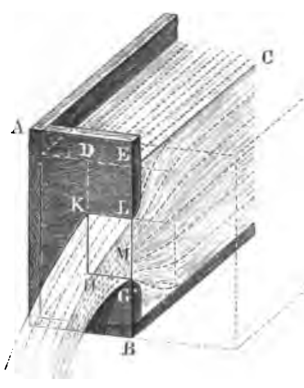
Führt man aber die Oeffnungshöhe $GL = a = h_1 - h_2$, und die mittlere Druckhöhe $EM = h = \frac{h_1 + h_2}{2}$ ein, so hat man annähernd:

$$Q = \left(1 - \frac{a^2}{96 h^2}\right) a b \sqrt{2 g h},$$

und daher die effective Ausflußmenge:

$$Q_1 = \mu Q = \left(1 - \frac{a^2}{96 h^2}\right) \mu a b \sqrt{2 g h}.$$

Fig. 700.



Setzt man noch

$$\left(1 - \frac{a^2}{96 h^2}\right) \mu = \mu_1,$$

so erhält man einfach:

$$Q_1 = \mu_1 \, a b \sqrt{2 g h},$$

und um mit dieser einfachen oder gewöhnlichen Ausflußformel rechnen zu können, sind in den folgenden Tabellen nicht erst die Werthe für μ, sondern die für μ_1 angegeben.

Da das Wasser in der Nähe der Oeffnung in Bewegung ist, so steht es unmittelbar vor der Oeffnung tiefer als in größerer Entfernung vor der Wand, in welcher sich die Mündung befindet; es sind deshalb auch zwei Tabellen zusammengestellt worden, die eine für die in größerer Entfernung von der Mündung und die andere für die unmittelbar an der Mündungswand gemessenen Druckhöhen. Man ersieht übrigens aus beiden Tabellen, daß, wenn auch mit einigen Schwankungen, die Ausflußcoefficienten wachsen, wenn die Oeffnung niedriger und die Druckhöhe kleiner wird.

Haben die Mündungen andere Breiten, so bleibt, so lange man keine anderen Versuche zu Grunde legen kann, nichts übrig, als die Coefficienten dieser Tabellen ebenfalls anzuwenden, um die Ausflußmenge zu berechnen. Daß man hierbei nicht auf große Differenzen stößt, geht aus der Vergleichung der Coefficienten für die Mündungen 0,6 Meter mit denen für die Mündungen 0,2 Meter Breite, bei gleicher Druckhöhe u. s. w. hervor. Sind ferner die Oeffnungen nicht rectangulär, so bestimme man ihre mittlere Breite und mittlere Höhe und führe die diesen Dimensionen entsprechenden Coefficienten

in der Rechnung ein. Endlich ist es immer vorzuziehen, die Druckhöhe in einer größeren Entfernung vor der Mündungswand zu messen und die erste Tabelle anzuwenden, als unmittelbar an der Mündung, wo der Wasserspiegel gekrümmt und weniger ruhig ist als mehr oberhalb der Mündung.

Beispiele. 1) Welche Wassermenge fließt durch eine rectanguläre Oeffnung von 2 Decimeter Breite und 1 Decimeter Höhe, wenn der Wasserspiegel $1\frac{1}{2}$ Meter über der oberen Kante steht? Hier ist:

$$b = 0{,}2,\ a = 0{,}1,\ h = \frac{h_1 + h_2}{2} = \frac{1{,}6 + 1{,}5}{2} = 1{,}55 \text{ Meter},$$

daher die theoretische Ausflußmenge:

$$Q = 0{,}1 \,.\, 0{,}2 \sqrt{2g}\ \sqrt{1{,}55} = 0{,}02 \,.\, 4{,}429 \,.\, 1{,}245 = 0{,}1103 \text{ Cubikmeter.}$$

Nun giebt aber die Tabelle I. für $a = 0{,}1$ und $h_2 = 1{,}5$, $\mu_1 = 0{,}611$, daher ist die effective Ausflußmenge:

$$Q_1 = 0{,}611 \,.\, 0{,}1103 = 0{,}0674 \text{ Cubikmeter.}$$

2) Welche Ausflußmenge entspricht einer rectangulären Mündung in der dünnen Wand von 8 Zoll Breite und 2 Zoll Höhe bei 15 Zoll Wasserhöhe über der oberen Kante? Die theoretische Ausflußmenge ist:

$$Q = \tfrac{2}{3} \,.\, \tfrac{1}{6} \cdot 7{,}906 \sqrt{\tfrac{4}{3}} = 0{,}8784 \,.\, 1{,}1547 = 1{,}014 \text{ Cubikfuß.}$$

Nun ist aber 2 Zoll ungefähr 0,05 Meter und 15 Zoll ungefähr 0,4 Meter, daher kann man nach der Tabelle für $a = 0{,}05$ und $h_2 = 0{,}4$, den entsprechenden Coefficient $\mu_1 = 0{,}628$ annehmen und das gesuchte Wasserquantum

$$Q_1 = 0{,}628 \,.\, 1{,}014 = 0{,}637 \text{ Cubikfuß setzen.}$$

3) Wenn die Breite 0,25, die Höhe 0,15 und der Wasserstand $h_2 = 0{,}045$ Meter beträgt, so ist

$$Q = 0{,}25 \,.\, 0{,}15 \,.\, 4{,}429 \,.\, \sqrt{0{,}12} = 0{,}166 \,.\, 0{,}3464 = 0{,}0575 \text{ Cubikmeter.}$$

Der Höhe 0,15 entspricht für $h_2 = 0{,}04$ der Mittelwerth:

$$\mu_1 = \frac{0{,}582 + 0{,}603}{2} = 0{,}5925$$

und für $h_2 = 0{,}05$:

$$\mu_1 = \frac{0{,}585 + 0{,}605}{2} = 0{,}595;$$

da nun aber $h_2 = 0{,}045$ gegeben ist, so setzen wir das neue Mittel:

$$\frac{0{,}5925 + 0{,}5950}{2} = 0{,}594$$

als Ausflußcoefficient ein, und erhalten so die gesuchte Wassermenge:

$$Q_1 = 0{,}594 \,.\, 0{,}0575 = 0{,}03415 \text{ Cubikmeter.}$$

Anmerkung. Die Ausflußcoefficienten ändern sich nicht wesentlich, wenn man bei einer rectangulären Mündung die Breite mit der Höhe derselben verwechselt, wie aus folgenden Versuchen des Herrn Lesbros (s. dessen Expériences hydrauliques, Paris 1851) hervorgeht.

Eine Mündung von 0,60 Meter Breite und 0,02 Meter Höhe gab für die Druckhöhe $h = 0{,}30$ bis 1,50 Meter,

$$\mu_1 = \mu = 0{,}635 \text{ bis } 0{,}622,$$

und dagegen, wenn man sie aufs Hohe stellte, also die Breite 0,60 Meter zur Höhe, und die Höhe 0,02 Meter zur Breite machte:

$$\mu_1 = 0{,}610 \text{ bis } 0{,}626, \text{ und}$$
$$\mu = 0{,}638 \text{ bis } 0{,}627.$$

Tabelle I.

Die Ausflußcoefficienten für den Ausfluß des Wassers durch rectanguläre Mündungen in einer dünnen verticalen Wand, nach Poncelet und Lesbros.

(Die Druckhöhen sind oberhalb der Mündung an einer Stelle gemessen, wo das Wasser als stillstehend angesehen werden kann. — Die Zahlenwerthe unterhalb der Sterne (*) sind nur durch Interpolation bestimmt worden.)

Druckhöhe oder Abstand des Wasserspiegels von der oberen Seite der Mündung, in Metern.	Mündungshöhen in Metern.							
	Mündungsbreite = 0,2 Meter.						Mündungsbreite = 0,6 Meter.	
	0,20	0,10	0,05	0,03	0,02	0,01	0,20	0,02
0,000	"	"	"	"	"	"	"	"
0,005	"	"	"	"	"	0,705	"	"
0,010	"	"	0,607	0,630	0,660	0,701	"	0,644
0,015	"	0,593	0,612	0,632	0,660	0,697	"	0,644
0,020	0,572	0,596	0,615	0,634	0,659	0,694	"	0,643
0,030	0,578	0,600	0,620	0,638	0,659	0,688	0,593	0,642
0,040	0,582	0,603	0,623	0,640	0,658	0,683	0,595	0,642
0,050	0,585	0,605	0,625	0,640	0,658	0,679	0,597	0,641
0,060	0,587	0,607	0,627	0,640	0,657	0,676	0,599	0,641
0,070	0,588	0,609	0,628	0,639	0,656	0,673	0,600	0,640
0,080	0,589	0,610	0,629	0,638	0,656	0,670	0,601	0,640
0,090	0,591	0,610	0,629	0,637	0,655	0,668	0,601	0,639
0,100	0,592	0,611	0,630	0,637	0,654	0,666	0,602	0,639
0,120	0,593	0,612	0,630	0,636	0,653	0,663	0,603	0,638
0,140	0,595	0,613	0,630	0,635	0,651	0,660	0,603	0,637
0,160	0,596	0,614	0,631	0,634	0,650	0,658	0,604	0,637
0,180	0,597	0,615	0,630	0,634	0,649	0,657	0,605	0,636
0,200	0,598	0,615	0,630	0,633	0,648	0,655	0,605	0,635
0,250	0,599	0,616	0,630	0,632	0,646	0,653	0,606	0,634
0,300	0,600	0,616	0,629	0,632	0,644	0,650	0,607	0,633
0,400	0,602	0,617	0,628	0,631	0,642	0,647	0,607	0,631
0,500	0,603	0,617	0,628	0,630	0,640	0,644	0,607	0,630
0,600	0,604	0,617	0,627	0,630	0,638	0,642	0,607	0,629
0,700	0,604	0,616	0,627	0,629	0,637	0,640	0,607	0,628
0,800	0,605	0,616	0,627	0,629	0,636	0,637	0,606	0,628
0,900	0,605	0,615	0,626	0,628	0,634	0,635	0,606	0,627
1,000	0,605	0,615	0,626	0,628	0,633	0,632	0,605	0,626
1,100	0,604	0,614	0,625	0,627	0,631	0,629	0,604	0,626
1,200	0,604	0,614	0,624	0,626	0,628	0,626	0,604	0,625
1,300	0,603	0,613	0,622	0,624	0,625	0,622	0,603	0,624
1,400	0,603	0,612	0,621	0,622	0,622	0,618	0,603	0,624
1,500	0,602	0,611	0,620	0,620*	0,619*	0,615*	0,602	0,623
1,600	0,602	0,611	0,618	0,618	0,617	0,613	0,602*	0,623
1,700	0,602*	0,610*	0,617	0,616	0,615	0,612	0,602	0,622
1,800	0,601	0,609	0,615*	0,615	0,614	0,612	0,602	0,621*
1,900	0,601	0,608	0,614	0,613	0,612	0,611	0,602	0,621
2,000	0,601	0,607	0,613	0,612	0,612	0,611	0,602	0,620
3,000	0,601	0,603	0,606	0,608	0,610	0,609	0,601	0,615

Anmerkung. Tabellen dieser Art für das preuß. Fußmaß theilt der „Ingenieur" Seite 432 mit.

Tabelle II.

Die Ausflußcoefficienten für den Ausfluß des Wassers durch rectanguläre Mündungen in einer verticalen dünnen Wand, nach Poncelet und Lesbros.

(Die Druckhöhen sind unmittelbar an der Mündung gemessen. — Die Werthe außerhalb der Sterne (*) sind nur durch Interpolation bestimmt worden.)

Druckhöhe oder Abstand des Wasserspiegels von der oberen Seite der Mündung, in Metern.	Mündungshöhen in Metern.						
	Mündungsweite = 0,2 Meter.						Mündungsweite = 0,6 Meter.
	0,20	0,10	0,05	0,03	0,02	0,01	0,20
0,000	0,619	0,667	0,713	0,766	0,783	0,795	0,586
0,005	0,597	0,630*	0,668*	0,725*	0,750*	0,778*	0,587
0,010	0,595	0,618	0,642	0 687	0,720	0,762	0,589
0,015	0,594	0,615	0,639	0,674	0,707	0,745	0,590
0,020	0,594*	0,614	0,638	0,668	6,697	0,729	0,591
0,030	0,593	0,613	0,637	0,659	0,685	0,708	0,592
0,040	0,593	0,612	0,636	0,654	0,678	0,695	0,594*
0,050	0,593	0,612	0,636	0,651	0,672	0,686	0,595
0,060	0,594	0,613	0,635	0,647	0,668	0,681	0,596
0,070	0,594	0,613	0,635	0,645	0,665	0,677	0,597
0,080	0,594	0,613	0,635	0,643	0,662	0,675	0,598
0,090	0,595	0,614	0,634	0,641	0,659	0,672	0,599
0,100	0,595	0,614	0,634	0,640	0,657	0,669	0,600
0,120	0,596	0,614	0,633	0,637	0,655	0,665	0,601
0,140	0,597	0,614	0,632	0,636	0,653	0,661	0,602
0,160	0,597	0,615	0,631	0,635	0,651	0,659	0,602
0,180	0,598	0,615	0,631	0,634	0,650	0,657	0,603
0,200	0,599	0,615	0,630	0,633	0,649	0,656	0,603
0,250	0,600	0,616	0,630	0,632	0,646	0,653	0,604
0,300	0,601	0,616	0,629	0,632	0,644	0,651	0,605
0,400	0,602	0,617	0,629	0,631	0,642	0,647	0,606
0,500	0,603	0,617	0,628	0,630	0,640	0,645	0,607
0,600	0,604	0,617	0,627	0,630	0,638	0,643	0,607
0,700	0,604	0,616	0,627	0,629	0,637	0,640	0,607
0,800	0,605	0,616	0,627	0,629	0,636	0,637	0,607
0,900	0,605	0,615	0,626	0,628	0,634	0,635	0,607
1,000	0,605	0,615	0,626	0,628	0,633	0,632	0,606
1,100	0,604	0,614	0,625	0,627	0,631	0,629	0,606
1,200	0,604	0,614	0,624	0,626	0,628	0,626	0,605
1,300	0,603	0,613	0,622	0,624	0,625	0,622	0,604
1,400	0,603	0,612	0,621	0,622	0,622	0,618	0,603
1,500	0,602	0,611	0,620	0,620*	0,619*	0,615*	0,603
1,600	0,602	0,611	0,618	0,618	0,617	0,613	0,602
1,700	0,602*	0,610*	0,617	0,616	0,615	0,612	0,602
1,800	0,601	0,609	0,615*	0,615	0,614	0,612	0,602
1,900	0,601	0,608	0,614	0,613	0,613	0,611	0,602
2,000	0,601	0,607	0,614	0,612	0,612	0,611	0,602
3,000	0,601	0,603	0,606	0,608	0,610	0,609	0,601

Ueberfälle. Fließt das Wasser durch Ueberfälle (franz. déversoirs; §. 411 engl. overfalls, notches) oder Einschnitte in einer dünnen Wand, wie z. B. FB, Fig. 701, so erleidet der Strahl an drei Seiten eine Contraction, wodurch ebenfalls eine Verminderung der Ausflußmenge herbeigeführt wird. Es ist daher das Ausflußquantum für diese Mündungen:

Fig. 701.

$$Q_1 = {}^2/_3\, \mu b h \sqrt{2gh}$$

zu setzen. Hier ist aber die Druckhöhe $EH = h$, oder der Wasserstand über der Ueberfallsschwelle F nicht unmittelbar an der Schwelle, sondern mindestens 3 Fuß vor der Wand, in welcher sich die Mündung befindet, zu messen, weil der Wasserspiegel vor der Mündung eine Senkung erleidet, die nach der Mündung zu immer größer und größer wird, und in der Mündungsebene selbst eine Größe GR von 0,1 bis 0,25 der Druckhöhe FR beträgt, so daß die Dicke FG des Wasserstrahles in dieser Ebene nur 0,9 bis 0,75 der Druckhöhe oder des Wasserstandes beträgt.

Ueber den Ausfluß des Wassers durch Ueberfälle in dünnen Wänden sind von Vielen Versuche angestellt worden, und es bieten deren Resultate eine große Mannigfaltigkeit, aber nicht überall die gewünschte Uebereinstimmung dar. Die Ergebnisse der Versuche von Poncelet und Lesbros an Ueberfällen von 2 und 6 Decimeter Breite enthalten folgende Tabellen.

1. Tabelle der Ausflußcoefficienten für Ueberfälle von 2 Decimeter Breite, nach Poncelet und Lesbros.

Druckhöhe h in Metern.	0,01	0,02	0,03	0,04	0,06	0,08	0,10	0,15	0,20	0,22
Ausfluß-coefficient $\mu_1 = {}^2/_3\,\mu$.	0,424	0,417	0,412	0,407	0,401	0,397	0,395	0,393	0,390	0,385

2. Tabelle der Ausflußcoefficienten für Ueberfälle von 6 Decimeter Breite.

Druckhöhe h in Metern.	0,06	0,08	0,10	0,12	0,15	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60
Ausfluß-coefficient $\mu_1 = {}^2/_3\,\mu$.	0,412	0,409	0,406	0,403	0,400	0,395	0,391	0,391	0,391	0,390

Bei ungefähren Bestimmungen kann man hiernach $\mu_1 = 0,4$ setzen. Versuche an Ueberfällen mit größeren Breiten gaben Eytelwein im Mittel $\mu_1 = {}^2/_3\, \mu = 0,42$ und Bidone, $\mu_1 = {}^2/_3 \,.\, 0,62 = 0,41$ u. s. w. Die ausgedehntesten Versuche sind von d'Aubuisson und Castel ausgeführt worden. Aus ihnen folgert d'Aubuisson, daß für Ueberfälle, deren Breite nicht mehr als den dritten Theil der Breite des Canales oder der Wand beträgt, worin sich der Ueberfall befindet, μ im Mittel 0,60, also ${}^2/_3\, \mu = 0,40$ zu setzen sei, daß dagegen für Ueberfälle, welche über die ganze Wand weggehen, oder mit dem Canale einerlei Breite haben, $\mu = 0,665$, also $\mu_1 = 0,444$ angenommen werden müsse, daß endlich bei anderen Verhältnissen zwischen der Ueberfall- und Canalbreite die Ausflußcoefficienten sehr verschieden, und zwar zwischen 0,58 und 0,66 liegend, ausfallen. Die 1853 und 1854 in Hanswyk an Ueberfällen von 3 bis 6 Meter Breite und 0,1 bis 1,0 Meter Druckhöhe angestellten Versuche gaben $\mu = 0,64$ bis 0,65, also ${}^2/_3\, \mu = 0,427$ bis 0,433. S. die Zeitschrift des Archit.- und Ingen.-Vereins für Hannover 1857. Die vom Verfasser angestellten Untersuchungen über den Ausfluß des Wassers durch Ueberfälle bringen weiter unten (§. 417) die Veränderlichkeit dieser Ausflußcoefficienten auf Gesetze zurück.

Beispiele. 1) Ein Ueberfall von 0,25 Meter Breite und 0,15 Meter Wasserstand oder Druckhöhe giebt in der Secunde die Wassermenge:

$$Q = 0,393 \,.\, b\, h \sqrt{2\, g\, h} = 0,393 \,.\, 4,429 \,.\, 0,25 \,.\, (0,15)^{3/2} = 0,435 \,.\, 0,0581$$
$$= 0,02527 \text{ Cubikmeter.}$$

2) Welche Breite hat man einem Ueberfalle zu geben, der bei einem Wasserstande von 8 Zoll eine Wassermenge von 6 Cubikfuß pro Secunde durchlassen soll? Es ist:

$$b = \frac{Q_1}{\mu_1 \sqrt{2\, g\, h^3}} = \frac{6}{0,4 \,.\, 7,906 \sqrt{(2/3)^3}} = \frac{6}{3,1624 \,.\, 0,5443} = 3,486 \text{ Fuß.}$$

Nimmt man nach Eytelwein $\mu_1 = 0,42$ an, so folgt:

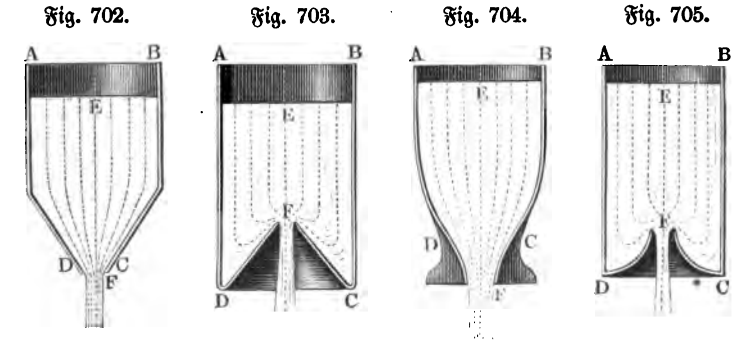
$$b = \frac{6}{3,32 \,.\, 0,5443} = 3,320 \text{ Fuß.}$$

§. 412 **Maximum und Minimum der Contraction.** Bei dem Ausflusse des Wassers durch Mündungen in einer ebenen Wand steht die Axe des Strahles rechtwinkelig auf der Wandfläche und es ist deshalb die Größe der Contraction eine mittlere; bildet aber die Axe der Mündung oder des Strahles einen spitzen Winkel mit dem die Mündung enthaltenden Theile der Wand, so fällt die Contraction kleiner aus, und ist der Winkel zwischen dieser Axe und den inneren Randflächen der Oeffnung ein stumpfer, so stellt sich eine noch größere Contraction heraus. Den einen Fall repräsentirt Fig. 702, und den anderen Fig. 703. Jedenfalls hat diese Verschiedenheit der Contraction darin ihren Grund, daß dort die von den Seiten

zufließenden Wasserelemente weniger, hier aber mehr von ihrer Richtung abgelenkt werden, wenn sie durch die Mündung gehen und zu einem Strahle sich vereinigen.

Die Contraction ist ein Minimum, d. h. Null, wenn durch allmälige Zusammenziehung der die Mündung umfassenden Wand das Zufließen von der Seite ganz verhindert wird, und dagegen ein Maximum, wenn die Wand der Richtung des Strahles entgegen gerichtet ist, so daß gewisse Wasserelemente sich um 180° wenden müssen, um in die Mündung zu gelangen. Beide

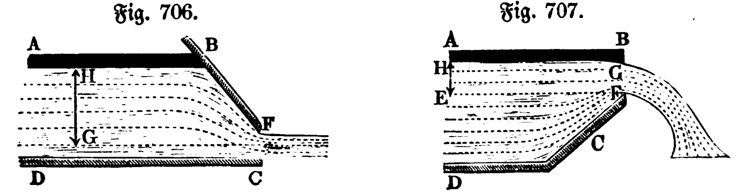
Fig. 702. Fig. 703. Fig. 704. Fig. 705.



Fälle sind in den Figuren 704 und 705 abgebildet. In dem ersten Falle ist der Ausflußcoefficient beinahe 1, nämlich 0,96 bis 0,98, und im zweiten hat er sich bei den Messungen von Borda, Bidone und von dem Verfasser im Mittel = 0,53 herausgestellt.

In der Praxis kommen, durch convergente Wände herbeigeführt, Veränderungen der Ausflußcoefficienten sehr oft vor, namentlich tritt der Fall bei Schützen ein, wenn diese gegen den Horizont geneigt sind, wie z. B. Fig. 706 vor Augen führt. Poncelet fand für eine derartige Schutzöffnung den Ausflußcoefficienten $\mu = 0{,}80$, wenn das Schutzbret 45° geneigt war,

Fig. 706. Fig. 707.



und dagegen μ nur $= 0{,}74$ bei einer Neigung von $63\frac{1}{2}$ Grad, d. h. bei einer Böschung von $\frac{1}{2}$. Für derartige Ueberfälle, Fig. 707, wo ebenfalls wie bei der Poncelet'schen Schütze nur an einer Seite Contraction eintritt, fand der Verfasser $\mu = 0{,}70$, also $\mu_1 = \frac{2}{3}\,\mu = 0{,}467$ bei einer Neigung von 45°; und $\mu = 0{,}67$, also $\mu_1 = 0{,}447$, bei einer Neigung von $63\frac{1}{2}$ Grad.

Nach M. Boileau (s. dessen Traité de la mesure des eaux courants) läßt sich für einen Ueberfall, welcher aufwärts und zwar so geneigt ist, daß das Verhältniß seiner Verticalprojection zur Horizontalprojection = 3, also der Neigungswinkel $71^1/_2$ Grad beträgt, der Ausflußcoefficient = 0,973mal dem Ausflußcoefficienten für einen senkrechten Ueberfall setzen. Ferner folgert Boileau aus seinen Versuchen für senkrechte, gegen den Strom schräg gestellte Ueberfälle, daß bei der Schräge von 45 Grad der Ausflußcoefficient 0,942, und bei der von 65 Grad gar nur 0,911 von dem Werthe des Ausflußcoefficienten des normalen Ueberfalles zu setzen ist, wobei natürlich die Länge der ganzen Ueberfallkante als Mündungslänge angesehen wird.

Beispiel. Wenn das unter dem Winkel von 50 Grad geneigte Schutzbrett, welches quer über ein $2^1/_4$ Fuß breites Gerinne weggeht, $^1/_2$ Fuß hoch gezogen wird, und sich hierauf der Wasserspiegel um 4 Fuß über den Gerinnboden stellt, so läßt sich die Oeffnungshöhe:

$$a = {}^1/_2\, sin.\, 50^0 = 0{,}3830 \text{ Fuß},$$

die Druckhöhe:

$$h = 4 - {}^1/_2 \,.\, 0{,}3830 = 3{,}8085 \text{ Fuß},$$

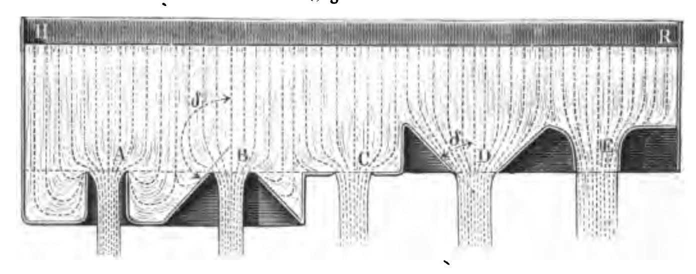
und der Ausflußcoefficient $\mu = 0{,}78$, daher die Ausflußmenge:

$$Q_1 = 0{,}78 \,.\, 2{,}25 \,.\, 0{,}3830 \,.\, 7{,}906\, \sqrt{3{,}8085} = 10{,}36 \text{ Cubikfuß}$$

setzen.

§. 413 **Contractionsscala.** Die Contraction eines Wasserstrahles ist um so größer, je mehr die Richtung des von der Seite zuströmenden Wassers von der Bewegungsrichtung des Strahles abweicht. Bei dem Ausflusse durch die Mündung C, Fig. 708, in der ebenen dünnen Wand beträgt der Winkel δ, um welchen die Bewegungsrichtung der von

Fig. 708.



der Seite zuströmenden Wasserelemente von der Axen- oder Bewegungsrichtung des Strahles abweicht, den Rechtwinkel $\left(\frac{\pi}{2}\right)$, bei der Mündung A, welche von einer dünnen Röhrenwand gebildet wird, mißt dieser Winkel δ, 2 Rechte (π); bei dem Ausflusse durch ein conisch divergentes Mundstück B ist δ zwischen $^1/_2\, \pi$ und π, ferner bei dem Ausflusse durch ein conisch convergentes Ansatz-

stück D ist δ zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$, und bei dem cylindrischen Mundstücke E mit innerer Abrundung ist er $= 0$ Grad zu setzen.

Um das Gesetz kennen zu lernen, nach welchem die Contraction mit dem Winkel δ abnimmt, hat der Verfasser an einer größeren Anzahl von Mundstücken von 2 Centimeter Mündungsweite unter verschiedenem Drucke (von 1 bis 10 Fuß) eine ganze Reihe von Versuchen angestellt; und die Ergebnisse derselben in folgender Tabelle zusammengestellt:

δ	180^0	$157^1/_2{}^0$	135^0	$112^1/_2{}^0$	90^0	$67^1/_2{}^0$	45^0	$22^1/_2{}^0$	$11^1/_4{}^0$	$5^3/_4{}^0$	0^0
μ	0,541	0,546	0,577	0,606	0,632	0,684	0,753	0,882	0,924	0,949	0,966

Diese Tabelle giebt allerdings nur die Ausflußcoefficienten (μ) an, welche den verschiedenen Abweichungswinkeln δ zukommen; die Contractionscoefficienten sind noch ein bis zwei Procent größer, da bei jedem Ausflusse auch ein kleiner Verlust an Geschwindigkeit eintritt. Um bei dem Eintritte des Wassers in die Ansatzstücke D und E keinen Verlust an lebendiger Kraft zu erleiden, wurden diese Stücke bei der Einmündung abgerundet. Die Reibung, welche das Wasser bei der Bewegung an den Wänden dieser Mundstücke zu überwinden hat, wird im folgenden Capitel bestimmt werden.

Anmerkung. Nach den Berechnungen des Herrn Prof. Zeuner (s. „Civilingenieur", Band II., Seite 55) läßt sich, den angegebenen Versuchen zufolge,

$$\mu_\delta = \mu_{1/2\pi} \left(1 + 0{,}33214\,(cos.\,\delta)^3 + 0{,}16672\,(cos.\,\delta)^4\right)$$

setzen, wenn $\mu_{1/2\pi}$ den Ausflußcoefficienten für die Mündung in der dünnen ebenen Wand bezeichnet, wo die größte Ablenkung der Wasserfäden beim Ausfluß $= 1/2\,\pi = 90^0$ ist, und dagegen μ_δ den Ausflußcoefficienten für eine Mündung in der conischen dünnen Wand ausdrückt, wo die größte Ablenkung der Wasserfäden beim Eintritt in die Mündung $= \delta$ mißt.

Partielle Contraction. Wir haben seither nur den Fall kennen gelernt, wo das Wasser von allen Seiten her der Oeffnung zufließt und einen ringsherum contrahirten Strahl bildet, und müssen nun noch auch die Fälle, wenn das Wasser nur von einer oder einigen Seiten her gegen die Oeffnung strömt und deshalb einen nur theilweise contrahirten Strahl hervorbringt, in Untersuchung ziehen. Um diese Contractionsverhältnisse von einander zu unterscheiden, wollen wir den Fall, wenn der Strahl auf allen Seiten contrahirt, die vollständige, und den Fall, wenn der Strahl nur auf einen Theil seines Umfanges zusammengezogen ist, die unvollständige oder partielle Contraction (franz. contraction incomplète; engl. incomplete contraction) nennen. Die unvollständige Contraction wird §. 414

herbeigeführt, wenn eine Mündung in der ebenen dünnen Wand durch andere Wände in der Richtung des Strahles auf einer oder mehreren Seiten eingefaßt ist. In Fig. 709 sind vier gleich große Mündungen *a*, *b*, *c*, *d* im Boden *A C* eines Gefäßes abgebildet. Die Contraction beim Ausflusse durch die Mündung *a* in der Mitte des Bodens ist vollständig, weil bei ihr das Wasser von allen Seiten zuströmen kann; die Contraction beim Ausflusse durch *b*, *c* und *d* ist aber unvollständig, weil bei diesen das Wasser nur von drei, zwei oder einer Seite zuströmen kann. Ebenso, wenn eine rectanguläre Seitenöffnung bis zum Boden des Gefäßes geht, so ist die Contraction partiell, weil dann dieselbe auf der Seite im Boden wegfällt; wenn ferner die Schutzöffnung bis zum Boden und bis an die Seitenwände des Gerinnes reicht, so bleibt nur noch an einer Seite Contraction übrig.

Die partielle Contraction macht sich auf zweierlei Weise bemerklich. Erstens giebt sie dem Strahl eine schiefe Richtung, und zweitens bewirkt sie einen stärkeren Ausfluß.

Fig. 709.

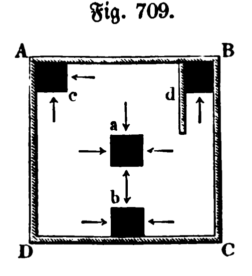
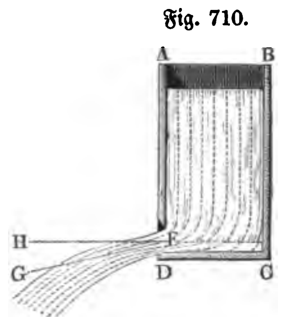


Fig. 710.



Reicht z. B. die Seitenöffnung *F*, Fig. 710, bis an den Boden *CD*, so daß daselbst eine Contraction nicht eintreten kann, so weicht die Axe *FG* des Strahles um einen Winkel *HFG* von ungefähr 9 Grad von der Normalen *FH* der Mündungsebene ab. Viel größer stellt sich aber noch die Schiefe des Strahles heraus, wenn zwei benachbarte Seiten der Mündung eingefaßt sind. Ist die Mündung an zwei gegenüber liegenden Seiten eingefaßt, und die Contraction an denselben aufgehoben, so tritt natürlich eine solche Abweichung nicht ein, wohl aber nimmt der Strahl auf den nicht eingefaßten Seiten in einiger Entfernung außerhalb der Mündung noch mehr Ausbreitung an, als wenn diese Einfassung nicht vorhanden wäre. Wenn auch durch die partielle Contraction eine größere Ausflußmenge erzielt wird, so muß man sie doch in der Regel zu vermeiden suchen, weil durch sie der Strahl eine abweichende Richtung und eine große Ausbreitung erleidet.

Versuche über den Ausfluß des Wassers bei partieller Contraction sind von Bidone und von dem Verfasser angestellt worden. Sie haben gezeigt, daß die Ausflußcoefficienten mit dem Verhältnisse des eingefaßten Theiles

zum ganzen Umfange fast gleichmäßig zunehmen; doch ist leicht zu ermessen, daß diese Beziehung eine andere wird, wenn der Umfang beinahe oder ganz eingefaßt und die Contraction beinahe oder ganz aufgehoben ist. Setzen wir das Verhältniß der Einfassung zum ganzen Umfange, $= n$, und verstehen wir unter $\varkappa$ eine Erfahrungszahl, so können wir, wenn auch nur annähernd, das Verhältniß des entsprechenden Ausflußcoefficienten μ_n der partiellen Contraction zum Ausflußcoefficienten μ_0 bei vollständiger Contraction:

$$\frac{\mu_n}{\mu_0} = 1 + \varkappa n, \text{ und folglich } \mu_n = (1 + \varkappa n)\,\mu_0 \text{ setzen.}$$

Die Versuche Bidone's geben für kleine kreisförmige Mündungen $\varkappa = 0{,}128$ und für quadratische, $\varkappa = 0{,}152$; die des Verfassers haben für kleine rectanguläre Mündungen, $\varkappa = 0{,}134$, für größere (Ponceletmündungen), bei 0,2 Meter Breite und 0,1 Meter Höhe aber, $\varkappa = 0{,}157$ geliefert (s. die Zeitschrift: „der Ingenieur", Bd. 2). In der Anwendung kommen fast nur rectanguläre Mündungen mit Einfassungen vor; wir werden für sie den mittleren Werth $\varkappa = 0{,}155$ annehmen und hiernach

$$\mu_n = (1 + 0{,}155\,.\,n)\,\mu_0$$

setzen. Bei einer rectangulären Seitenöffnung von der Höhe a und Breite b ist $n = \frac{b}{2(a+b)}$, wenn die Contraction an einer Seite b wegfällt, wenn z. B. diese Seite in der Ebene des Bodens liegt, ferner $n = {}^1/_2$, wenn eine Seite a und eine Seite b eingefaßt sind, und $n = \frac{2a+b}{2(a+b)}$, wenn auf einer Seite b und auf beiden Seiten a die Contraction verhindert wird, wenn z. B. die Mündung die ganze Breite des Reservoirs einnimmt und bis zur Bodenebene reicht.

Beispiel. Welches Wasserquantum liefert der Ausfluß des Wassers durch eine 3 Fuß breite und 10 Zoll hohe verticale Schutzöffnung, bei einem Drucke von $1^1/_2$ Fuß über der oberen Mündungsseite, wenn die untere Mündungsseite in den Gerinnboden fällt, und daher die Contraction am Boden wegfällt. Die theoretische Ausflußmenge ist:

$$Q = {}^{10}/_{12}\,.\,3\,.\,7{,}906\,\sqrt{1{,}5 + {}^5/_{12}} = {}^5/_2\,.\,7{,}906\,\sqrt{1{,}9166} = 27{,}35 \text{ Cubikfuß.}$$

Nach der Poncelet'schen Tabelle ist bei vollständiger Contraction, $\mu = 0{,}604$ zu setzen, nun hat man aber:

$$n = \frac{3}{2\,(3 + {}^{10}/_{12})} = \frac{9}{18+5} = {}^9/_{23},$$

daher ist für den vorliegenden Fall der partiellen Contraction:

$$\mu_n = (1 + 0{,}155\,.\,{}^9/_{23})\,.\,0{,}604 = 1{,}060\,.\,0{,}604 = 0{,}640$$

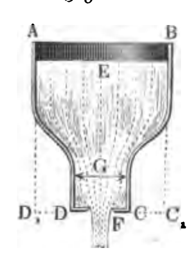
und das effective Ausflußquantum:

$$Q_1 = 0{,}640\ Q = 0{,}640\,.\,27{,}35 = 17{,}50 \text{ Cubikfuß.}$$

Unvollkommene Contraction. Die Contraction des Wasserstrahles §. 415 ist auch noch davon abhängig, ob das Wasser vor der Mündung ziem-

lich in Ruhe steht, oder ob es mit einer gewissen Geschwindigkeit vor derselben ankommt; je schneller das Wasser der Ausflußöffnung zuströmt, je weniger ist auch der Strahl zusammengezogen, desto größer fällt auch die Ausflußmenge aus. Die oben angegebenen und untersuchten Contractions- und Ausflußverhältnisse beziehen sich nur auf den Fall, wenn sich die Mündung in einer großen Wand befindet, und nun angenommen werden kann, daß das Wasser nur mit einer sehr kleinen Geschwindigkeit der Mündung zufließt; wir müssen daher auch die Contractions- und Ausflußverhältnisse kennen lernen, wenn der Mündungsquerschnitt nicht viel kleiner ist als der Querschnitt des zufließenden Wassers, wenn folglich das Wasser schon mit einer beträchtlichen Geschwindigkeit an der Mündung ankommt. Um diese beiden Fälle von einander zu unterscheiden, wollen wir die Contraction bei stillstehendem Oberwasser die vollkommene und die bei bewegtem Oberwasser die unvollkommene Contraction (franz. contraction imparfaite; engl. imperfect contraction) nennen. Unvollkommen ist z. B. die Contraction beim Ausfluß aus dem Gefäße $A\,C$, Fig. 711, weil der Querschnitt F der Mündung nicht viel kleiner ist als der Querschnitt G des ankommenden Wassers oder der Inhalt der Wand CD, in welcher sich diese Mündung befindet. Hätte dagegen das Gefäß die Form $A\,B\,C_1\,D_1$, wäre also der Inhalt der Bodenfläche $C_1\,D_1$ viel größer als der Mündungsquerschnitt F, so würde der Ausfluß mit vollkommener Contraction vor sich gehen. Uebrigens unterscheidet sich der unvollkommen contrahirte Wasserstrahl nicht bloß durch seine größere Stärke, sondern auch dadurch von dem vollkommen contrahirten Wasserstrahle, daß er nicht so durchsichtig und krystallähnlich ist wie dieser.

Fig. 711.



Setzt man das Verhältniß zwischen den Flächenräumen der Mündung F und der Mündungswand G, also $\frac{F}{G}$, $= n$, den Ausflußcoefficienten bei vollkommener Contraction, $= \mu_0$ und den bei unvollkommener Contraction $= \mu_n$, so kann man mit großer Genauigkeit, den vom Verfasser hierüber angestellten Versuchen und Rechnungen zufolge, setzen:

1) für kreisförmige Mündungen:

$$\mu_n = \mu_0 \,[1 + 0{,}04564\,(14{,}821^n - 1)], \text{ und}$$

2) für rectanguläre Mündungen:

$$\mu_n = \mu_0 \,[1 + 0{,}0760\,(9^n - 1)]\ ^*).$$

Zur Erleichterung der Rechnung in Fällen der Anwendung sind die Cor-

*) Versuche über die unvollkommene Contraction des Wassers u. s. w. Leipzig 1843.

rectionen $\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0}$ der Ausflußcoefficienten wegen Unvollkommenheit der Contraction in folgenden kleinen Tabellen zusammengestellt.

Tabelle I.

Die Correctionen der Ausflußcoefficienten für kreisrunde Oeffnungen.

n	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0}$	0,007	0,014	0,023	0,034	0,045	0,059	0,075	0,092	0,112	0,134

n	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00
$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0}$	0,161	0,189	0,223	0,260	0,303	0,351	0,408	0,471	0,546	0,631

Tabelle II.

Die Correctionen der Ausflußcoefficienten für rectanguläre Oeffnungen.

n	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0}$	0,009	0,019	0,030	0,042	0,056	0,071	0,088	0,107	0,128	0,152

n	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00
$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0}$	0,178	0,208	0,241	0,278	0,319	0,365	0,416	0,473	0,537	0,608

Bei diesen Tabellen stehen oben verschiedene Werthe von den Querschnitts-verhältnissen $n = \frac{F}{G}$, und unmittelbar darunter die entsprechenden Zusätze der Ausflußcoefficienten wegen der Unvollkommenheit der Contraction. Z. B. für das Querschnittsverhältniß $n = 0{,}35$, d. i. für den Fall, wenn der Inhalt der Mündung 35 Hundertel vom Inhalte der ganzen Mündungs-wand ist, hat man bei kreisförmigen Mündungen

$$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0} = 0{,}075,$$

und bei rectangulären Mündungen $= 0{,}088$; es ist also der Ausflußcoef-

ficient bei vollkommener Contraction im ersten Falle um 75 Tausendtel und im zweiten um 88 Tausendtel größer zu machen, um den entsprechenden Ausflußcoefficienten bei unvollkommener Contraction zu erhalten. Wäre der Ausflußcoefficient $\mu_0 = 0{,}615$, so hätte man daher im ersten Falle:

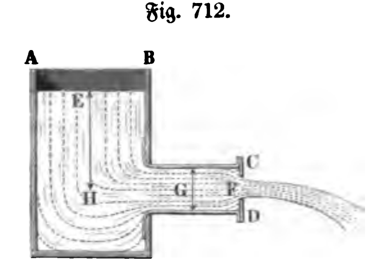
$$\mu_{0,35} = 1{,}075 \,.\, 0{,}615 = 0{,}661,$$

und im zweiten Falle:

$$\mu_{0,35} = 1{,}088 \,.\, 0{,}615 = 0{,}669.$$

Beispiel. Welche Ausflußmenge giebt die rectanguläre $1\frac{1}{4}$ Fuß breite und $\frac{1}{2}$ Fuß hohe Seitenmündung F, wenn dieselbe in einer rectangulären Wand CD, Fig. 712, von 2 Fuß Breite und 1 Fuß Höhe ausgeschnitten ist, und die Druckhöhe $EH = h$ im stillstehenden Wasser 2 Fuß beträgt? Die theoretische Wassermenge ist:

Fig. 712.



$$Q = 1{,}25 \,.\, 0{,}5 \,.\, 7{,}906 \sqrt{2}$$
$$= 4{,}941 \,.\, 1{,}414 = 6{,}987 \text{ Cubikfuß},$$

und der Ausflußcoefficient bei vollkommener Contraction ist nach Poncelet:

$$\mu_0 = 0{,}610;$$

nun ist aber das Querschnittsverhältniß

$$n = \frac{F}{G} = \frac{1{,}25 \,.\, 0{,}5}{2 \,.\, 1} = 0{,}312,$$

und für $n = 0{,}312$, nach Tabelle II., Seite 807,

$$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0} = 0{,}071 + {}^{12}\!/_{50}\,(0{,}088 - 0{,}071) = 0{,}071 + 0{,}004 = 0{,}075$$

zu setzen, daher folgt der Ausflußcoefficient für den vorliegenden Fall:

$$\mu_{0,312} = 1{,}075 \,.\, \mu_0 = 1{,}075 \,.\, 0{,}610 = 0{,}6557$$

und die effective Ausflußmenge:

$$Q_1 = 0{,}6557 \,.\, Q = 0{,}6557 \,.\, 6{,}987 = 4{,}581 \text{ Cubikfuß}.$$

§. 416 **Ausfluss des bewegten Wassers.** Wir haben seither angenommen, daß die Druckhöhe im stillstehenden Wasser gemessen worden ist, und müssen nun noch den Fall abhandeln, wenn nur der Wasserstand des bewegten, der Mündung mit einer gewissen Geschwindigkeit zufließenden Wassers gemessen werden kann. Setzen wir eine rectanguläre Seitenöffnung voraus, bezeichnen wir deren Breite durch b und die Wasserstände in Hinsicht auf die beiden horizontalen Kanten durch h_1 und h_2, die der Geschwindigkeit c des zufließenden Wassers entsprechende Höhe aber durch k, so haben wir die theoretische Ausflußmenge:

$$Q = {}^2\!/_3\, b \sqrt{2g}\, [(h_1 + k)^{3/2} - (h_2 + k)^{3/2}].$$

Diese Formel läßt sich aber nicht unmittelbar anwenden zur Bestimmung der Wassermenge, weil die Geschwindigkeitshöhe

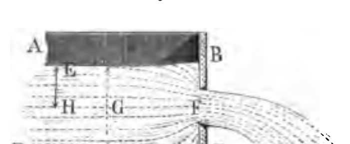
$$k = \frac{c^2}{2g} = \frac{1}{2g}\left(\frac{Q}{G}\right)^2$$

wieder von Q abhängt, und die weitere Umformung auf eine complicirte höhere Gleichung führt; es ist daher weit einfacher, wenn man die effective Wassermenge

$$Q_1 = \mu_1 \, a b \sqrt{2 g h}$$

setzt, und unter μ_1 nicht den bloßen Ausfluß-, sondern einen vorzüglich vom Querschnittsverhältnisse abhängigen Coefficienten versteht. Am häufigsten kommt dieser Fall vor, wenn es darauf abgesehen ist, das in Gerinnen und Canälen fließende Wasser zu messen, weil es hier nur selten möglich ist, das Wasser durch eine die Ausflußöffnung enthaltende Querwand $B C$, Fig 713, so hoch aufzustauen, daß die Mündungsfläche F nur einen kleinen Theil von dem Querschnitt des zufließenden Wasserstromes ausmacht und daher die Geschwindigkeit des letzteren sehr klein gegen die mittlere Geschwindigkeit ausfällt.

Fig. 713.



Aus den vom Verfasser hierüber angestellten Versuchen mit den Poncelet'schen Mündungen, wobei die Druckhöhe ein Meter oberhalb der Mündungsebene gemessen wurde, hat sich ziemlich genau

$$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0} = 0{,}641 \left(\frac{F}{G}\right)^2 = 0{,}641 \,.\, n^2$$

ergeben, wobei $n = \frac{F}{G}$ das Querschnittsverhältniß, welches jedoch nicht viel über $^1/_2$ sein soll, ferner μ_0 den aus der Poncelet'schen Tabelle genommenen Ausflußcoefficienten bei vollkommener Contraction, und μ_n den derselben Mündung im vorliegenden Falle entsprechenden Ausflußcoefficienten bezeichnet. Ist b die Breite, a die Höhe der Mündung, b_1 die Breite und a_1 die Höhe des Wasserstromes und bezeichnet h die Tiefe der oberen Mündungsseite unter dem Wasserspiegel, so hat man hiernach die effective Ausflußmenge:

$$Q_1 = \mu_0 \,.\, a b \left[1 + 0{,}641 \left(\frac{a b}{a_1 b_1}\right)^2\right] \sqrt{2 g \left(h + \frac{a}{2}\right)}.$$

Folgende Tabelle dient zur Abkürzung der Rechnung in Fällen der Anwendung.

n	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0}$	0,002	0,006	0,014	0,026	0,040	0,058	0,079	0,103	0,130	0,160

Beispiel. Um das durch ein 3 Fuß breites Gerinne zugeführte Wasserquantum zu finden hat man eine Spundwand mit einer 2 Fuß weiten und 1 Fuß hohen

rectangulären Mündung eingesetzt, und dadurch das Wasser endlich so aufgestaut, daß es beim Eintritt des Beharrungszustandes um eine Höhe von $2^1/_4$ Fuß über der Sohle und $1^3/_4$ Fuß über der unteren Kante der Mündung stand. Die entsprechende theoretische Wassermenge ist:

$$Q = a\,b\,\sqrt{2\,g\,h} = 1\,.\,2\,.\,7{,}906\,\sqrt{1{,}25} = 15{,}812\,.\,1{,}118$$
$$= 17{,}68 \text{ Cubikfuß,}$$

der Ausflußcoefficient bei vollkommener Contraction läßt sich 0,602 setzen, und das Querschnittsverhältniß:

$$n = \frac{F}{G} = \frac{a\,b}{a\,b_1} = \frac{1\,.\,2}{2{,}25\,.\,3} = 0{,}296,$$

daher folgt der Ausflußcoefficient für das vorstehende Ausflußverhältniß

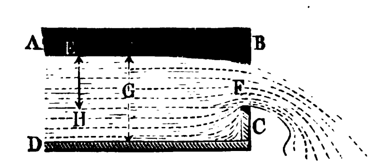
$$\mu_n = (1 + 0{,}641\,.\,0{,}296^2)\,\mu_0 = 1{,}056\,.\,0{,}602 = 0{,}6357$$

und das effective Ausflußquantum

$$Q_1 = 17{,}68\,.\,0{,}6357 = 11{,}24 \text{ Cubikfuß.}$$

§. 417 Die unvollkommene Contraction kommt auch beim Ausflusse durch Ueberfälle, wie Fig. 714, vor, wenn der Querschnitt F des über der Schwelle bei C wegfließenden Wassers ein ansehnlicher Theil vom Querschnittte G des zufließenden Wassers ist. Die Ueberfälle können aber entweder nur einen Theil der Breite des Reservoirs oder Canales einnehmen, oder sie können über die ganze Breite des Gerinnes weggehen. In dem letzten Falle ist auch die Contraction an den Seiten der Mündung Null, und es fließt also aus diesem Grunde mehr Wasser durch, als bei den Ueberfällen der ersten Art. Auch über diese Ausflußverhältnisse hat der Verfasser Versuche angestellt, und aus den Ergebnissen derselben Formeln abgeleitet, wodurch sich mit ziemlicher Sicherheit mit Hülfe des Querschnittsverhältnisses $n = \frac{F}{G}$ der entsprechende Ausflußcoefficient berechnen läßt.

Fig. 714.



Ist h die Druckhöhe EH über der Ueberfallschwelle, a_1 die ganze Wasserhöhe, b die Breite des Ueberfalles und b_1 die des zufließenden Wassers, so haben wir hier:

$$n = \frac{F}{G} = \frac{h\,b}{a_1\,b_1},$$

und 1) für die Poncelet'schen Ueberfälle:

$$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0} = 1{,}718\left(\frac{F}{G}\right)^4 = 1{,}718\,.\,n^4,$$

dagegen 2) für die die ganze Gerinnbreite einnehmenden Ueberfälle:

$$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0} = 0{,}041 + 0{,}3693\;n^2;$$

es ist daher im ersten Falle die Ausflußmenge:

$$Q_1 = \frac{2}{3}\mu_0 . b\left[1 + 1{,}718\left(\frac{hb}{a_1 b_1}\right)^4\right]\sqrt{2gh^3},$$

und im zweiten Falle:

$$Q_1 = \frac{2}{3}\mu_0 . b\left[1{,}041 + 0{,}3693\left(\frac{h}{a_1}\right)^2\right]\sqrt{2gh^3},$$

wo h den etwa 1 Meter vor dem Ueberfall gemessenen Wasserstand EH über der Ueberfallschwelle F bezeichnet.

In folgenden Tabellen sind die Correctionen $\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0}$ für die einfachsten Werthe von n zusammengestellt.

Tabelle I.

Correctionen der Ausflußcoefficienten für die Poncelet'schen Ueberfälle.

n	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0}$	0,000	0,000	0,001	0,003	0,007	0,014	0,026	0,044	0,070	0,107

Tabelle II.

Correctionen für Ueberfälle über die ganze Wand, oder ohne Seitencontraction.

n	0,00	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0}$	0,041	0,042	0,045	0,049	0,056	0,064	0,074	0,086	0,100	0,116	0,133

Beispiel. Um das in einem 5 Fuß breiten Canale fortgeführte Wasserquantum zu bestimmen, hat man eine Spundwand mit einer nach außen abgeschrägten Kante eingezogen, und das Wasser über diese wegfließen lassen. Nachdem das Steigen des Oberwassers aufgehört hatte, ergab sich der Wasserstand über dem Gerinnboden $3\frac{1}{2}$ Fuß, und über der Schwelle $1\frac{1}{2}$ Fuß; es war daher die theoretische Ausflußmenge:

$$Q = \frac{2}{3} . 5 . 7{,}906 . \left(\frac{3}{2}\right)^{3/2} = 48{,}41 \text{ Cubikfuß}.$$

Der Ausflußcoefficient fällt hier, da $\frac{h}{a_1} = \frac{1{,}5}{3{,}5} = \frac{3}{7}$ und $\mu_0 = 0{,}577$ ist,

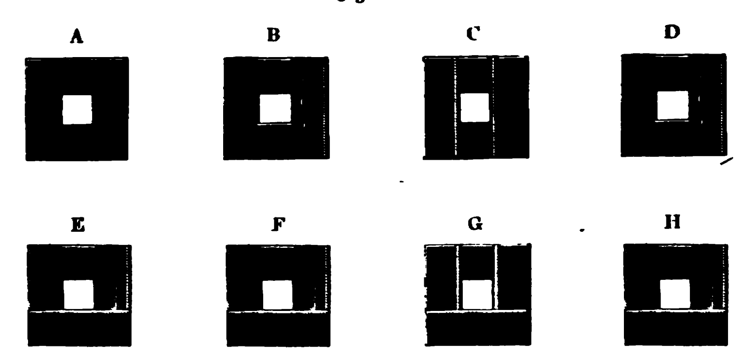
$$\mu_{3/7} = [1{,}041 + 0{,}3693 . (3/7)^2] . 0{,}577 = 1{,}110 . 0{,}577 = 0{,}64 \text{ aus,}$$

daher die effective Wassermenge:

$$Q_1 = 0{,}64 . Q = 0{,}64 . 48{,}41 = 31 \text{ Cubikfuß}.$$

§. 418 **Versuche von Lesbros.** Eine große Anzahl von Versuchen über den Ausfluß des Wassers durch rectanguläre Mündungen in der dünnen Wand mit verschiedenartigen inneren und äußeren Einfassungswänden (bei partieller und unvollkommener Contraction des Wasserstrahles) sind von dem Herrn Lesbros (s. dessen Expériences hydrauliques sur les lois de l'écoulement de l'eau) ausgeführt worden. Wir theilen hiervon im Folgenden nur die Hauptresultate der an einer rectangulären Mündung von 2 Decimeter Weite angestellten Versuche mit. Die so verschieden eingefaßten Mündungen sind in der Fig. 715 durch die Buchstaben *A*, *B*, *C* u. s. w. von einander unterschieden, und zwar bezeichnet:

Fig. 715.



A eine gewöhnliche Mündung ohne alle Einfassung (wie in §. 410);
B eine solche Mündung innen an einer Seite mit einer verticalen Wand bekleidet, welche 2 Centimeter von der einen Seitenkante der Mündung absteht, und rechtwinkelig gegen die Mündungsebene gerichtet ist;
C die erste Mündung auf jeder Seite mit einer solchen Wand eingefaßt;
D die Mündung *A* innen auf beiden Seiten mit verticalen Wänden eingefaßt, welche unter einem Winkel von 90 Grad gegen einander convergiren, und hierbei unter einem Winkel von 45 Grad, und zwar in dem Abstande = 2 Centimeter von den Seitenkanten der Mündung, an die Mündungsebene anstoßen;
E die Mündung *A* mit einer horizontalen Wand, welche quer über dem Ausflußreservoir weggeht und genau bis an die untere Mündungskante reicht;
F die Mündung *B*,
G die Mündung *C*, und
H die Mündung *D* mit einer horizontalen Wand wie in *E*, welche die Contraction an der unteren Mündungskante ganz aufhebt.

I.

Tabelle der Ausflußcoefficienten für den freien Ausfluß durch die Mündungen A, B, C u. s. w.

Druckhöhe über der oberen Mündungskante, oberhalb der Mündungsebene gemessen.	Mündungshöhe.	Ausflußcoefficienten für die Mündungen:							
		A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*
Meter.	Meter.								
0,020		0,572	0,587	—	0,589	0,599	—	—	—
0,050		0,585	0,593	0,631	0,595	0,608	0,622	—	0,636
0,100		0,592	0,600	0,631	0,601	0,615	0,628	—	0,639
0,200		0,598	0,606	0,632	0,607	0,621	0,633	0,708	0,643
0,500	0,200	0,603	0,610	0,631	0,611	0,623	0,636	0,680	0,644
1,000		0,605	0,611	0,628	0,612	0,624	0,637	0,676	0,642
1,500		0,602	0,611	0,627	0,611	0,624	0,637	0,672	0,641
2,000		0,601	0,610	0,626	0,611	0,619	0,636	0,668	0,640
3,000		0,601	0,609	0,624	0,610	0,614	0,634	0,665	0,638
0,020		0,616	0,627	0,647	0,631	0,664	0,663	—	0,678
0,050		0,625	0,630	0,646	0,632	0,667	0,669	0,690	0,677
0,100		0,630	0,633	0,645	0,633	0,669	0,674	0,688	0,677
0,200		0,631	0,635	0,642	0,633	0,670	0,676	0,687	0,675
0,500	0,050	0,628	0,634	0,637	0,632	0,668	0,676	0,682	0,671
1,000		0,625	0,628	0,635	0,627	0,666	0,672	0,680	0,670
1,500		0,619	0,622	0,634	0,621	0,665	0,670	0,678	0,670
2,000		0,613	0,616	0,634	0,615	0,664	0,670	0,674	0,669
3,000		0,606	0,609	0,632	0,608	0,662	0,669	0,673	0,668

II.

Tabelle der Ausflußcoefficienten für den Ausfluß durch die Mündungen *A*, *B*, *C* u. s. w. mit äußeren Ansatzgerinnen.

Die Gerinne schlossen sich genau an die Mündung an, die dadurch ihre Abschrägungen an den Seiten und am Boden verloren. Sie waren entweder horizontal und 3 Meter lang oder, und zwar bei den mit * bezeichneten Versuchen, um $^1/_{10}$ ihrer nur 2,5 Meter betragenden Länge geneigt.

Druckhöhe über der oberen Mündungskante, oberhalb der Mündungsebene gemessen.	Mündungshöhe.	Ausflußcoefficienten für die Mündungen:									
		A	*B*	*C*	*E*	*E**	*F*	*F**	*G*	*G**	*H*
Meter.	Meter.										
0,020	0,200	0,480	0,489	0,496	0,480	0,527	—	—	—	—	0,488
0,050	0,200	0,511	0,517	0,531	0,510	0,553	0,509	0,546	0,528	—	0,520
0,100	0,200	0,542	0,545	0,563	0,538	0,574	0,534	0,569	0,560	0,593	0,552
0,200	0,200	0,574	0,576	0,591	0,566	0,592	0,562	0,589	0,589	0,617	0,582
0,500	0,200	0,599	0,602	0,621	0,592	0,607	0,591	0,608	0,591	0,632	0,613
1,000	0,200	0,601	0,609	0,628	0,600	0,610	0,601	0,615	0,601	0,638	0,623
1,500	0,200	0,601	0,610	0,627	0,602	0,610	0,604	0,617	0,604	0,641	0,624
2,000	0,200	0,601	0,610	0,626	0,602	0,609	0,604	0,617	0,604	0,642	0,624
3,000	0,200	0,601	0,609	0,624	0,601	0,608	0,602	0,616	0,602	0,641	0,622
0,020	0,050	0,488	0,555	0,557	0,487	0,585	0,483	0,579	0,512	—	0,494
0,050	0,050	0,577	0,600	0,603	0,571	0,614	0,570	0,611	0,582	0,625	0,577
0,100	0,050	0,624	0,625	0,628	0,605	0,632	0,609	0,628	0,621	0,639	0,616
0,200	0,050	0,631	0,633	0,637	0,617	0,645	0,623	0,643	0,637	0,649	0,629
0,500	0,050	0,625	0,630	0,635	0,626	0,652	0,630	0,650	0,647	0,656	0,636
1,000	0,050	0,624	0,627	0,635	0,628	0,651	0,633	0,651	0,649	0,656	0,638
1,500	0,050	0,619	0,622	0,634	0,627	0,650	0,632	0,651	0,647	0,656	0,637
2,000	0,050	0,613	0,616	0,634	0,623	0,650	0,631	0,651	0,644	0,656	0,635
3,000	0,050	0,606	0,609	0,632	0,618	0,649	0,628	0,651	0,639	0,656	0,632

Beispiel. Welches Ausflußquantum giebt eine rectanguläre Mündung von 2 Decimeter Breite und 1 Decimeter Höhe, wenn die untere Kante derselben 0,35 Meter unter dem Wasserspiegel und mit dem Boden des Ausflußgefäßes in einerlei Höhe steht, und zwar 1) beim freien Ausfluß, und 2) beim Ausfluß durch ein kurzes horizontales Ansatzgerinne? Man hat es hier mit der Mündung E zu thun, wobei die Druckhöhe über der oberen Kante, $= 0{,}35 - 0{,}10 = 0{,}25$ Meter ist. Die Tabelle I. giebt für den Werth 0,20 Meter dieser Höhe bei der Mündungshöhe $= 0{,}20$ Meter, den Ausflußcoefficienten $\mu = 0{,}621$, und dagegen bei der Mündungshöhe $= 0{,}05$ Meter, $\mu = 0{,}670$; daher möchte für den ersten Fall der Aufgabe

$$\mu_1 = \frac{0{,}621 + 0{,}670}{2} = 0{,}645 \text{ zu setzen sein.}$$

Die Tabelle II. giebt dagegen bei der Wasserhöhe 0,25 Meter über der oberen Mündungskante durch Interpolation für μ die Werthe:

$$0{,}566 + \tfrac{5}{30}\,(0{,}592 - 0{,}566) = 0{,}570, \text{ und}$$
$$0{,}617 + \tfrac{5}{30}\,(0{,}626 - 0{,}617) = 0{,}619,$$

folglich ist für den zweiten Fall

$$\mu_2 = \frac{0{,}570 + 0{,}619}{2} = 0{,}594 \text{ zu setzen.}$$

Der Querschnitt der Mündung ist:

$$F = a\,b = 0{,}20 \,.\, 0{,}10 = 0{,}020 \text{ Quadratmeter,}$$

und die mittlere Druckhöhe ist:

$$h = 0{,}350 - 0{,}050 = 0{,}300 \text{ Meter,}$$

folglich die theoretische Ausflußmenge:

$$Q = F\,\sqrt{2\,g\,h} = 0{,}02\,\sqrt{2 \,.\, 9{,}81 \,.\, 0{,}3} = 0{,}02\,\sqrt{5{,}886}$$
$$= 0{,}02 \,.\, 2{,}425 = 0{,}0485 \text{ Cubikmeter;}$$

sowie die effective Ausflußmenge, im ersten Falle:

$$Q_1 = \mu_1\,Q = 0{,}645 \,.\, 0{,}0485 = 0{,}0313 \text{ Cubikmeter,}$$

und dagegen im zweiten Falle, d. i. bei einem Ansatzgerinne:

$$Q_2 = \mu_2\,Q = 0{,}594 \,.\, 0{,}0485 = 0{,}0288 \text{ Cubikmeter.}$$

Nach der Formel $\mu_n = (1 + 0{,}155\,n)\,\mu_0$ in §. 414 für den Ausfluß bei partieller Contraction läßt sich, da hier vom ganzen Mündungsumfang $2/6 = 1/3$ eingefaßt ist, $\mu_n = \mu_{1/3} = (1 + 0{,}052)\,\mu_0 = 1{,}052\,\mu_0$ setzen. Nun ist aber für eine solche Mündung bei vollständiger Contraction nach Tabelle I., Seite 797, $\mu_0 = 0{,}616$, daher folgt hiernach:

$$\mu_{1/3} = 1{,}052 \,.\, 0{,}616 = 0{,}648, \text{ und}$$
$$Q_1 = \mu_{1/3}\,Q = 0{,}648 \,.\, 0{,}0485 = 0{,}0314 \text{ Cubikmeter,}$$

also wenig größer als nach der Lesbros'schen Tabelle.

§. 419 Herr Lesbros hat auch noch mittels der Mündungen A, B, C u. s. w. Versuche über den Ausfluß bei Ueberfällen, wobei der Wasserspiegel die obere Kante der Mündung nicht erreicht, angestellt, und es sind die Hauptergebnisse derselben in folgenden Tabellen zusammengestellt worden.

I. Tabelle der Ausflußcoefficienten ($^2/_3\,\mu$) für den freien Ausfluß durch Ueberfälle oder Wandeinschnitte.

Druckhöhe über der Schwelle im stillstehenden Wasser gemessen.	Ausflußcoefficienten für die Mündungen:						
	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*
Meter.							
0,015	0,421	0,450	0,450	0,441	0,395	0,371	0,305
0,020	0,417	0,446	0,444	0,437	0,402	0,379	0,318
0,030	0,412	0,437	0,435	0,430	0,410	0,388	0,337
0,040	0,407	0,430	0,429	0,424	0,411	0,394	0,352
0,050	0,404	0,425	0,426	0,419	0,411	0,398	0,362
0,070	0,398	0,416	0,422	0,412	0,409	0,402	0,375
0,100	0,395	0,409	0,420	0,405	0,408	0,405	0,382
0,150	0,393	0,406	0,423	0,403	0,407	0,407	0,383
0,200	0,390	0,402	0,424	0,403	0,405	0,408	0,383
0,250	0,379	0,396	0,422	0,401	0,404	0,407	0,381
0,300	0,371	0,390	0,418	0,398	0,403	0,406	0,378

II. Tabelle der Ausflußcoefficienten ($^2/_3\,\mu$) für den Ausfluß durch Ueberfälle mit kurzen Ansatzgerinnen.

Druckhöhe über der Schwelle, im stillstehenden Wasser gemessen.	Ausflußcoefficienten für die Mündungen:							
	A	*B*	*C*	*C**	*E*	*F*	*G*	*H*
Meter.								
0,015	—	0,375	0,388	0,400	—	—	—	—
0,020	0,196	0,368	0,383	0,395	0,208	0,201	0,175	0,190
0,030	0,234	0,358	0,373	0,385	0,232	0,228	0,205	0,222
0,040	0,263	0,351	0,365	0,379	0,251	0,250	0,234	0,250
0,050	0,278	0,346	0,360	0,375	0,268	0,267	0,260	0,272
0,070	0,292	0,343	0,352	0,371	0,288	0,289	0,285	0,296
0,100	0,304	0,340	0,345	0,369	0,302	0,304	0,299	0,313
0,150	0,315	0,335	0,340	0,367	0,314	0,316	0,313	0,327
0,200	0,319	0,331	0,338	0,366	0,323	0,322	0,322	0,335
0,250	0,321	0,328	0,336	0,364	0,329	0,326	0,329	0,341
0,300	0,324	0,326	0,334	0,361	0,332	0,329	0,332	0,345

Die Vergleichung der Coefficienten in Tabelle I. und Tabelle II. zeigt, daß durch die kurzen Ansatzgerinne die Ausflußmenge bei Mündungen mit dem kurzen Gerinne kleiner ausfällt als bei Mündungen ohne dieses Gerinne, und zwar um so kleiner, je kleiner die Druckhöhe ist; auch ist aus der Vergleichung zwischen den Columnen unter C und C^*, sowie unter E, E^*, F, F^* und G, G^* in den Tabellen des vorigen Paragraphen zu ersehen, daß die geneigten Ansatzgerinne den Ausfluß weniger stören als die horizontalen.

Anmerkung 1. Eine abweichende Theorie über den Ausfluß entwickelt G. Boileau in seinen Traité sur la mesure des eaux courantes. Hiernach ist die Geschwindigkeit des ausfließenden Wassers an allen Stellen des Querschnittes eine und dieselbe, und zwar entsprechend der Tiefe der oberen Begrenzungslinie des Strahles in der Ebene der Mündung unter dem Wasserspiegel im Ausflußreservoir. Dieselbe Formel wendet Boileau auch auf Ueberfälle an; wobei er natürlich stets die Kenntniß der Strahlhöhe in der Mündungsebene nöthig hat. Später, im 12. Bande der 5. Reihe von den Annales des mines, 1857, hat Herr Clarinval eine andere Formel für den Ausfluß durch Ueberfälle entwickelt, in welcher gar keine Erfahrungszahl μ vorkommt, sondern statt $\frac{2}{3}\mu$ der Factor

$\frac{a\sqrt{1-\frac{a}{h}}}{\sqrt{2(h^2-a^2)}}$, worin h die Druckhöhe und a die Strahldicke über der Ueberfallschwelle bezeichnen, einzusetzen ist. S. den „Civilingenieur" Band V. Ich halte die Begründung dieser Formel nicht für richtig.

Anmerkung 2. Herr J. Francis giebt in seinem Werke: „The Lowell Hydraulic Experiments, Boston 1855", für den Ausfluß durch breite Ueberfälle folgende Formel an:

$$Q = 3{,}33\,(l - 0{,}1\,n\,h)\,h^{3/2} \text{ Cubikfuß engl.},$$

worin h die Druckhöhe über der Schwelle, l die Länge der letzteren und n entweder 0 oder 1 oder 2 ist, je nachdem die Contraction des Wasserstrahles an beiden, an einer, oder an keiner Seite aufgehoben ist. Da für das englische Maß

$$\sqrt{2g} = 8{,}025$$

ist, so hat man folglich hiernach:

$$\tfrac{2}{3}\mu = \frac{3{,}33}{8{,}025} = 0{,}415.$$

Die Versuche, worauf sich diese Formel gründet, sind an 10 Fuß breiten Ueberfällen und bei 0,6 bis 1,6 Fuß Druckhöhe angestellt worden. Die Ueberfallkante wurde durch eine stromabwärts abgeschrägte eiserne Platte gebildet, das Reservoir hatte eine Breite von 13,96 Fuß, und die Schwelle stand 4,6 Fuß über dem Boden desselben. Siehe den „Civilingenieur", Band II., 1856.

Bakewell's Versuche über den Ausfluß durch Ueberfälle (s. polytechn. Centralblatt 18. Jahrgang 1852) liefern zum Theil ziemlich abweichende Resultate.

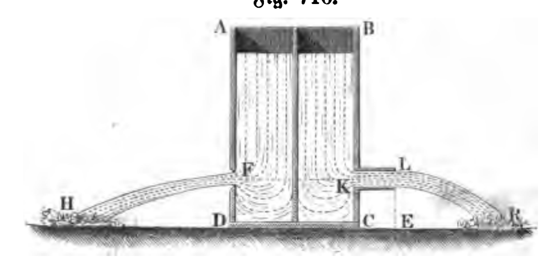
Anmerkung 3. An den Schützen der Hammerräder zu Remscheid hat Herr Röntchen $\mu = 0{,}90$ bis $0{,}93$ gefunden. S. Dingler's Journal, Bd. 158.

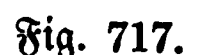
Drittes Capitel.

Von dem Ausflusse des Wassers durch Röhren.

§. 420 **Kurze Ansatzröhren.** Läßt man das Wasser durch eine kurze Ansatzröhre (franz. tuyau additionel; engl. short pipe) ausfließen, so treten ganz andere Verhältnisse ein, als wenn es durch Mündungen in der dünnen, oder durch nach außen abgeschrägte Mündungen in der dicken Wand ausfließt. Ist die Ansatzröhre prismatisch, und ihre Länge $2^1/_2$ bis 3 mal so groß als ihre Weite, so giebt sie einen uncontrahirten und undurchsichtigen Strahl, welcher eine kleinere Sprungweite und daher auch eine kleinere Geschwindigkeit hat, als der durch eine Mündung in der dünnen Wand unter übrigens gleichen Umständen ausfließende Strahl. Hat also die Röhre KL mit der Mündung F, Fig. 716, gleichen Querschnitt und ist auch die Druckhöhe von

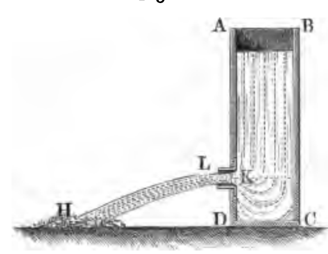
Fig. 716.





beiden eine und dieselbe, so erhält man in LR einen trüben und uncontrahirten, also dickeren, und in FH einen klaren und contrahirten, also schwächeren Strahl, und es läßt sich auch wahrnehmen, daß die Sprungweite ER kleiner ist als die Sprungweite DH. Dieses Ausflußverhältniß tritt aber nur dann ein, wenn die Röhre die angegebene Länge hat; ist die Röhre kürzer, vielleicht nur so lang als weit, so legt sich der Strahl KR, Fig. 717, gar nicht an die Röhrenwand an, es bleibt die Röhre ganz ohne Einwirkung auf den Ausfluß, und der Strahl fällt wie beim Ausflusse durch Mündungen in der dünnen Wand aus.

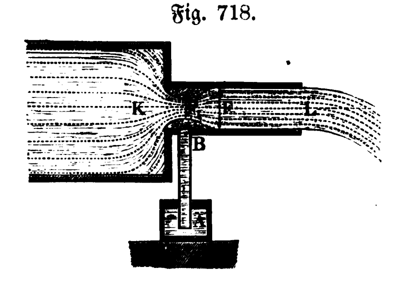
Fig. 717.



Zuweilen findet auch bei Röhren von größerer Länge ein Ausfüllen der Röhre durch den Strahl nicht statt, nämlich dann, wenn dem Wasser keine

Gelegenheit gegeben worden ist, mit der Röhrenwand in Berührung zu kommen; verschließt man aber in diesem Falle die äußere Mündung durch die Hand oder durch ein Brett auf einige Augenblicke, so bildet sich nachher ein die Röhre vollkommen füllender Strahl, und es findet ein sogenannter voller Ausfluß (franz à gueule bée; engl. of filled tube) statt. Die Contraction des Wasserstrahles findet auch beim Ausfluß durch Röhren statt, nur fällt hier der contrahirte Theil in das Innere der Röhre. Man kann sich hiervon überzeugen, wenn man sich gläserner Ansatzröhren, wie KL Fig. 718, bedient, und kleine Körper im Wasser schwimmen läßt, denn man bemerkt in diesem Falle, daß nur in der Mitte des Querschnittes F_1 nahe hinter der Eintrittsstelle K, nicht aber am Umfange desselben progressive Bewegung vorhanden ist, daß hier vielmehr nur eine wirbelnde Bewegung stattfindet. Es ist aber die Capillarität oder die Adhäsion des Wassers an der Röhrenwand, welche macht, daß das Wasser das Ende FL der Röhre ganz ausfüllt. Das aus der Röhre fließende Wasser hat nur den der Atmosphäre gleichen Druck, nun ist aber der contrahirte Querschnitt F_1 nur α mal so groß als der Querschnitt F der Röhre, und deshalb die Geschwindigkeit v_1 in ihm $\frac{1}{\alpha}$ mal so groß als die Ausflußgeschwindigkeit v, daher ist auch der Druck des Wassers in der Nähe von F_1 kleiner als beim Austritte, oder als der Atmosphärendruck. Bohrt man bei F_1 ein enges Loch in die Röhre, so findet auch wirklich kein Ausfluß durch dasselbe, sondern vielmehr ein Einsaugen von Luft statt, auch hört endlich der volle Ausfluß und die Einwirkung der Ansatzröhre ganz auf, wenn man das Loch weiter macht, oder mehrere Löcher anbringt. Ebenso kann man auch das Wasser in der Röhre AB zum Steigen und zum Ausfluß durch die Röhre KL bringen, wenn man dieselbe bei F_1 in die letztere einmünden läßt. Der volle Ausfluß hört bei der einfachen cylindrischen Röhre ganz auf, wenn die Druckhöhe ein gewisse Größe erreicht, siehe §. 439, Capitel IV.

Fig. 718.



§. 421 **Cylindrische Ansatzröhren.** Ueber den Ausfluß des Wassers durch kurze cylindrische Ansatzröhren sind von Vielen Versuche angestellt worden, doch weichen die Resultate derselben ziemlich viel von einander ab. Namentlich sind es die Bossut'schen Ausflußcoefficienten, welche durch ihre Kleinheit (0,785) von den von Anderen gefundenen bedeutend abweichen.

Aus den Versuchen von Michelotti mit $1^1/_2$ bis 3 Zoll weiten Röhren und bei 3 bis 20 Fuß Druckhöhe folgt im Mittel dieser Ausflußcoefficient $\mu = 0{,}813$. Die Versuche von Bidone, Eytelwein und d'Aubuisson weichen hiervon nur wenig ab. Im Mittel läßt sich aber, namentlich auch den Versuchen des Verfassers entsprechend, der Ausflußcoefficient für kurze cylindrische Ansatzröhren $\mu = 0{,}815$ setzen. Da wir denselben für runde Mündungen in der dünnen Wand 0,615 gefunden haben, so folgt, daß unter übrigens gleichen Umständen und Verhältnissen durch kurze Ansatzröhren $^{815}/_{615} = 1{,}325$ mal so viel Wasser ausfließt als durch runde Mündungen in der dünnen Wand. Uebrigens wachsen diese Ausflußcoefficienten, wenn die Röhrenweite kleiner wird, und nehmen auch wenig zu bei Abnahme der Druckhöhe oder Ausflußgeschwindigkeit. Nach den bei einem Drucke von 0,23 bis 0,60 Meter angestellten Versuchen des Verfassers ist für Röhren, welche 3 mal so lang als weit sind:

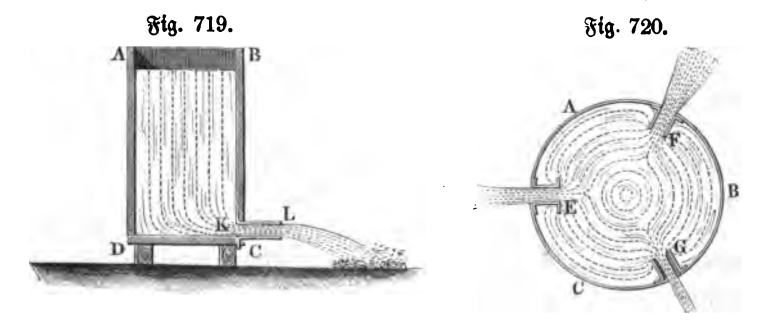
bei	1	2	3	4 Centimeter Weite
$\mu =$	0,843	0,832	0,821	0,810

Dieser Tabelle zufolge nehmen also die Ausflußcoefficienten merklich zu, wenn die Röhrenweite kleiner wird. Ebenso fand Buff bei einer 2,79 Linien weiten und 4,3 Linien langen Röhre die Ausflußcoefficienten allmälig von 0,825 bis 0,855 zunehmend, wenn die Druckhöhe von 33 bis $1^1/_2$ Zoll nach und nach herabsank.

Beim Ausflusse des Wassers durch kurze parallelepipedische Ansatzröhren fand der Verfasser einen Ausflußcoefficienten von 0,819.

Sind die Ansatzröhren KL, Fig. 719, inwendig theilweise eingefaßt, stoßen sie z. B. mit der einen Seite an den Boden CD des Gefäßes an, und wird dadurch eine partielle Contraction herbeigeführt, so steigt, nach den Versuchen des Verfassers, der Ausflußcoefficient nicht ansehnlich, wohl aber fließt das Wasser an verschiedenen Stellen des Querschnittes mit verschiedenen Ge-

Fig. 719. Fig. 720.



schwindigkeiten, und zwar auf der Seite C schneller aus, als auf der gegenüberliegenden.

Wenn die innere Stirnfläche einer Ansatzröhre nicht in die Wandfläche fällt, sondern vorsteht, wie E, F, G, Fig. 720, so nennt man diese Röhre eine **innere Ansatzröhre**. Ist die Stirnfläche dieser Röhre mindestens $^1/_5$mal so breit als die Röhre weit, wie z. B. E, so bleibt der Ausflußcoefficient derselbe, als wenn die Stirnfläche in der Ebene der Wand läge, ist aber die Stirnfläche schmaler, wie z. B. F und G, so fällt der Ausflußcoefficient kleiner aus. Bei einer sehr schmalen fast verschwindenden Stirnfläche wird derselbe den Versuchen Bidone's und des Verfassers zufolge 0,71, wenn der Strahl die Röhre ausfüllt; dagegen 0,53 (vergl. §. 412), wenn er sich gar nicht an die innere Röhrenwand anlegt. Im ersten Falle (F) ist der Strahl ganz zerrissen und besenförmig divergirend, im zweiten (G) aber stark zusammengezogen und ganz krystallrein.

§. 422 **Widerstandscoefficient.** Da das Wasser ohne Contraction aus der prismatischen Ansatzröhre tritt, so folgt, daß bei dem Ausflusse durch diese Mundstücke der Contractionscoefficient $\alpha =$ Eins und der Geschwindigkeitscoefficient $\varphi =$ dem Ausflußcoefficienten μ ist. Eine mit der Geschwindigkeit v ausströmende Wassermenge Q besitzt die lebendige Kraft $\frac{Q\gamma}{g}\, v^2$ und kann dadurch die mechanische Arbeit $\frac{v^2}{2g}\, Q\gamma$ (s. §. 74) verrichten. Nun ist aber bei dem Ausflusse die theoretische Geschwindigkeit $= \frac{v}{\varphi}$, daher entspricht der ausfließenden Wassermasse die Leistung $\frac{1}{\varphi^2} \cdot \frac{v^2}{2g} \cdot Q\gamma$, und es verliert sonach die Wassermenge Q durch den Ausfluß die **mechanische Arbeit**:

$$\left(\frac{1}{\varphi^2} \cdot \frac{v^2}{2g} - \frac{v^2}{2g}\right) Q\gamma = \left(\frac{1}{\varphi^2} - 1\right) \frac{v^2}{2g}\, Q\gamma.$$

Beim Ausflusse durch Mündungen in der dünnen Wand ist φ im Mittel $= 0{,}975$, daher beträgt hier der Arbeitsverlust:

$$\left[\left(\frac{1}{0{,}975}\right)^2 - 1\right] \frac{v^2}{2g}\, Q\gamma = 0{,}052\, \frac{v^2}{2g}\, Q\gamma;$$

beim Ausflusse durch kurze cylindrische Ansätze ist dagegen $\varphi = 0{,}815$ und es stellt sich der entsprechende Verlust an Arbeit

$$= \left[\left(\frac{1}{0{,}815}\right)^2 - 1\right] \frac{v^2}{2g}\, Q\gamma = 0{,}505\, \frac{v^2}{2g}\, Q\gamma,$$

d. i. nahe 10mal so groß heraus, als beim Ausflusse durch Mündungen in der dünnen Wand. Bei Benutzung der lebendigen Kraft des ausfließenden Wassers ist es folglich besser, das Wasser durch Mündungen in der dünnen

Wand als durch prismatische Ansatzröhren ausfließen zu lassen. Wenn man aber die inneren Kanten, womit die Röhre an die Gefäßwand stößt, abrundet und dadurch einen allmäligen Uebergang aus dem Gefäße in die Röhre hervorbringt, so wird der Ausflußcoefficient auf 0,96 gesteigert und zugleich der Arbeitsverlust auf $8^1/_2$ Procent herabgezogen. Bei kürzeren, genau abgerundeten oder nach der Form des contrahirten Wasserstrahles gebildeten Mundstücken ist $\mu = \varphi = 0{,}975$ und daher der Arbeitsverlust wie bei Mündungen in der dünnen Wand 5 Procent.

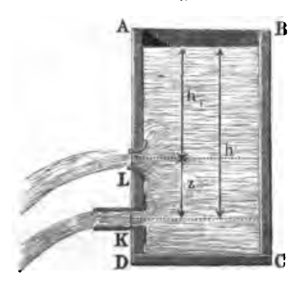
Dem Arbeitsverluste $\left(\frac{1}{\varphi^2} - 1\right) \frac{v^2}{2g} Q\gamma$ entspricht eine Druckhöhe $\left(\frac{1}{\varphi^2} - 1\right) \frac{v^2}{2g}$; man kann sich daher auch vorstellen, daß durch die Hindernisse des Ausflusses die Druckhöhe den Verlust $\left(\frac{1}{\varphi^2} - 1\right) \frac{v^2}{2g}$ erleide, und annehmen, daß nach Abzug dieses Verlustes der übrigbleibende Theil der Druckhöhe auf die Erzeugung der Geschwindigkeit verwendet werde. Diesen mit dem Quadrate der Ausflußgeschwindigkeit proportional wachsenden Verlust $z = \left(\frac{1}{\varphi^2} - 1\right) \frac{v^2}{2g}$ kann man Widerstandshöhe (franz. hauteur de résistance; engl. height of resistance) und den Coefficienten $\frac{1}{\varphi^2} - 1$, womit die Geschwindigkeitshöhe zu multipliciren ist, um die Widerstandshöhe zu erhalten, den Widerstandscoefficienten nennen. Wir werden in der Folge diesen, auch das Verhältniß der Widerstandshöhe zur Druckhöhe ausdrückenden Coefficienten durch den Buchstaben ζ bezeichnen, also die Widerstandshöhe selbst durch $z = \zeta \cdot \frac{v^2}{2g}$ ausdrücken. Durch die Formeln

$$\zeta = \frac{1}{\varphi^2} - 1 \text{ und}$$

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta}}$$

läßt sich aus dem Geschwindigkeitscoefficienten der Widerstandscoefficient, und aus diesem wieder jener berechnen.

Fig. 721.



Bei derselben Ausflußgeschwindigkeit v ist die Druckhöhe für eine Mündung K, Fig. 721, welcher der Geschwindigkeitscoefficient φ entspricht, $h = \frac{v^2}{2g\varphi^2}$, und die

Druckhöhe der Mündung L, durch welche das Wasser mit der theoretischen Geschwindigkeit ausfließt, $h_1 = \frac{v^2}{2g}$, folglich muß die erste Mündung um die Größe $KL = z = h - h_1 = \left(\frac{1}{\varphi^2} - 1\right)\frac{v^2}{2g} = \zeta \frac{v^2}{2g}$, welche wir die Widerstandshöhe genannt haben, tiefer liegen als die letztere. Wenn beide einen gleichen Querschnitt F haben, und das Wasser durch beide ohne Contraction ausfließt, so ist auch die Ausflußmenge $Q = Fv$ für beide Mündungen eine und dieselbe.

Beispiele. 1) Welche Wassermenge fließt unter einer Druckhöhe von 3 Fuß durch eine 2 Zoll weite Röhre aus, welcher der Widerstandscoefficient $\zeta = 0,4$ entspricht? Es ist

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{1,4}} = 0,845, \text{ daher:}$$

$$v = 0,845 \,.\, 7,906 \sqrt{3} = 11,574 \text{ Fuß, ferner:}$$

$$F = (1/_{12})^2 \pi = 0,02182 \text{ Quadratfuß,}$$

folglich das gesuchte Wasserquantum:

$$Q = 0,02182 \,.\, 11,574 = 0,253 \text{ Cubikfuß.}$$

2) Wenn eine Röhre von 2 Zoll Weite unter einem Drucke von 2 Fuß in der Minute 10 Cubikfuß Wasser liefert, so ist ihr Ausfluß- oder Geschwindigkeitscoefficient:

$$\varphi = \frac{Q}{F\sqrt{2gh}} = \frac{10}{60 \,.\, 0,02182 \,.\, 7,906 \,.\, \sqrt{2}} = \frac{1}{1,035\sqrt{2}} = 0,683,$$

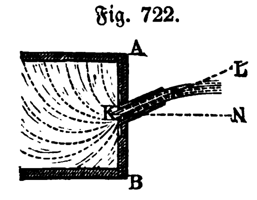
der Widerstandscoefficient: $\zeta = \left(\frac{1}{0,683}\right)^2 - 1 = 1,143,$

und endlich der durch die Hindernisse der Röhre bewirkte Verlust an Druckhöhe:

$$z = \zeta \frac{v^2}{2g} = 1,143 \,.\, \frac{v^2}{2g} = 1,143 \,.\, 0,016 \left(\frac{Q}{F}\right)^2 = 0,0183 \,.\, \frac{1}{0,1309^2}$$
$$= 1,066 \text{ Fuß.}$$

Schiefe Ansatzröhren. Schief angesetzte oder schief abgeschnittene Ansatzröhren geben ein kleineres Wasserquantum als rechtwinkelig angesetzte oder rechtwinkelig abgeschnittene Ansatzröhren, weil die Richtung des Wassers in denselben eine Aenderung erleidet. Die hierüber in nicht unbedeutender Ausdehnung angestellten Versuche haben den Verfasser auf Folgendes geführt. Ist δ der Winkel LKN, welchen die Röhrenaxe KL, Fig. 722, mit der Normale KN zur Ebene AB der Einmündung einschließt, und bezeichnet ζ den Widerstandscoefficienten für die winkelrecht abgeschnittene Röhre, so hat man den Widerstandscoefficienten der schiefen Ansatzröhre: §. 423

Fig. 722.



$$\zeta_1 = \zeta + 0,303 \, sin. \, \delta + 0,226 \, sin. \, \delta^2.$$

Nehmen wir für ζ den mittleren Werth 0,505 an, so erhalten wir:

bei δ^0 =	0	10	20	30	40	50	60 Grad.
den Widerstandscoefficienten ζ_1 =	0,505	0,565	0,635	0,713	0,794	0,870	0,937
den Ausflußcoefficienten μ_1 =	0,815	0,799	0,782	0,764	0,747	0,731	0,719

Hiernach ist z. B. der Widerstandscoefficient einer kurzen Ansatzröhre bei 20 Grad Axenabweichung, $\zeta_1 = 0,635$ und der Ausflußcoefficient

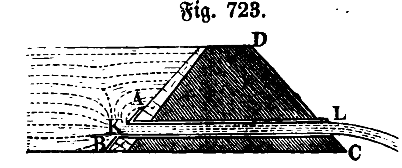
$$\mu_1 = \frac{1}{\sqrt{1,635}} = 0,782,$$

dagegen bei 35° Axenabweichung, der erstere $= 0,753$ und der letztere $= 0,755$.

In der Regel sind diese schiefen Ansatzröhren länger, als wir seither angenommen haben, auch müssen dieselben länger sein, wenn sie vom Wasser vollkommen ausgefüllt werden sollen. Die vorstehende Formel giebt nur denjenigen Theil des Widerstandes an, welcher dem Röhrenstück an der Einmündung entspricht, das dreimal so lang als die ganze Röhre weit ist. Der Widerstand, welchen das übrige Röhrenstück der Bewegung des Wassers entgegensetzt, wird in der Folge angegeben.

Beispiel. Wenn die Einmündungsebene AB eines horizontal liegenden Teichgerinnes KL, Fig. 723, sowie die Innenfläche des Teichdammes 40 Grad gegen den Horizont geneigt ist, so schließt die Röhrenaxe mit der Normale dieser Ebene einen Winkel von 50 Grad ein, und es ist daher der Widerstandscoefficient für den Ausfluß durch das Einmündungsstück dieser Röhre, $\zeta_1 = 0,870$, und wenn nun dem übrigen und längeren Röhrenstücke der Widerstandscoefficient 0,650 entspräche, so wäre der Widerstandscoefficient für die ganze Röhre

Fig. 723.



$$\zeta = 0,870 + 0,650 = 1,520,$$

und daher der Ausflußcoefficient

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1 + 1,520}} = \frac{1}{\sqrt{2,520}} = 0,630.$$

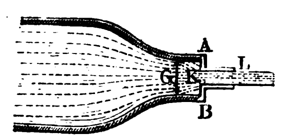
Bei 10 Fuß Druckhöhe und 1 Fuß Röhrenweite ergäbe sich folglich die Ausflußmenge:

$$Q = 0,630 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 7,906 \sqrt{10} = 12,37 \text{ Cubikfuß.}$$

§. 424 **Unvollkommene Contraction.** Mündet eine kurze cylindrische Ansatzröhre KL, Fig. 724, in einer ebenen Wand AB ein, deren Inhalt G den Querschnitt F der Röhre nicht vielmal übertrifft, so kommt

das Wasser mit einer nicht zu vernachlässigenden Geschwindigkeit an der Einmündungsstelle an, und es tritt deshalb nur mit unvollkommener Contraction in das Rohr, weshalb wieder die Ausflußgeschwindigkeit eine größere ist, als wenn das Wasser als stillstehend vor dem Eintritt in die Röhre angenommen werden kann. Ist wieder $\frac{F}{G} = n$ das Verhältniß des Röhrenquerschnittes zum Inhalte der Wandfläche, ferner μ_0 der

Fig. 724.



Ausflußcoefficient bei vollkommener Contraction, wo $\frac{F}{G}$ der Null gleich gesetzt werden kann, so hat man, den Versuchen des Verfassers zufolge, den Ausflußcoefficienten bei unvollkommener Contraction oder dem Querschnittsverhältnisse n zu setzen:

$$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0} = 0{,}102\,n + 0{,}067\,n^2 + 0{,}046\,n^3, \text{ oder}$$
$$\mu_n = \mu_0\,(1 + 0{,}102\,n + 0{,}067\,n^2 + 0{,}046\,n^3).$$

Nimmt z. B. der Röhrenquerschnitt den sechsten Theil der ganzen Wandfläche ein, so ist:

$$\mu_{1/6} = \mu_0\,(1 + 0{,}102 \,.\, {}^1/_6 + 0{,}067 \,.\, {}^1/_{36} + 0{,}046 \,.\, {}^1/_{216})$$
$$= \mu_0\,(1 + 0{,}017 + 0{,}0019 + 0{,}0002) = 1{,}019\,\mu_0,$$

oder $\mu_0 = 0{,}815$ gesetzt:

$$\mu_{1/6} = 0{,}815 \,.\, 1{,}019 = 0{,}830.$$

Etwas genauer giebt die Correctionswerthe $\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0}$ folgende, zum Gebrauch bequeme Tabelle an.

Tabelle

der Correctionen der Ausflußcoefficienten wegen der unvollkommenen Contraction, beim Ausflusse durch kurze cylindrische Ansatzröhren.

n	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0}$	0,006	0,013	0,020	0,027	0,035	0,043	0,052	0,060	0,070	0,080

n	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00
$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0}$	0,090	0,102	0,114	0,127	0,138	0,152	0,166	0,181	0,198	0,227

Beim Ausflusse durch kurze parallelepipedische Röhren sind diese Correctionen ziemlich die nämlichen.

Diese Coefficienten finden ihre Anwendung vorzüglich beim Ausflusse des Wassers durch zusammengesetzte Röhren, wie z. B. in dem durch die Fig. 725 dargestellten Falle, wo die kurze Ansatzröhre KL in einer weiteren kurzen Ansatzröhre GK und diese wieder in dem Gefäße AC einmündet. Hier ist beim Eintritt des Wassers aus der weiteren Röhre in die engere unvollkommene Contraction vorhanden und daher der Ausflußcoefficient nach der letzten Regel zu bestimmen.

Fig. 725.

Setzen wir den diesem Ausflußcoefficienten entsprechenden Widerstandscoefficienten $= \zeta_1$, den Widerstandscoefficienten für den Eintritt aus dem Gefäße in die weitere Röhre, $= \zeta$, die Druckhöhe $= h$, die Ausflußgeschwindigkeit $= v$ und das Verhältniß $\frac{F}{G}$ der Röhrenquerschnitte, $= n$, also die Geschwindigkeit des Wassers in der weiteren Röhre, $= nv$, so gilt die Formel:

$$h = \frac{v^2}{2g} + \zeta \cdot \frac{(nv)^2}{2g} + \zeta_1 \cdot \frac{v^2}{2g}, \text{ d. i.}$$

$$h = (1 + n^2 \zeta + \zeta_1) \frac{v^2}{2g}, \text{ und es ist daher:}$$

$$v = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1 + n^2 \zeta + \zeta_1}}.$$

Beispiel. Welche Wassermenge liefert der in Fig. 725 abgebildete Apparat, wenn die Druckhöhe $h = 4$ Fuß, die Weite der engeren Röhre 2 Zoll und die der weitern 3 Zoll beträgt? Es ist:

$$n = (2/3)^2 = 4/9, \text{ daher } \mu_{4/9} = 1{,}069 \,.\, 0{,}815 = 0{,}871$$

und der entsprechende Widerstandscoefficient:

$$\zeta_1 = \left(\frac{1}{0{,}871}\right)^2 - 1 = 0{,}318; \text{ nun hat man aber:}$$

$$\zeta = 0{,}505 \text{ und } n^2 . \zeta = 16/81 \,.\, 0{,}505 = 0{,}099, \text{ daher folgt:}$$

$$1 + n^2 \zeta + \zeta_1 = 1 + 0{,}099 + 0{,}318 = 1{,}417,$$

und die Ausflußgeschwindigkeit:

$$v = \frac{7{,}906 \,.\, \sqrt{4}}{\sqrt{1{,}417}} = \frac{15{,}812}{\sqrt{1{,}417}} = 13{,}29 \text{ Fuß}.$$

Da endlich der Röhrenquerschnitt $F = \frac{\pi}{144} = 0{,}02182$ Quadratfuß ist, so folgt die Ausflußmenge:

$$Q = 13{,}29 \,.\, 0{,}02182 = 0{,}290 \text{ Cubikfuß}.$$

Conische Ansatzröhren. Conische Ansatzröhren geben andere Ausflußmengen als prismatische oder cylindrische Ansatzröhren. Sie sind entweder conisch convergent oder conisch divergent; im ersten Falle ist die Ausmündung kleiner, im zweiten Falle aber ist sie größer als die Einmündung. Die Ausflußcoefficienten bei den ersteren Röhren sind größer und die bei den letzteren kleiner, als bei den cylindrischen Röhren. Eine und dieselbe conische Röhre giebt allerdings mehr Wasser, wenn man die weitere Mündung zur Ausmündung macht, wie K in Fig. 726, als wenn man sie nach innen richtet wie L in derselben Figur; allein sie giebt nicht in demselben Verhältniß mehr, als die weitere Mündung die engere übertrifft. Wenn Manche, wie z. B. Venturi und Eytelwein, für conisch divergente Röhren größere Ausflußcoefficienten angeben, als für conisch convergente, so ist zu berücksichtigen, daß sie immer den engeren Querschnitt als Mündung behandeln. Den Einfluß der Conicität der Röhren auf die Ausflußmenge führen folgende, unter Druckhöhen von 0,25 bis 3,3 Meter angestellte Versuche mit einer 9 Centimeter langen Röhre AD, Fig. 727, vor Augen. Die Weite dieser Röhre betrug an einem Ende DE, = 2,468, am anderen Ende AB, = 3,228 Centimeter, und der Convergenzwinkel, d. i. der Winkel $A O B$, unter den die gegenüberliegenden Seiten AE und BD eines Längenaxenschnittes zusammenlaufen, = 4[illegible]^0 50′. Beim Ausflusse durch die engere Mündung war der Ausflußcoefficient = 0,920; bei dem Ausflusse durch die weitere Mündung aber = 0,553; und wenn man die engere Einmündung als Querschnitt in die Rechnung einführt, ergab er sich = 0,946. Der Strahl war im ersten Falle, wo die Röhre als conisch convergentes Mundstück gebraucht wurde, wenig contrahirt, dicht und glatt, im zweiten Falle aber, wo er als conisch divergentes Mundstück diente, war er stark divergent, zerrissen und stark pulsirend. Ueber den Ausfluß durch conisch divergente Röhren haben noch Venturi und Eytelwein experimentirt. Beide Hydrauliker haben noch diese conischen Röhren an cylindrische und conoidische, nach der Form des contrahirten Wasserstrahles geformte Mundstücke angesetzt. Durch eine solche Verbindung, wie Fig. 728 (a. f. S.) darstellt, wo das divergente Ausmündungsstück KL innen 12 und außen $21\frac{1}{2}$ Linien weit, und $8\frac{13}{16}$ Zoll lang war, wobei Convergenzwinkel $5^0\ 9'$ maß, fand Eytelwein $\mu = 1{,}5526$, wenn er das

Fig. 726.

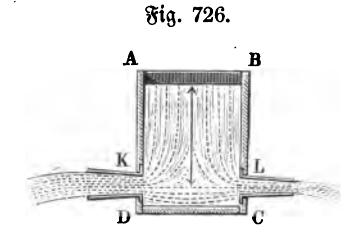
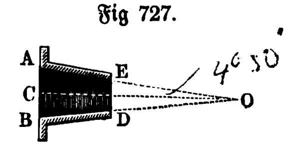
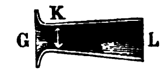


Fig 727.



engere Ende als Mündung behandelte, und dagegen μ nur $= 0{,}483$, wenn er, wie recht, das weitere Ende als Mündung ansah. Allerdings fließt durch dieses combinirte Mundstück $\frac{1{,}5526}{0{,}615} = 2{,}5$ mal so viel, als durch die einfache Mündung in der dünnen Wand, und $\frac{1{,}5526}{0{,}815} = 1{,}9$ mal so viel als durch die kurze cylindrische Ansatzröhre. Bei großen Geschwindigkeiten und bei größerer Divergenz ist es übrigens gar nicht möglich, selbst durch vorhergegangenes Zuhalten der Röhren, den vollen Ausfluß herbeizuführen.

Fig. 728.



Auch fand der Verfasser für eine kurze conisch divergente Ansatzröhre von 4 Centimeter Länge, 1 Centimeter innere und 1,54 Centimeter äußere Weite, wobei der Divergenzwinkel 8 Grad 4 Minuten maß, bei 0,4 Meter Druckhöhe, je nach dieselbe innen abgerundet war oder nicht, entweder

$$\mu = 0{,}738 \text{ oder } \mu = 0{,}395.$$

§. 426 Die ausführlichsten Versuche über den Ausfluß durch conisch convergente Ansatzröhren sind von d'Aubuisson und Castel angestellt worden. Die hierzu in Anwendung gekommenen Röhren waren von großer Mannigfaltigkeit, verschieden in den Längen, Weiten und in den Convergenzwinkeln. Am ausgedehntesten waren die Versuche mit Röhren von 1,55 Centimeter Weite in der Ausmündung und von 2,6 mal so großer, d. i. von 4 Centimeter Länge, weswegen wir ihre Ergebnisse auch in folgender Tabelle hier mittheilen. Die Druckhöhe war durchgängig 3 Meter. Die Ausflußmengen wurden durch ein besonderes Aichgefäß gemessen, um aber außer den Ausflußcoefficienten auch noch die Geschwindigkeits- und Contractionscoefficienten zu erhalten, wurden die gegebenen Höhen entsprechenden Sprungweiten der Wasserstrahlen gemessen und hieraus die Ausflußgeschwindigkeiten (s. §. 408) berechnet.

Das Verhältniß $\frac{v}{\sqrt{2gh}}$ der effectiven Geschwindigkeit v zur theoretischen Geschwindigkeit $\sqrt{2gh}$ gab den Geschwindigkeitscoefficienten φ, sowie das Verhältniß $\frac{Q}{F\sqrt{2gh}}$ der effectiven Ausflußmenge Q zur theoretischen Ausflußmenge $F\sqrt{2gh}$ auf den Ausflußcoefficienten μ führte und das Verhältniß zwischen beiden Coefficienten, d. i. $\frac{\mu}{\varphi}$, endlich den Contractionscoefficienten α bestimmte.

Diese Bestimmung ist aber bei großen Ausflußgeschwindigkeiten nicht hinreichend genau, weil hier der Widerstand der Luft zu groß ausfällt.

Tabelle
der Ausfluß- und Geschwindigkeitscoefficienten für den Ausfluß durch conisch convergente Röhren.

Convergenzwinkel.	Ausflußcoefficienten.	Geschwindigkeitscoefficienten.	Convergenzwinkel.	Ausflußcoefficienten.	Geschwindigkeitscoefficienten.
0° 0′	0,829	0,829	13° 24′	0,946	0,963
1° 36′	0,866	0,867	14° 28′	0,941	0,966
3° 10′	0,895	0,894	16° 36′	0,938	0,971
4° 10′	0,912	0,910	19° 28′	0,924	0,970
5° 26′	0,924	0,919	21° 0′	0,919	0,972
7° 52′	0,930	0,932	23° 0′	0,914	0,974
8° 58′	0,934	0,942	29° 58′	0,895	0,975
10° 20′	0,938	0,951	40° 20′	0,870	0,980
12° 4′	0,942	0,955	48° 50′	0,847	0,984

Man ersieht aus dieser Tabelle, daß die Ausflußcoefficienten bei einer Röhre von $13^1/_2{}^0$ Seitenconvergenz ihr Maximum 0,946 erreicht haben, daß dagegen die Geschwindigkeitscoefficienten immer größer und größer ausfallen, je größer der Convergenzwinkel ist. Wie in vorkommenden Fällen der Praxis diese Tabelle zu gebrauchen ist, mag folgendes Beispiel lehren.

Beispiel. Welche Wassermenge liefert eine kurze conische Ansatzröhre von $1^1/_2$ Zoll Weite in der Ausmündung und von 10 Grad Convergenz bei einem Drucke von 16 Fuß? Nach des Verfassers Versuchen giebt eine cylindrische Röhre von dieser Weite, $\mu = 0{,}810$, die Röhre von d'Aubuisson aber gab $\mu = 0{,}829$, also um $0{,}829 - 0{,}810 = 0{,}019$ mehr; nun ist aber der Tabelle zufolge, für die Röhre von 10° Convergenz, $\mu = 0{,}937$, daher möchte es angemessen sein, für die gegebene Röhre, $\mu = 0{,}937 - 0{,}019 = 0{,}918$ zu setzen, wonach dann die Ausflußmenge:

$$Q = 0{,}918 \cdot \frac{\pi}{4 \cdot 8^2} \cdot 7{,}906 \sqrt{16} = \frac{0{,}918 \cdot 7{,}906 \cdot \pi}{64} = 0{,}3563 \text{ Cubikfuß}$$

folgt.

Reibungswiderstand. Lange prismatische oder cylindrische Ansatzröhren verzögern den Ausfluß um so mehr, je länger dieselben sind; es ist daher anzunehmen, daß die Röhrenwände durch Reibung, Adhäsion oder Klebrigkeit des Wassers an denselben der Bewegung des Wassers in den Röhren ein Hinderniß entgegensetzen. Vernunftgründen und vielfachen Beobachtungen und Messungen zufolge läßt sich annehmen, daß dieser Reibungswiderstand ganz unabhängig ist vom Drucke, daß er aber direct wie die Länge l und §. 427

umgekehrt wie die Weite d derselben wächst, daß er also dem Verhältnisse $\frac{l}{d}$ proportional ist. Außerdem hat sich auch noch herausgestellt, daß dieses Hinderniß größer ist bei größeren und kleiner bei kleineren Geschwindigkeiten des Wassers, und daß es beinahe mit dem Quadrate der Geschwindigkeit v des Wassers selbst wächst. Messen wir dieses Hinderniß durch die Höhe einer Wassersäule, die nachher von der ganzen Druckhöhe h abzuziehen ist, um die zur Erzeugung der Geschwindigkeit nöthige Höhe zu erhalten, so können wir diese Höhe, die wir in der Folge Reibungswiderstandshöhe nennen wollen, setzen:

$$h = \zeta \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g},$$

und es ist hierbei unter ζ eine Erfahrungszahl, welche wir den Reibungscoefficienten nennen können, zu verstehen. Man verliert also hiernach durch die Reibung des Wassers in der Röhre um so mehr an Druck oder Druckhöhe, je größer das Verhältniß $\frac{l}{d}$ der Länge zur Weite und je größer die Geschwindigkeitshöhe $\frac{v^2}{2g}$ ist. Aus der Wassermenge Q und dem Röhrenquerschnitte

$$F = \frac{\pi d^2}{4}$$

folgt die Geschwindigkeit:

$$v = \frac{4Q}{\pi d^2}$$

und daher die Reibungshöhe:

$$h = \zeta \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{1}{2g} \left(\frac{4Q}{\pi d^2}\right)^2 = \zeta \cdot \frac{1}{2g} \cdot \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \cdot \frac{l Q^2}{d^5}.$$

Um durch das Fortleiten einer gewissen Wassermenge Q in einer Röhre möglichst wenig Verlust an Druckhöhe oder Gefälle zu erhalten, soll man die Röhre möglichst weit und nicht unnöthig lang machen. Die doppelte Weite beansprucht z. B. zur Ueberwindung der Reibung nur $(1/2)^5 = 1/32$ mal so viel Gefälle als die einfache Weite.

Ist der Querschnitt einer Röhre ein Rechteck von der Höhe a und der Breite b, so hat man statt

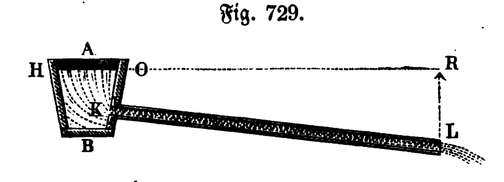
$$\frac{1}{d} = 1/4 \cdot \frac{\pi d}{1/4\, \pi d^2} = 1/4 \cdot \frac{\text{Umfang}}{\text{Inhalt}} = 1/4 \cdot \frac{2(a+b)}{ab} = \frac{a+b}{2ab}$$

einzusetzen, weshalb folgt:

$$h = \zeta \cdot \frac{l(a+b)}{2ab} \cdot \frac{v^2}{2g}.$$

Mit Hülfe dieser Formel für den Röhrenreibungswiderstand lassen sich nun auch die Ausflußgeschwindigkeit und das Ausflußquantum finden, welches eine Röhre von einer gegebenen Länge und Weite unter einem gegebenen Drucke fortleitet. Uebrigens ist es vollkommen gleich, ob die Röhre *KL*, Fig. 729, horizontal ist, fällt, oder aufsteigt, wenn nur unter der Druckhöhe die Tiefe *RL* des Mittelpunktes *L* der Röhrenmündung unter dem Wasserspiegel *HO* des Ausflußreservoirs verstanden wird.

Fig. 729.



Ist h die Druckhöhe, h_1 die Widerstandshöhe für das Einmündungsstück und h_2 die Widerstandshöhe für den übrigen Theil der Röhre, so hat man:

$$h - (h_1 + h_2) = \frac{v^2}{2g}, \text{ oder } h = \frac{v^2}{2g} + h_1 + h_2.$$

Bezeichnet ζ_0 den Widerstandscoefficienten für das Einmündungsstück, und ζ den Coefficienten des Reibungswiderstandes der übrigen Röhre, so ist zu setzen:

$$h = \frac{v^2}{2g} + \zeta_0 \cdot \frac{v^2}{2g} + \zeta \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g},$$

oder:

$$1)\ h = \left(1 + \zeta_0 + \zeta\,\frac{l}{d}\right)\frac{v^2}{2g},$$

und:

$$2)\ v = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1 + \zeta_0 + \zeta \cdot \frac{l}{d}}}.$$

Aus der letzteren Formel ergiebt sich die Wassermenge $Q = Fv$.

Bei sehr langen Röhren fällt $1 + \zeta_0$ sehr klein gegen $\zeta\,\frac{l}{d}$ aus, weshalb dann einfach

$$h = \zeta\,\frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g}, \text{ sowie umgekehrt,}$$

$$v = \sqrt{\frac{1}{\zeta} \cdot \frac{d}{l} \cdot 2gh} \text{ folgt.}$$

§. 428 Der **Reibungscoefficient** ist, wie die Ausflußcoefficienten, nicht ganz constant, er ist bei kleinen Geschwindigkeiten größer und bei großen Geschwindigkeiten kleiner, d. h. der Reibungswiderstand des Wassers in den Röhren wächst nicht genau mit dem Quadrate der Geschwindigkeit, sondern auch noch mit einer anderen Potenz der Geschwindigkeit. Prony und

Eytelwein haben angenommen, daß die durch den Reibungswiderstand verlorene Druckhöhe wie die einfache Geschwindigkeit und wie das Quadrat derselben wachse, und für sie den Ausdruck:

$$h = (\alpha v + \beta v^2) \frac{l}{d},$$

wo α und β Erfahrungscoefficienten bezeichnen, festgesetzt. Um diese Coefficienten zu bestimmen, haben die genannten Hydrauliker 51 Versuche benutzt, welche zu verschiedenen Zeiten von Couplet, Bossut und du Buat über die Bewegung des Wassers durch lange Röhren angestellt worden sind. Prony fand hieraus:

$$h = (0{,}0000693\, v + 0{,}0013932\, v^2) \frac{l}{d},$$

Eytelwein:

$$h = (0{,}0000894\, v + 0{,}0011213\, v^2) \frac{l}{d},$$

d'Aubuisson nimmt an:

$$h = (0{,}0000753\, v + 0{,}001370\, v^2) \frac{l}{d} \text{ Meter.}$$

Noch genauer an die Beobachtungen schließt sich eine von dem Verfasser aufgefundene Formel an, welche die Form

$$h = \left(\alpha + \frac{\beta}{\sqrt{v}}\right) \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}$$

hat und sich auf die Voraussetzung gründet, daß der Reibungswiderstand wie das Quadrat und wie die Quadratwurzel aus dem Cubus der Geschwindigkeit zugleich wächst. Man hat also hiernach den Widerstandscoefficienten

$$\zeta = \alpha + \frac{\beta}{\sqrt{v}}$$

und die Reibungswiderstandshöhe einfach

$$h = \zeta \cdot \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} \text{ zu setzen.}$$

Zur Ermittelung des Widerstandscoefficienten ζ oder der Hülfsconstanten α und β sind aber von dem Verfasser nicht nur die schon bei den Prony'schen und Eytelwein'schen Bestimmungen zu Grunde gelegten 51 Versuche von Couplet, Bossut und du Buat, sondern auch noch 11 Versuche vom Verfasser und 1 Versuch von einem Herrn Gueymard in Grenoble benutzt worden. Die älteren Versuche erstrecken sich nur auf Geschwindigkeiten von 0,043 bis 1,930 Meter, durch die Versuche des Verfassers ist aber die letzte Grenze der Geschwindigkeiten bis auf 4,648 Meter hinausgerückt worden. Die Weiten der Röhren waren bei den älteren Versuchen 27, 36, 54, 135 und 490 Millimeter, und die neuen Versuche wurden an

Röhren von 33, 71 und 275 Millimetern angestellt. Mit Hülfe der Methode der kleinsten Quadrate ist nun aus den zum Grunde gelegten 63 Versuchen gefunden worden:

$$\zeta = 0{,}01439 + \frac{0{,}0094711}{\sqrt{v}},$$

oder:

$$h = \left(0{,}01439 + \frac{0{,}0094711}{\sqrt{v}}\right) \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g} \text{ Meter},$$

oder für das preußische Maß:

$$h = \left(0{,}01439 + \frac{0{,}016921}{\sqrt{v}}\right) \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g} \text{ Fuß}.$$

Anmerkung 1. Bei Berücksichtigung anderer Versuche von Herrn Prof. Zeuner, angestellt an einer Zinkröhre von $2\frac{1}{2}$ Centimeter Weite bei 0,1356 bis 0,4287 Meter Geschwindigkeit, ist

$$\zeta = 0{,}014312 + \frac{0{,}010327}{\sqrt{v}}$$

zu setzen, wenn v in Metern gegeben ist. (Siehe „Civilingenieur", Bd. I, 1854.)

Anmerkung 2. Neuere Versuche über die Bewegung des Wassers in Röhren unter großen und sehr großen Geschwindigkeiten sind 1856 und 1858 vom Verfasser angestellt worden. Siehe „Civilingenieur", Band V, Heft 1 und 3, sowie Band IX, Heft 1. Die Ergebnisse dieser Versuche enthält folgende Tabelle.

Bezeichnung der Röhren.	Weite der Röhre (d)	Mittlere Geschwindigkeit des Wassers in der Röhre (v)	Reibungscoefficient ζ
Engere Glasröhre	1,03 Ctm.	8,51 Meter.	0,01815
Weitere Glasröhre	1,43 „	10,18 „	0,01865
Engere Messingröhre . . .	1,04 „	8,64 „	0,01869
Desgl., kürzer gemacht . . .	1,04 „	12,32 „	0,01784
Desgl., unter sehr hohem Drucke	1,04 „	20,99 „	0,01690
Weitere Messingröhre . . .	1,43 „	8,66 „	0,01719
Desgl., abgekürzt	1,43 „	12,40 „	0,01736
Desgl., unter sehr hohem Drucke	1,43 „	21,59 „	0,01478
Weitere Zinkröhre	2,47 „	3,19 „	0,01962
Desgl., kürzer	2,47 „	4,73 „	0,01838
noch kürzer	2,47 „	6,24 „	0,01790
noch kürzer	2,47 „	9,18 „	0,01670

Die Werthe in der letzten Columne weisen von Neuem nach, daß der Widerstandscoefficient ζ für die Reibung des Wassers in Röhren abnimmt, sowohl wenn die Geschwindigkeit (v), als auch, jedoch weit langsamer, wenn die Röhrenweite (d) eine größere wird. Uebrigens ist bei großen Geschwindigkeiten die Uebereinstimmung der Formel

$$\zeta = 0{,}01439 + \frac{0{,}0094711}{\sqrt{v}},$$

mit diesen neuen Erfahrungsgrößen noch eine leidliche, z. B. $v = 9$ Meter, giebt

$$\zeta = 0{,}01439 + 0{,}00316 = 0{,}01755,$$

und $v = 16$ Meter,

$$\zeta = 0{,}01439 + 0{,}00237 = 0{,}01676,$$

was mit den nahe entsprechenden Werthen in der letzten Tabelle recht gut übereinstimmt.

Anmerkung 3. Herr de Saint-Venant findet, daß die bekannte Formel für den Widerstand des Wassers in Röhren sich noch mehr an die Erfahrungen anschließt, wenn man die Reibungshöhe nicht v^2 oder $\frac{v^2}{2g}$, sondern $v^{12/7}$ proportional wachsend annimmt. (Siehe dessen „Mémoire sur des formules nouvelles pour la solution des problèmes relatifs aux eaux courantes".) Es ist hiernach:

$$h = \frac{4l}{d} \cdot 0{,}00029557\, v^{12/7} = 0{,}00118228 \frac{l}{d} . v^{12/7} = 0{,}023197\, v^{-2/7} \cdot \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}$$

zu setzen. Die Annahme eines gebrochenen Exponenten der Potenz von v ist gar nicht neu; schon Woltmann setzte $v^{7/4}$ statt v^2, und Eytelwein brachte $v^{35/19}$ statt v^2 in Vorschlag (siehe den vom Verfasser bearbeiteten Artikel „Ausfluß", Band I., Seite 554, der allgemeinen Maschinenencyclopädie von Hülsse).

Anmerkung 4. Neue und sehr ausführliche Versuche über die Bewegung des Wassers in Röhrenleitungen sind vom Herrn H. Darcy angestellt worden. (S. den Rapport der Akademie der Wissenschaften zu Paris in den „Comptes rendus etc.", Tom. 38, 1854, sur des recherches expérimentales relatives au mouvement des eaux dans les tuyaux.) Herr Darcy folgert für die Fälle, wo die Geschwindigkeit v des Wassers nicht unter 2 Decimeter ist, aus diesen Versuchen die Formel:

$$h = \left(0{,}000507 + \frac{0{,}00000647}{r}\right) \frac{l}{r} \cdot v^2$$

$$= \left(0{,}01989 + \frac{0{,}0005078}{d}\right) \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} \text{ Meter},$$

wonach der Widerstandscoefficient

$$\zeta = 0{,}01989 + \frac{0{,}0005078}{d} \text{ zu setzen wäre.}$$

Jedenfalls kann diese Formel bei kleinen Geschwindigkeiten nicht ausreichend genau sein.

§. 429 Zur Erleichterung der Rechnung ist folgende Tabelle der Widerstandscoefficienten zusammengestellt worden. Man ersieht aus ihr, daß allerdings die Veränderlichkeit dieser Coefficienten nicht unbedeutend ist, da dieser Coefficient für 0,1 Meter Geschwindigkeit, $= 0{,}0443$, für 1 Meter, $= 0{,}0239$ und für 5 Meter, $= 0{,}0186$ ausfällt.

Tabelle der Reibungscoefficienten des Wassers.

	v	Zehntel Meter. 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Ganze Meter.	0	∞	0,0443	0,0356	0,0317	0,0294	0,0278	0,0266	0,0257	0,0250	0,0244
	1	0,0239	0,0234	0,0230	0,0227	0,0224	0,0221	0,0219	0,0217	0,0215	0,0213
	2	0,0211	0,0209	0,0208	0,0206	0,0205	0,0204	0,0203	0,0202	0,0201	0,0200
	3	0,0199	0,0198	0,0197	0,0196	0,0195	0,0195	0,0194	0,0193	0,0193	0,0192
	4	0,0191	0,0191	0,0190	0,0190	0,0189	0,0189	0,0188	0,0188	0,0187	0,0187

Man findet in dieser Tabelle die einer gewissen Geschwindigkeit entsprechenden Widerstandscoefficienten, wenn man die ganzen Meter in der ersten Vertical- und die Zehntel in der ersten Horizontalcolumne aufsucht, von der ersten Zahl horizontal und von der letzten vertical fortgeht bis zur Stelle, wo sich beide Bewegungen begegnen. Z. B. für $v = 1{,}3$ Meter ist $\zeta = 0{,}0227$, für $v = 2{,}8$, $\zeta = 0{,}0201$.

Für das preußische Fußmaß läßt sich setzen:

v	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9 Fuß.
ζ	0,0679	0,0522	0,0453	0,0411	0,0383	0,0362	0,0346	0,0333	0,0322

v	1	$1\frac{1}{4}$	$1\frac{1}{2}$	2	3	4	6	8	12	20 Fuß.
ζ	0,0313	0,0296	0,0282	0,0263	0,0242	0,0229	0,0213	0,0204	0,0192	0,0182

Anmerkung. Eine ausgedehntere und bequemere Tafel giebt der „Ingenieur“, Seite 442 und 443.

§. 430. **Lange Röhren.** In Ansehung der Bewegung des Wassers in langen Röhren oder Röhrenleitungen können folgende drei Hauptaufgaben zur Lösung vorkommen.

1) Es ist die Länge l und Weite d der Röhre und das fortzuführende Wasserquantum Q gegeben, und man sucht die entsprechende Druckhöhe. Hier hat man zunächst die Geschwindigkeit

$$v = \frac{Q}{F} = \frac{4\,Q}{\pi\, d^2} = 1{,}2732 \cdot \frac{Q}{d^2}$$

zu berechnen, dann den diesem Werthe entsprechenden Reibungscoefficienten ζ

in einer der letzten Tafeln aufzusuchen, und zuletzt die Werthe d, l, v, ζ und ζ_0, wo ζ_0 den Widerstandscoefficienten für das Einmündungsstück bezeichnet, in der ersten Hauptformel

$$h = \left(1 + \zeta_0 + \zeta \frac{l}{d}\right) \frac{v^2}{2g}$$

zu substituiren.

2) Es ist die Länge und Weite der Röhre, sowie die Druckhöhe oder das Gefälle gegeben, und die Wassermenge zu bestimmen. Hier ist zunächst die Geschwindigkeit durch die Formel

$$v = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1 + \zeta_0 + \zeta \cdot \frac{l}{d}}}$$

zu finden; da aber der Widerstandscoefficient nicht ganz constant ist, sondern sich mit v etwas ändert, so muß man v vorher schon annähernd kennen, um darnach ζ ermitteln zu können.

Aus v folgt dann:

$$Q = \frac{\pi d^2}{4} v = 0{,}7854\, d^2 v.$$

3) Es ist die Wassermenge, die Druckhöhe und die Länge der Röhre gegeben, und die nöthige Weite der Röhre zu bestimmen.

Da $v = \frac{4Q}{\pi d^2}$, also $v^2 = \left(\frac{4Q}{\pi}\right)^2 \cdot \frac{1}{d^4}$, so hat man:

$$2gh = \left(1 + \zeta_0 + \zeta \frac{l}{d}\right) \left(\frac{4Q}{\pi}\right)^2 \cdot \frac{1}{d^4}, \text{ oder:}$$

$$2gh . \left(\frac{\pi}{4Q}\right)^2 = (1 + \zeta_0) \frac{1}{d^4} + \zeta \cdot \frac{l}{d^5}, \text{ oder:}$$

$$2gh . \left(\frac{\pi}{4Q}\right)^2 d^5 = (1 + \zeta_0)\, d + \zeta l;$$

daher ist die Röhrenweite:

$$d = \sqrt[5]{\frac{(1 + \zeta_0)\, d + \zeta l}{2gh} . \left(\frac{4Q}{\pi}\right)^2}.$$

Nun ist aber $\left(\frac{4}{\pi}\right)^2 = 1{,}6212$; $1 + \zeta_0$ im Mittel $= 1{,}505$ und für das preuß. Maß, $\frac{1}{2g} = 0{,}016$, daher läßt sich setzen:

$$d = 0{,}4817 \sqrt[5]{(1{,}505 \,.\, d + \zeta l) \frac{Q^2}{h}} \text{ Fuß.}$$

Auch diese Formel ist nur als Näherungsformel zu gebrauchen, weil in

ihr die Unbekannte d und auch der von der Geschwindigkeit $v = \frac{4\,Q}{\pi d^2}$ abhängige Coefficient ζ mit vorkommen.

Beispiele. 1) Welche Druckhöhe beansprucht eine Röhrenleitung von 150 Fuß Länge und 5 Zoll Weite, wenn dieselbe in der Minute 25 Cubikfuß Wasser fortleiten soll? Hier ist:

$$v = 1{,}2732 \cdot \frac{25 \,.\, 12^2}{60 \,.\, 5^2} = 3{,}056 \text{ Fuß},$$

daher läßt sich $\zeta = 0{,}0242$ setzen, und es folgt nun die Druckhöhe oder das totale Röhrengefälle:

$$h = \left(1{,}505 + 0{,}0242 \cdot \frac{150 \,.\, 12}{5}\right) \cdot 0{,}016 \,.\, 3{,}056^2$$
$$= (1{,}505 + 8{,}712)\; 0{,}016 \,.\, 9{,}330 = 1{,}525 \text{ Fuß}.$$

2) Welche Wassermenge wird eine Röhrenleitung von 48 Fuß Länge und 2 Zoll Weite bei 5 Fuß Druckhöhe liefern? Es ist:

$$v = \frac{7{,}906 \sqrt{5}}{\sqrt{1{,}505 + \zeta \cdot \frac{48 \,.\, 12}{2}}} = \frac{17{,}678}{\sqrt{1{,}505 + 288 \,.\, \zeta}}.$$

Vorläufig $\zeta = 0{,}020$ angenommen, erhält man:

$$v = \frac{17{,}678}{\sqrt{7{,}26}} = \frac{17{,}678}{2{,}7} = 6{,}5,$$

aber $v = 6{,}5$ giebt richtiger $\zeta = 0{,}0211$, daher hat man genauer:

$$v = \frac{17{,}678}{\sqrt{1{,}505 + 288 \,.\, 0{,}0211}} = \frac{17{,}678}{\sqrt{7{,}582}} = 6{,}42 \text{ Fuß},$$

und das Wasserquantum:

$$Q = 0{,}7854 \cdot \left(\frac{2}{12}\right)^2 \cdot 6{,}42 = 0{,}140 \text{ Cubikfuß} = 242 \text{ Cubikzoll}.$$

3) Welche Weite muß man einer 100 Fuß langen Röhrenleitung geben, die bei 5 Fuß Druckhöhe in jeder Secunde einen halben Cubikfuß Wasser liefert? Es ist:

$$d = 0{,}4817 \sqrt[5]{(1{,}505\, d + 100\, \zeta) \,.\, \tfrac{1}{5}\, (\tfrac{1}{2})^2} = 0{,}4817 \sqrt[5]{0{,}075\, d + 5\, \zeta}.$$

Setze ich vorläufig $\zeta = 0{,}02$, so erhalte ich:

$$d = 0{,}4817 \sqrt[5]{0{,}075\, d + 0{,}100}, \text{ oder annähernd:}$$
$$d = 0{,}4817 \sqrt[5]{0{,}100} = 0{,}30, \text{ also genauer:}$$
$$d = 0{,}4817 \sqrt[5]{0{,}0225 + 0{,}100} = 0{,}4817 \sqrt[5]{0{,}1225} = 0{,}3165 \text{ Fuß} = 3{,}8 \text{ Zoll}.$$

Dieser Weite entspricht der Querschnitt:

$$F = 0{,}7854 \,.\, 0{,}3165^2 = 0{,}0787 \text{ Quadratfuß, die Geschwindigkeit:}$$
$$v = \frac{Q}{F} = \frac{0{,}5}{0{,}0787} = 6{,}35 \text{ Fuß},$$

und letzterer wieder der Widerstandscoefficient $\zeta = 0{,}0211$. Führt man den letzteren genaueren Werth ein, so erhält man:

$$d = 0{,}4817 \sqrt[5]{0{,}1280} = 0{,}319 \text{ Fuß} = 3{,}83.$$

Anmerkung 1. Versuche mit $2\frac{1}{2}$ und $4\frac{1}{2}$ Zoll weiten ordinären Holzröhren haben dem Verfasser den Widerstandscoefficienten 1,75 mal so groß gegeben, als

bei den Metallröhren, auf die sich die in den Tabellen des vorigen Paragraphen aufgeführten Werthe beziehen. Während also z. B. für die Geschwindigkeit von 3 Fuß bei Metallröhren, $\zeta = 0{,}0242$ ist, müssen wir ihn bei Holzröhren, $= 0{,}0242 \,.\, 1{,}75 = 0{,}04235$ setzen; während wir im Beispiel 1. die Druckhöhe in einer 150 Fuß langen Metallröhre 1,527 Fuß gefunden haben, wird sie bei einer gleich weiten Holzröhre unter denselben Umständen

$h = (1{,}505 + 0{,}04235 \,.\, 360) \,.\, 0{,}016 \,.\, 9{,}339 = 16{,}75 \,.\, 0{,}1494 = 2{,}50$ Fuß

gesetzt werden müssen.

Nach den Versuchen Darcy's wächst der Widerstandscoefficient ζ überhaupt sehr bedeutend mit der Rauhigkeit der Röhrenwand und steigt bei sehr rauhen Wänden auf das Zwei- bis Dreifache. Dieselbe Erfahrung hat in der neuesten Zeit auch der Verfasser gemacht.

Anmerkung 2. Einen nicht unbedeutenden Einfluß übt noch die Temperatur auf den Widerstand des Wassers in Röhren aus. Hierauf Bezug habende Versuche sind von Gerstner (s. dessen „Handbuch der Mechanik", Bd. II.) und in der neuesten Zeit von Herrn Geh. Rath Hagen (s. dessen „Abhandlungen über den Einfluß der Temperatur auf die Bewegung des Wassers in Röhren", Berlin, 1854) angestellt worden. Durch die allerdings nur an sehr engen Röhren ($d = 0{,}108$ bis $0{,}227$ Zoll) angestellten Versuche des Letzteren hat sich ergeben, daß unter übrigens gleichen Verhältnissen die Geschwindigkeit des Wassers in Röhren nicht ohne Grenze mit der Temperatur desselben zunimmt, sondern daß es für jede Röhre eine gewisse Temperatur giebt, wo diese Geschwindigkeit im Maximum ist. Für die Versuche außerhalb dieses Maximums findet Hagen folgende Formel:

$$h = m\, l\, r^{-1{,}25} \,.\, v^{1{,}75}, \text{ und}$$

$$m = 0{,}000038941 - 0{,}0000017185 \sqrt{t},$$

wo die Temperatur t in R.-Graden, und die Druckhöhe h, die Länge l, der Röhrenhalbmesser r und die Geschwindigkeit v in Zollen auszudrücken sind.

(§. 431) **Conische Röhren.** Bei einer conischen Röhre AD, Fig. 730, läßt sich der Reibungswiderstand auf folgende Weise finden. Es sei der halbe Convergenzwinkel der Röhrenwand $ACL = BCL = \delta$, der Durchmesser AB der Einmündung, $= d_1$, der Durchmesser DE der Ausmündung $= d$, ferner die Länge KL der Röhre, $= l$, und die Ausflußgeschwindigkeit (bei DE) $= v$.

Fig. 730.

In einem Abstande $KM = x$ von der Ausmündung ist der Durchmesser der Röhre:

$$NO = y = DE + 2\, KM\, tang.\, \delta$$
$$= d + 2\, x\, tang.\, \delta,$$

und daher die Geschwindigkeit w daselbst, da sich

$$\frac{w}{v} = \frac{d^2}{y^2} \text{ setzen läßt:}$$

$$w = \frac{d^2}{y^2} v = \frac{v}{\left(1 + \frac{2x}{d} tang.\, \delta\right)^2}.$$

Für ein Element $NOPR$ des Röhrenstückes von der Länge

$$OP = NR = \frac{MQ}{cos.\,\delta} = \frac{\partial x}{cos.\,\delta}$$

ist daher die Widerstandshöhe der Reibung:

$$\partial h = \zeta \cdot \frac{\partial x}{y\, cos.\,\delta} \cdot \frac{w^2}{2g} = \zeta \cdot \frac{\partial x}{y\, cos.\,\delta \left(1 + \frac{2x}{d}\, tang.\,\delta\right)^4} \cdot \frac{v^2}{2g}$$

$$= \zeta \cdot \frac{\partial x}{d\, cos.\,\delta \left(1 + \frac{2x}{d}\, tang.\,\delta\right)^5} \cdot \frac{v^2}{2g},$$

und es folgt die Reibungswiderstandshöhe für die ganze Röhre:

$$h = \zeta \cdot \frac{v^2}{2gd} \int_0^l \frac{\partial x}{\left(1 + \frac{2x}{d}\, tang.\,\delta\right)^5 cos.\,\delta}.$$

Nun ist aber:

$$\int \frac{\partial x}{\left(1 + \frac{2x}{d}\, tang.\,\delta\right)^5 cos.\,\delta}$$

$$= \frac{d}{2\, sin.\,\delta} \int \left(1 + \frac{2x}{d}\, tang.\,\delta\right)^{-5} \partial \left(\frac{2x}{d}\, tang.\,\delta\right)$$

$$= -\frac{d}{8\, sin.\,\delta} \left(1 + \frac{2x}{d}\, tang.\,\delta\right)^{-4},$$ daher ergiebt sich:

$$\int_0^l \frac{\partial x}{\left(1 + \frac{2x}{d}\, tang.\,\delta\right)^5 cos.\,\delta}$$

$$= \frac{d}{8\, sin.\,\delta} \left[1 - \left(1 + \frac{2l}{d}\, tang.\,\delta\right)^{-4}\right],$$ oder:

$$= \frac{d}{8\, sin.\,\delta} \left[1 - \left(\frac{d_1}{d}\right)^{-4}\right] = \frac{d}{8\, sin.\,\delta} \left[1 - \left(\frac{d}{d_1}\right)^4\right],$$

da $d + 2l\, tang.\,\delta$ den Durchmesser d_1 der Einmündung ausdrückt.

Es ist folglich die gesuchte Widerstandshöhe:

$$h = \zeta \cdot \frac{v^2}{2gd} \cdot \frac{d}{8\, sin.\,\delta} \left[1 - \left(\frac{d}{d_1}\right)^4\right]$$

$$= {}^1/_8\, \frac{\zeta}{sin.\,\delta} \left[1 - \left(\frac{d}{d_1}\right)^4\right] \cdot \frac{v^2}{2g} = {}^1/_8\, \zeta\, cosec.\,\delta \left[1 - \left(\frac{d}{d_1}\right)^4\right] \frac{v^2}{2g}.$$

Ist die Einmündung viel weiter als die Ausmündung, so kann man $\left(\frac{d}{d_1}\right)^4 =$ Null setzen, und erhält hiernach:

$$h = {}^1/_8\, \frac{\zeta}{sin.\,\delta} \cdot \frac{v^2}{2g} = {}^1/_8\, \zeta\, cosec.\,\delta \cdot \frac{v^2}{2g};$$

es hängt also in diesem Falle der Reibungswiderstand gar nicht von der Länge der Röhre ab.

Beispiel. Bei einem Feuerspritzenmundstück AK, Fig. 731, ist der Convergenzwinkel des Ausmündungsstückes BK, $2\delta = 5^0$, und der des Einmündungsstückes AB, $2\delta_1 = 18^0$, ferner die Weite der Ausmündung, $d = 7$ Linien, die Weite der Einmündung, $d_1 = 1\frac{1}{2}$ Zoll $= 18$ Linien, und die ganze Länge des Gußstückes $AK = l = 6$ Zoll $= 72$ Linien, welche Größe hat der Widerstandscoefficient desselben? Setzen wir die Länge des Ausmündungsstückes $BK = l_1$, und die des Einmündungsstückes $AB = l_2$, so haben wir:

$$l_1 + l_2 = l \text{ und } l_1 \, tang. \delta + l_2 \, tang. \delta_1 = \frac{d_1 - d}{2},$$

in Zahlen:

$$l_1 + l_2 = 72 \text{ und } l_1 \, tang. 2\frac{1}{2}^0 + l_2 \, tang. 9^0 = {}^{11}/_2, \text{ oder:}$$
$$0{,}04362 \, l_1 + 0{,}15838 \, l_2 = 5{,}5.$$

Fig. 731.

Hieraus folgt: $l_1 = 51{,}54$ und $l_2 = 20{,}46$ Linien, und die Weite bei B, wo die Kegelflächen zusammenstoßen:

$$d_2 = d + 2 l_1 \, tang. \delta = 7 + 2 \,.\, 51{,}54 \,.\, 0{,}04362 = 11{,}53 \text{ Linien.}$$

Da diese Stelle abzurunden ist, möge aber $d_2 = 13$ Linien gesetzt werden. Nun folgt für das Ausmündungsstück:

$$\left[1 - \left(\frac{d}{d_2}\right)^4\right] \cdot \frac{1}{sin. \delta} = [1 - (7/_{13})^4] \,.\, cosec. 2\frac{1}{2}^0$$
$$= 0{,}9159 \,.\, 22{,}926 = 21{,}08,$$

und für das Einmündungsstück:

$$\left[1 - \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2\right] cosec. \delta_1 = [1 - (^{13}/_{18})^4] \,.\, cosec. 9^0$$
$$= 0{,}7795 \,.\, 6{,}392 = 4{,}98,$$

daher ist für das ganze Gußstück die Widerstandshöhe:

$$h = \frac{\zeta}{8}\left[21{,}08 + 4{,}98 \cdot \left(\frac{d}{d_2}\right)^4\right] \cdot \frac{v^2}{2g}$$
$$= \frac{\zeta}{8}\left[21{,}08 + 4{,}98 \cdot \left(\frac{7}{13}\right)^4\right] \frac{v^2}{2g} = 21{,}5 \cdot \frac{\zeta}{8} \cdot \frac{v^2}{2g}$$
$$= 2{,}7 \, \zeta \cdot \frac{v^2}{2g},$$

und wenn man $\frac{1}{2g} = 0{,}016$ einführt, so wie $\zeta = 0{,}02$ annimmt:

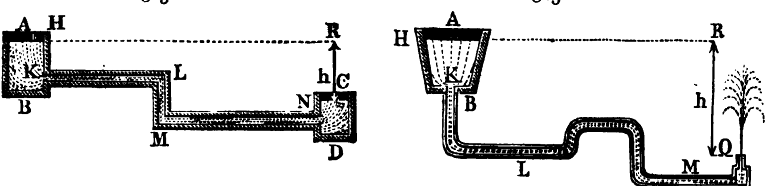
$$h = 0{,}054 \cdot \frac{v^2}{2g},$$

d. i. beinahe $5\frac{1}{2}$ Procent der Geschwindigkeitshöhe, womit auch die angestellten Versuche übereinstimmen.

§. 432 **Röhrenleitungen.** Eine Röhrenleitung mündet entweder unter Wasser oder in freier Luft aus. Beide Fälle sind in den Figuren 732 und 733 abgebildet. Im ersten Falle ist als Druckhöhe h der Niveauabstand RC beider Wasserspiegel von einander, im zweiten aber die senkrechte Tiefe RO der Ausmündung O unter dem Wasserspiegel H des Zuflußapparates anzunehmen. Behält nun die Röhre überall eine und dieselbe Weite d, so finden in beiden Fällen die im §. 430 entwickelten Formeln ihre unmittelbare An-

wendung, verengert oder erweitert sich aber die Röhre an einer Stelle, so hat man es mit verschiedenen Röhrengeschwindigkeiten zu thun, und es ist daher

Fig. 732. Fig. 733.



der Reibungswiderstand für jede Röhre besonders zu berechnen. Einen solchen Fall bietet z. B. die Wasserleitung in Fig. 733 mit einem springenden Strahle dar, wo das Mundstück O enger ist als die Zuleitungsröhre BLM. Setzen wir, wie gewöhnlich, die Ausflußgeschwindigkeit $= v$, die Weite der Ausmündung $O, = d$, die Weite der Röhre aber $= d_1$, so haben wir die Geschwindigkeit des Wassers in derselben:

$$v_1 = \left(\frac{d}{d_1}\right)^2 v,$$

und bezeichnet nun noch l_1 die Länge der Röhre BLM und ζ_1 den Reibungscoefficienten, so folgt die entsprechende Reibungshöhe:

$$h_1 = \zeta_1 \frac{l_1 v_1^2}{d_1 2g} = \zeta_1 \frac{l_1}{d_1} \left(\frac{d}{d_1}\right)^4 \cdot \frac{v^2}{2g}.$$

Ist nun noch ζ_0 der Widerstandscoefficient für das Einmündungsstück K und ζ der für das Ausmündungsstück O, so folgt der Druckhöhenverlust, welchen das erstere verursacht,

$$h_0 = \zeta_0 \frac{v_1^2}{2g} = \zeta_0 \left(\frac{d}{d_1}\right)^4 \cdot \frac{v^2}{2g},$$

dagegen der, welcher aus der Bewegung durch das zweite entspringt,

$$h_2 = \zeta \frac{v^2}{2g};$$

und hiernach hat man nun das ganze Gefälle:

$$h = \frac{v^2}{2g} + h_0 + h_1 + h_2 = \left[1 + \zeta_0 \left(\frac{d}{d_1}\right)^4 + \zeta_1 \frac{l_1}{d_1}\left(\frac{d}{d_1}\right)^4 + \zeta\right] \frac{v^2}{2g},$$

und umgekehrt, die Ausflußgeschwindigkeit:

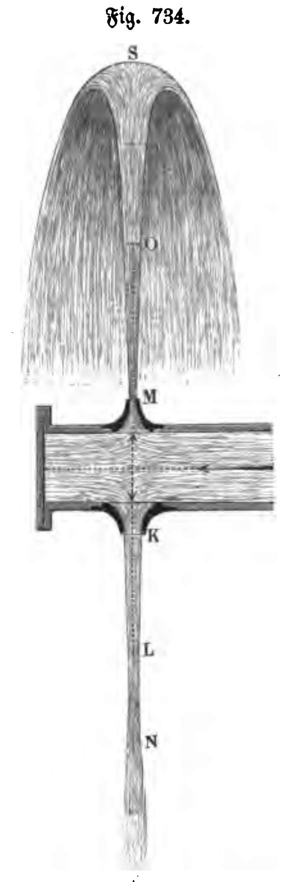
$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \left(\zeta_0 + \zeta_1 \frac{l_1}{d_1}\right)\left(\frac{d}{d_1}\right)^4 + \zeta}}.$$

Die Mund- oder Ausgußstücke müssen zur Erzielung einer großen Steighöhe nicht bloß dem Wasser einen möglichst kleinen Widerstand darbieten, sondern auch das Ausströmen in möglichst parallelen Fäden bewirken, damit dieselben beim Aufsteigen einen lang zusammenhängenden Strahl bilden, der

durch die Luft weniger gestört wird als ein gleich anfangs zerrissener Strahl. Aus diesem Grunde zieht man die kurzen cylindrischen oder wenig conischen Mundstücke mit abgerundeter Einmündung den Ausmündungen in der dünnen Wand oder den nach der Gestalt des contrahirten Wasserstrahles geformten Mundstücken vor, obgleich sie einen etwas größeren Geschwindigkeitsverlust verursachen als diese. Die Knoten und Bäuche, welche der aus den letzteren Mündungen kommende Strahl bildet oder zu bilden sucht, geben der äußeren Luft mehr Gelegenheit zum Eindringen als ein cylindrischer Strahl.

§. 433 **Springende Strahlen.** So lange der aus einer horizontalen Mündung K, Fig. 734, senkrecht abwärts fließende Strahl KLN noch ein Continuum bildet, und nicht von der Luft zerrissen wird, nimmt dessen Querschnitt L immer mehr und mehr ab, wenn der Abstand $KL = x$ von der Mündung wächst. Ist c die Ausflußgeschwindigkeit, und v die Geschwindigkeit in L, so hat man:

Fig. 734.



$$v^2 = 2gx + c^2;$$

und bezeichnet F die Querschnittsfläche der Ausmündung, sowie Y die Querschnittsfläche des Strahles in L, so gilt auch die Gleichung:

$$Fc = Yv, \text{ oder } F^2c^2 = Y^2v^2,$$

und es folgt schließlich die Gleichung:

$$Y^2(c^2 + 2gx) = Fc^2, \text{ oder:}$$

$$Y^2 = \frac{F^2c^2}{c^2 + 2gx}$$

für die Gestalt des die sogenannte Newton'sche Cataracte bildenden Wasserstrahles KN (siehe Newtoni Principia Philosophiae, Tom. II, Sect. VII). Ist der Querschnitt der Mündung K ein Kreis vom Durchmesser d, so bildet der Querschnitt L einen Kreis vom Durchmesser y, für welchen hiernach

$$y^4 = \frac{c^2d^4}{c^2 + 2gx}, \text{ oder}$$

$$y = \frac{d}{\sqrt[4]{1 + \frac{2gx}{c^2}}} \text{ ist.}$$

Ueber die innere Beschaffenheit der fallenden Wasserstrahlen sind von Savart

Versuche angestellt worden, siehe Poggendorff's Annalen der Physik, Bd. 33.

Bei dem aus einer horizontalen Mündung M senkrecht aufsteigenden Strahl MS nimmt dagegen der Querschnitt O mit der Entfernung $MO = x$ von der Mündung M allmälig zu; denn es ist hier die Geschwindigkeit des Wassers in O,

$$v = \sqrt{c^2 - 2gx}, \text{ und daher}$$

$$Y^2 = \frac{F^2 c^2}{c^2 - 2gx},$$

folglich für den Querschnittsdurchmesser y in O,

$$y^4 = \frac{c^2 d^4}{c^2 - 2gx}, \text{ oder } y = \frac{d}{\sqrt[4]{1 - \frac{2gx}{c^2}}}.$$

Bezeichnet man die Geschwindigkeitshöhe $\frac{c^2}{2g}$ durch h, so ist einfach und allgemein:

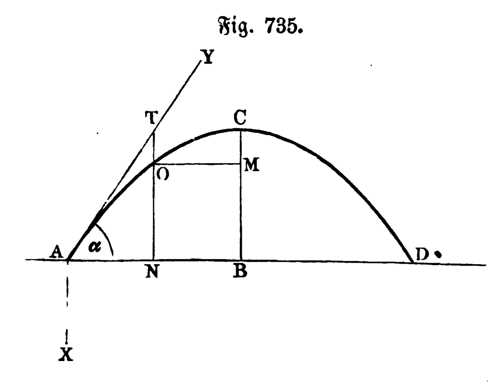
$$y_1 = \frac{d}{\sqrt[4]{1 \pm \frac{x}{h}}}.$$

Diese Formel verliert jedoch in ihren Grenzen ihre Richtigkeit; ihr zu Folge wäre z. B. beim steigenden Strahle für $x = h$, also im Scheitel S, der Durchmesser des Strahles

$$y = \frac{d}{\sqrt[4]{1-1}} = \frac{d}{0} = \infty.$$

Dies ist jedoch nicht der Fall, weil die einzelnen Wasserfäden, aus welchen der Strahl besteht, an der höchsten Stelle nicht ganz in Ruhe sind, sondern daselbst in Richtung radial-auswärts eine kleine Geschwindigkeit haben.

Fig. 735.



Wenn der Wasserstrahl AOC, Fig. 735, in einer gegen den Horizont geneigten Richtung ausströmt, so bleibt die Formel

$$y = \frac{d}{\sqrt[4]{1 \pm \frac{x}{h}}}$$

noch anwendbar, wenn man nur darin statt x die Verticalprojection NO des Strahles AO

einsetzt. Tritt der Strahl unter dem Neigungswinkel ν aus der Mündung, so ist die größte Steighöhe BC:

$$a = \frac{c^2 (sin.\,\nu)^2}{2g} = h\,(sin.\,\nu)^2 \text{ (s. §. 39)},$$

daher der Durchmesser desselben (im Scheitel C):

$$y = \frac{d}{\sqrt[4]{1 - \frac{a}{h}}} = \frac{d}{\sqrt[4]{1 - (sin.\,\nu)^2}} = \frac{d}{\sqrt{cos.\,\nu}}.$$

Im niedergehenden Strahltheile CD wird y wieder allmälig kleiner und kleiner, und beim Auffallen auf die Horizontalebene AD, von der er ausgegangen ist, würde y wieder $= d$ sein, wenn die Luft keine Störungen in der Bewegung des Strahles hervorbrächte.

§. 434 Die Steighöhe s eines vertical springenden Wasserstrahles ist nur bei kleinen Ausflußgeschwindigkeiten (c) nahe gleich der Geschwindigkeitshöhe $h = \frac{c^2}{2g}$; bei größeren Ausflußgeschwindigkeiten fällt dagegen in Folge des Widerstandes der Luft die Steighöhe s namhaft kleiner aus als die Geschwindigkeitshöhe $\frac{c^2}{2g}$. Aus den vom Verfasser angestellten Versuchen (s. die Versuche über die Steighöhe springender Wasserstrahlen bei verschiedenen Mundstücken im 5. Bande der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure) sind folgende Thatsachen über springende Wasserstrahlen hervorgegangen:

1) Der Widerstand der Luft ist bei kleinen Ausflußgeschwindigkeiten von 5 bis 20 Fuß, oder bei Steighöhen von 1 bis 6 Fuß so klein, daß hier die Sprunghöhe s ohne merklichen Fehler der Geschwindigkeitshöhe $\frac{c^2}{2g}$ des ausströmenden Wassers gleichgesetzt werden kann.

2) Wenn die Geschwindigkeitshöhe nicht über 75 Fuß, oder die Ausflußgeschwindigkeit nicht über 56 Fuß ist, so läßt sich das Verhältniß der Steighöhe s zur Geschwindigkeitshöhe $h = \frac{c^2}{2g}$ setzen:

$$\frac{s}{h} = \frac{1}{\alpha + \beta h + \gamma h^2},$$

wobei α, β und γ für jede Mündung besonders zu bestimmende Erfahrungscoefficienten bezeichnen.

3) Bei Wasserstrahlen, welche aus Mündungen in der dünnen Wand emporspringen, läßt sich die Constante $\alpha =$ Eins setzen, folglich auch annehmen, daß der Widerstand beim Durchgang durch die Mündung bei einer kleinen Geschwindigkeit ziemlich Null ist, und erst bei größeren Ausfluß-

geschwindigkeiten meßbar wird. Hiernach ist also auch der Widerstandscoefficient ζ für diese Mündungen nicht constant, sondern wächst von Null an allmälig mit der Geschwindigkeit und der §. 408 angegebene Werth $\zeta = 0{,}97$ kann nur als ein mittlerer angesehen werden.

4) Bei gleicher Ausflußgeschwindigkeit wächst die Steighöhe mit der Dicke des Strahles oder der Weite der Ausflußmündung; es ist folglich der Widerstand der Luft bei dicken Strahlen kleiner als bei schwachen. Die Steighöhe ist deshalb nicht allein bei großen Druckhöhen, sondern auch bei starken Strahlen größer als bei kleinen Druckhöhen und bei schwachen Strahlen.

5) Unter übrigens gleichen Verhältnissen springen die Wasserstrahlen aus kreisförmigen Mündungen höher als die aus quadratischen oder anders geformten Mündungen.

6) Bei gleicher Ausflußgeschwindigkeit und gleicher Mündungsweite springen die ohne Contraction ausfließenden Wasserstrahlen höher als die contrahirten Wasserstrahlen, und zwar nicht allein, weil diese Strahlen im Ganzen dünner sind als jene, sondern auch weil sie durch ihre abwechselnden Zusammenziehungen und Anschwellungen dem Eindringen der Luft weniger Widerstand entgegensetzen.

Unter übrigens gleichen Umständen und Verhältnissen und bei nicht sehr kleinen Ausflußgeschwindigkeiten erreichen die durch kurze conoidische und längere conische Ansatzröhren mit innerer Abrundung ausfließenden Strahlen die größten Steighöhen.

Mariotte folgert aus seinen Versuchen über die Steighöhe springender Strahlen (s. die Meining'sche Uebersetzung von Mariotte's Grundlehren der Hydrostatik und Hydraulik), an Mündungen in der dünnen Wand von 4 und 6 Linien Durchmesser und bei Druckhöhen von $5^1/_2$ bis 35 Fuß, daß die zur Erlangung der Steighöhe s nöthige Druck- oder Geschwindigkeitshöhe

$$h = s + \frac{s^2}{300} \text{ Pariser Fuß}$$

sein müsse, wonach folglich

$$\frac{h}{s} = 1 + \frac{s}{300} = 1 + 0{,}0033335 \text{ zu setzen wäre.}$$

Die weit ausgedehnteren und sehr mannigfaltigen Versuche des Verfassers, welche derselbe bei Druckhöhen von 3 bis 70 Fuß angestellt hat, geben dagegen für Kreismündungen in der dünnen Wand,

1) von 1 Centimeter Durchmesser:

$$\frac{h}{s} = 1 + 0{,}0036354\,h + 0{,}00005732\,h^2, \text{ und}$$

2) von 1,41 Centimeter Durchmesser:

$$\frac{h}{s} = 1 + 0{,}0024424\,h + 0{,}000059475\,h^2,$$

wobei h in preuß. Fußen zu geben ist.

Für ein conisches Mundstück ABC, Fig. 736, von 15 Centimeter

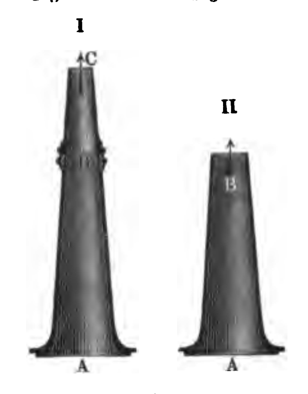
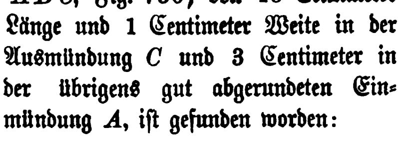


Fig. 736. Fig. 737.



Länge und 1 Centimeter Weite in der Ausmündung C und 3 Centimeter in der übrigens gut abgerundeten Einmündung A, ist gefunden worden:

$$3)\quad \frac{h}{s} = 1{,}0453 + 0{,}0001171\,h + 0{,}00008462\,h^2,$$

und dagegen für das abgekürzte Mundstück AB, Fig. 737, von 1,41 Weite in der Ausmündung B:

$$4)\quad \frac{h}{s} = 1{,}0216 + 0{,}0007511\,h + 0{,}00003219\,h^2.$$



Mit Hülfe dieser Formeln ist folgende Tabelle der Steighöhen springender Wasserstrahlen berechnet worden.

Geschwindigkeitshöhe h =	10	20	30	40	50	60	70 Fuß.
Sprunghöhe s, ad (1)	9,60	18,26	25,85	32,33	37,74	42,12	45,60
" " " (2)	9,71	18,65	26,62	33,53	39,35	44,10	47,87
" " " (3)	9,48	18,49	26,67	33,75	38,60	44,22	47,63
" " " (4)	9,69	19,06	27,96	36,26	43,87	50,74	56,82

Beispiel. Wenn an einem Springbrunnen die Leitungsröhre 350 Fuß lang und 2 Zoll weit und das conische Mundstück desselben $\frac{1}{2}$ Zoll weit ist, wie hoch wird bei einer Druckhöhe h_0 von 40 Fuß der Strahl springen, vorausgesetzt, daß außer der Reibung alle übrigen Röhrenwiderstände klein genug sind, um sie vernachlässigen zu können. Es ist hier, wenn man

$$\zeta_1 = 0{,}025,\ \zeta_0 = 0{,}5\left(\frac{d}{d_1}\right)^4 = (\tfrac{1}{4})^4 = \tfrac{1}{256} \text{ und } \frac{l_1}{d_1} = \frac{350}{\tfrac{2}{12}} = 2100 \text{ setzt,}$$

die Höhe, welche der Ausflußgeschwindigkeit entspricht:

$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{h_0}{1 + \left(\zeta_0 + \zeta_1 \frac{l_1}{d_1}\right)\left(\frac{d}{d_1}\right)^4} = \frac{40}{1 + (0{,}5 + 0{,}025 \,.\, 2100) \,.\, \tfrac{1}{256}}$$

$$= \frac{40}{1{,}207} = 33{,}14 \text{ Fuß.}$$

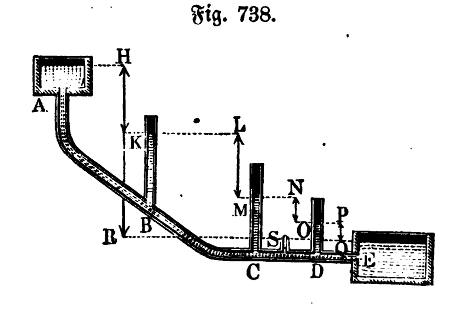
und daher die zu erwartende Steighöhe, bei ruhiger Luft, nach Formel (4):

$$s = \frac{h}{1,0216 + 0,0007511\, h + 0,00003219\, h^2} = \frac{33,14}{1,0216 + 0,0249 + 0,0354}$$

$$= \frac{33,14}{1,0515} = 30,63 \text{ Fuß}.$$

§. 435 **Piëzometer.** Die Druckverluste, welche das Wasser in einer Röhrenleitung $ABCDE$, Fig. 738, durch Verengungen, Reibung u. s. w. erleidet,

Fig. 738.



kann man durch die Wassersäulen messen, welche sich in senkrecht aufgesetzten Röhren BK, CM, DO erhalten, die man, wenn sie lediglich zu diesem Zwecke dienen, Piëzometer nennt. (S. §. 386.)

Ist v die Geschwindigkeit des Wassers an der Stelle B, Fig. 738, wo ein Piëzometer einmündet, l die Länge, d die Weite des Röhrenstückes AB, h die Druckhöhe oder die Tiefe des Punktes B unter dem Wasserspiegel, ist ferner ζ_0 der Widerstandscoefficient für den Eintritt aus dem Reservoir in die Röhre, und ζ der Reibungscoefficient, so hat man für den, den Druck in B messenden Piëzometerstand:

$$z = h - \left(1 + \zeta_0 + \zeta \frac{l}{d}\right) \frac{v^2}{2g}.$$

Dagegen ist bei der Länge l_1 und dem Gefälle h_1 des Röhrenstückes BC, der Piëzometerstand in C:

$$z_1 = h + h_1 - \left(1 + \zeta_0 + \zeta \frac{l}{d} + \zeta \frac{l_1}{d}\right) \frac{v^2}{2g}.$$

Es folgt daher die Differenz der Piëzometerstände:

$$z_1 - z = h_1 - \zeta \frac{l_1}{d} \cdot \frac{v^2}{2g},$$

und umgekehrt, die Widerstandshöhe des Röhrenstückes BC

$$\zeta \frac{l_1}{d} \cdot \frac{v^2}{2g} = h_1 + z - z_1 = \text{Gefälle des Röhrenstückes}$$

plus Differenz der Piëzometerstände.

Man ersieht hieraus, daß die Piëzometer dazu dienen können, die Widerstände, welche das Wasser in den Röhrenleitungen zu überwinden hat, zu messen. Befindet sich in der Röhre ein besonderes Hinderniß, hat sich z. B. ein kleiner Körper in derselben festgesetzt, so wird dieses sogleich durch das Sinken des Piëzometerstandes angezeigt und die Größe des erzeugten Widerstandes ausgedrückt werden. Die Widerstände, welche durch Regulirungs-

apparate, wie Hähne, Schieber u. s. w., von welchen im folgenden Capitel die Rede ist, erzeugt werden, lassen sich ebenfalls durch Piëzometerstände ausdrücken. So steht z. B. das Piëzometer in D tiefer als das in C, nicht allein wegen der Reibung des Wassers in dem Röhrenstücke CD, sondern auch wegen der Verengung, welche der Schieber S in der Röhre hervorbringt. Ist bei völlig geöffnetem Schieber die Differenz NO der Piëzometerstände $= h_1$, bei eingestelltem Schieber aber $= h_2$, so giebt die neue Differenz oder Senkung $h_2 - h_1$ die Widerstandshöhe, welche dem Durchgange des Wassers durch den Schieber entspricht.

Endlich läßt sich auch aus dem Piëzometerstande die Ausflußgeschwindigkeit des Wassers berechnen. Ist der Piëzometerstand $PQ = z$, die Länge des letzten Röhrenstückes $DE = l$ und die Weite desselben $= d$, so hat man:

$$z = \zeta \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g},$$

und daher die Ausflußgeschwindigkeit:

$$v = \sqrt{\frac{2gz}{\zeta \frac{l}{d}}} = \sqrt{\frac{d}{l} \cdot \frac{2gz}{\zeta}}.$$

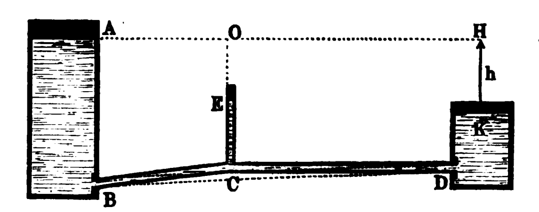
Beispiel. Ist bei der Leitung in Fig. 738, der Piëzometerstand $PQ = z$ $^3/_4$ Fuß, die Länge der Röhre DE, vom Piëzometer bis zur Ausmündung gemessen, $l = 150$ Fuß, und die Röhrenweite $3^1/_2$ Zoll, so folgt bei dem Widerstandscoefficienten $\zeta = 0{,}025$ die Ausflußgeschwindigkeit:

$$v = 7{,}906 \sqrt{\frac{3{,}5}{150 \,.\, 12} \cdot \frac{0{,}75}{0{,}025}} = 7{,}906 \,.\, 0{,}2415 = 1{,}91 \text{ Fuß},$$

und die Ausflußmenge: $Q = \frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{3{,}5}{12}\right)^2 \cdot 1{,}91 = 0{,}127$ Cubikfuß.

Anmerkung. Die Bewegung des Wassers in einer Röhrenleitung BCD, Fig. 739, kann sehr leicht durch Luft gestört werden, welche sich entweder aus dem

Fig. 739.



Wasser entwickelt, oder von außen in die Röhre eindringt. Damit keins von beiden eintrete, muß bei der Anlage der Röhrenleitung dafür gesorgt werden, daß der Druck an jeder Stelle C derselben positiv bleibe, oder vielmehr den Atmosphärendruck übertreffe, also in jedem Piëzometer eine Wassersäule CE stehe. Die Höhe dieser Wassersäule ist:

$$z = h_1 - \left(1 + \zeta_0 + \zeta\,\frac{l_1}{d}\right)\frac{v^2}{2g},$$

wenn h_1 die Druckhöhe CO in C, l_1 die Länge des Röhrenstückes BC, und v die Geschwindigkeit des Wassers in der Röhre bezeichnet. Es ist also nöthig, daß

$$h_1 > \left(1 + \zeta_0 + \zeta\,\frac{l_1}{d}\right)\frac{v^2}{2g}$$

sei, daß z. B. der Wasserstand im Zuflußreservoir mindestens die Geschwindigkeitshöhe des Wassers in der Röhre übertreffe. Außerdem ist zu befürchten, daß die Röhre in einem Wirbel Luft nachsauge.

Auch läßt sich $h_1 > \dfrac{1 + \zeta_0 + \zeta\,\frac{l_1}{d}}{1 + \zeta_0 + \zeta\,\frac{l}{d}}\,h$ setzen, wenn h das ganze Röhrengefälle HK und l die ganze Röhrenlänge BCD bezeichnet.

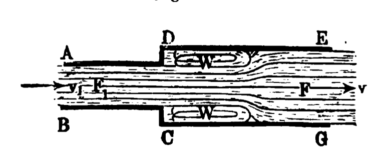
Um das Ansammeln von Luft in der Röhre mit Sicherheit zu verhindern, ist es sehr zweckmäßig, dieselbe steigend zu legen, weil dann die Luftblasen vom fließenden Wasser mit fortgenommen werden.

Viertes Capitel.

Von den Hindernissen in der Bewegung des Wassers bei Geschwindigkeits- und Richtungsveränderungen.

§. 436 **Plötzliche Erweiterung.** Veränderungen in dem Querschnitte einer Röhre oder eines anderen Ausflußreservoirs geben auch Veränderungen in der Geschwindigkeit des Wassers. Die Geschwindigkeit ist dem Querschnitte des Wasserstromes umgekehrt proportional; je weiter das Gefäß ist, desto kleiner ist die Geschwindigkeit, und je enger das Gefäß, desto größer die Geschwindigkeit des durchfließenden Wassers. Aendert sich der Querschnitt eines Gefäßes plötzlich, wie z. B. bei der Röhre ACE, Fig. 740, so tritt

Fig. 740.



auch eine plötzliche Geschwindigkeitsveränderung ein, und hiermit ist wieder ein Verlust an lebendiger Kraft und eine entsprechende Abnahme an Druck verbunden. Dieser Verlust läßt sich genau so berechnen, wie der Arbeitsverlust beim Stoße unelastischer Körper (s. §. 335). Jedes Wasserelement, welches aus der engeren Röhre BD in

die weitere Röhre DG tritt, stößt gegen die langsamer gehende Wassermasse in dieser Röhre und geht nach dem Stoße mit dieser vereinigt fort. Genau so ist es aber auch bei dem Zusammentreffen fester und unelastischer Körper, auch diese Körper gehen nach dem Stoße mit einer gemeinschaftlichen Geschwindigkeit fort. Wenn wir nun gefunden haben, daß der Arbeitsverlust beim Stoße dieser Körper

$$L = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g} \cdot \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2}$$

ist, so können wir hier, da das stoßende Wasserelement G_1 unendlich klein ist gegen die gestoßene Wassermasse G_2, setzen:

$$L = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g} G_1,$$

und folglich den entsprechenden Verlust an Druckhöhe:

$$h = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g}.$$

Es entsteht also durch die plötzliche Geschwindigkeitsveränderung ein Druckhöhenverlust, welcher durch die dieser Veränderung entsprechende Geschwindigkeitshöhe gemessen wird.

Ist nun der Querschnitt der einen Röhre AC, $= F_1$, und der Querschnitt der anderen Röhre CE, welche mit der ersteren ein Ganzes bildet, $= F$, die Geschwindigkeit des Wassers in der ersten Röhre, $= v_1$ und die in der anderen, $= v$, so hat man:

$$v_1 = \frac{Fv}{F_1},$$

daher den Druckhöhenverlust beim Uebergange aus einer Röhre in die andere:

$$h_1 = \left(\frac{F}{F_1} - 1\right)^2 \cdot \frac{v^2}{2g},$$

und den entsprechenden, schon von Borda gefundenen Widerstandscoefficienten:

$$\zeta = \left(\frac{F}{F_1} - 1\right)^2.$$

Die gefundene Druckhöhe

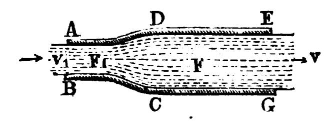
$$h_1 = \left(\frac{F}{F_1} - 1\right)^2 \cdot \frac{v^2}{2g}$$

kann natürlich nicht spurlos verloren gehen, man muß vielmehr annehmen, daß die ihr entsprechende mechanische Arbeit auf die Zertheilung und die schwingende Bewegung der vorher ein Continuum bildenden Wassertheile, zumal auf die Wirbelbewegung in W, W verwendet wird.

Die hierüber angestellten Versuche des Verfassers stimmen mit der Theorie

gut überein. Damit die Röhre DG vom Wasser ausgefüllt werde, ist es nöthig, daß sie nicht sehr kurz und nicht sehr viel weiter sei als die Röhre AC. Dieser Verlust verschwindet, wenn, wie Fig. 741 repräsentirt, durch Abrundung der Kanten ein allmäliger Uebergang aus der einen Röhre in die andere herbeigeführt wird.

Fig. 741.



Beispiel. Wenn der Durchmesser der einen Röhre in der Zusammensetzung von Fig. 740 noch einmal so groß ist als der der anderen Röhre, so ist $\frac{F}{F_1} = (2/1)^2 = 4$, daher der Widerstandscoefficient $\zeta = (4 - 1)^2 = 9$ und die entsprechende Widerstandshöhe für den Uebergang aus der engeren Röhre in die weitere, $= 9 \cdot \frac{v^2}{2g}$. Ist die Geschwindigkeit des Wassers in der letzteren Röhre, $= 10$ Fuß, so folgt die Widerstandshöhe $= 9 . 0{,}016 . 10^2 = 14{,}4$ Fuß.

§. 437 **Verengung.** Eine plötzliche Geschwindigkeitsveränderung tritt auch dann ein, wenn das Wasser aus einem Gefäße AB, Fig. 742, in eine engere Röhre DG tritt, zumal wenn an der Eintrittsstelle CD ein Diaphragma sitzt, dessen Oeffnung noch kleiner ist als der Querschnitt des Rohres DG. Ist der Inhalt der Verengung, $= F_1$, und α der Contractionscoefficient, so hat man den Querschnitt F_2 des contrahirten Wasserstrahles, $= \alpha F_1$, und ist dagegen F der Querschnitt des Rohres und v die Ausflußgeschwindigkeit, so findet man die Geschwindigkeit des Wassers im contrahirten Querschnitte F_2 durch die Formel

$$v_2 = \frac{F}{\alpha F_1} v,$$

daher den Druckhöhenverlust beim Uebergange aus F_2 in F oder aus v_2 in v:

$$h = \frac{(v_2 - v)^2}{2g} = \left(\frac{F}{\alpha_1 F_1} - 1\right)^2 \frac{v^2}{2g},$$

und den entsprechenden Widerstandscoefficienten:

$$\zeta = \left(\frac{F}{\alpha_1 F_1} - 1\right)^2.$$

Fig. 742. Fig. 743.

Ohne Diaphragma erhält man eine bloße Ansatzröhre, Fig. 743, daher ist hier $F = F_1$ und

$$\zeta = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2,$$

sowie umgekehrt,

$$\alpha = \frac{1}{1 + \sqrt{\zeta}}.$$

Nimmt man $\alpha = 0,64$ an, so erhält man:

$$\zeta = \left(\frac{1 - 0,64}{0,64}\right)^2 = (9/16)^2 = 0,316.$$

Durch den Widerstand beim Eintritt in die Röhre und durch die Reibung des Wassers im äußeren Röhrenstücke steigert sich aber ζ auf 0,505 (§. 422).

Versuche über den Ausfluß des Wassers durch eine Ansatzröhre mit verengtem Eintritte, wie Fig. 742 vorstellt, haben den Verfasser auf Folgendes geführt. Der Widerstandscoefficient für den Durchgang durch ein Diaphragma und für den Anschluß an die weitere Röhre kann durch die Formel

$$\zeta = \left(\frac{F}{\alpha F_1} - 1\right)^2$$

ausgedrückt werden; es ist aber zu setzen:

Für $\frac{F_1}{F}$ =	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
α =	0,616	0,614	0,612	0,610	0,607	0,605	0,603	0,601	0,598	0,596
und folgt:										
ζ =	231,7	50,99	19,78	9,612	5,256	3,077	1,876	1,169	0,734	0,480

Hiernach ist z. B. in dem Falle, wenn der verengte Querschnitt halb so groß ist als der Querschnitt der Röhre, der Widerstandscoefficient $\zeta = 5,256$, d. h. der Durchgang durch diese Verengung nimmt eine Druckhöhe in Anspruch, welche $5\frac{1}{4}$ mal so groß ist als die Geschwindigkeitshöhe.

Beispiel. Welche Ausflußmenge giebt der in Fig. 742 abgebildete Apparat, wenn die Druckhöhe $1\frac{1}{2}$ Fuß, die Weite der kreisförmigen Verengung $1\frac{1}{2}$ und die der Röhre CE, = 2 Zoll ist? Hier hat man:

$\frac{F_1}{F} = \left(\frac{1\frac{1}{2}}{2}\right)^2 = (3/4)^2 = 9/16 = 0,56$, daher $\alpha = 0,606$, und

$$\zeta = \left(\frac{16}{9 \, . \, 0,606} - 1\right)^2 = \left(\frac{16 - 5,454}{5,454}\right)^2 = \left(\frac{10,546}{5,454}\right)^2 = 3,74.$$

Setzt man nun $h = (1 + \zeta)\frac{v^2}{2g}$, so erhält man die Ausflußgeschwindigkeit:

$$v = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1+\zeta}} = \frac{7{,}906\sqrt{1{,}5}}{\sqrt{4{,}74}} = 4{,}45 \text{ Fuß},$$

und folglich das Ausflußquantum:

$$Q = \frac{\pi d^2}{4} v = \frac{\pi}{4} \cdot 4 \,.\, 12 \,.\, 4{,}45 = 53{,}4 \,.\, \pi = 168 \text{ Cubikzoll}.$$

§. 438 **Einfluss der unvollkommenen Contraction.** Bei dem im letzten Paragraphen betrachteten Falle, wo das Wasser aus einem großen Gefäße kommt, konnte die Contraction als eine vollkommene angesehen werden; ist aber der Querschnitt des Gefäßes oder des an einer Verengung ankommenden Wasserstromes nicht sehr groß in Ansehung auf den Querschnitt F_1, Fig. 744, der Verengung, so ist die Contraction eine unvollkommene und daher auch der entsprechende Widerstandscoefficient kleiner als in dem oben untersuchten Falle. Gelten wieder die vorigen Bezeichnungen, so hat man auch hier die Widerstandshöhe oder die durch den Durchgang durch F_1 verzehrte Druckhöhe:

$$h = \left(\frac{F}{\alpha_1 F_1} - 1\right)^2 \frac{v^2}{2g},$$

nur sind für α_1 veränderliche, und zwar um so größere Zahlen einzusetzen, je größer das Verhältniß $\frac{F_1}{G}$ zwischen dem Querschnitte der Verengung und dem Querschnitt G der Zuleitungsröhre AB ist. Befindet sich das Dia-

Fig. 744.

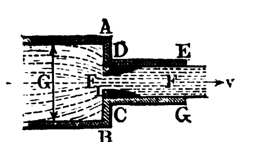
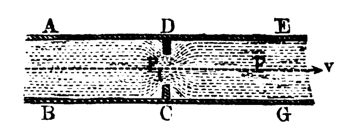


Fig 745.



phragma CD in einer gleichweiten Röhre AG, Fig. 745, so findet ganz dieselbe Bestimmung statt, nur hängt hier der Coefficient α von $\frac{F_1}{F}$ ab.

Nach den vom Verfasser hierüber angestellten Versuchen hat man in der Formel

$$\zeta = \left(\frac{F}{\alpha_1 F_1} - 1\right)^2$$

für die Widerstandscoefficienten zu setzen:

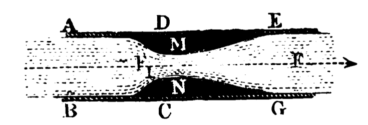
bei $\frac{F_1}{F}$ =	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
α_1 =	0,624	0,632	0,643	0,659	0,681	0,712	0,755	0,813	0,892	1,000

und es folgt:

ζ =	225,9	47,77	30,83	7,801	3,753	1,796	0,797	0,290	0,060	0,000

Diese Verluste werden kleiner, wenn man durch Abrundung der Kanten die Contraction vermindert oder aufhebt, und sie lassen sich fast ganz beseitigen, wenn man, wie Fig. 746 repräsentirt, ein sich allmälig erweiterndes Durchgangsstück MN einsetzt.

Fig. 746.



Beispiel. Welche Druckhöhe wird erfordert, damit der in Fig. 747 abgebildete Apparat in der Minute 8 Cubikfuß Wasser liefere? Ist die Weite des Diaphragma F_1, $= 1\frac{1}{2}$, die Weite der Ausflußröhre DG, $= 2$ Zoll und die untere Weite des Gefäßes AC, $= 3$ Zoll, so hat man:

Fig. 747.

$$\frac{F_1}{G} = \left(\frac{1\frac{1}{2}}{3}\right)^2 = \frac{1}{4}, \text{ daher } \alpha = 0{,}637,$$

ferner:

$$\frac{F}{F_1} = \left(\frac{2}{1\frac{1}{2}}\right)^2 = (4/3)^2 = 16/9,$$

und den Widerstandscoefficienten:

$$\zeta = \left(\frac{16}{9 \,.\, 0{,}637} - 1\right)^2 = \left(\frac{10{,}267}{5{,}733}\right)^2 = 3{,}207.$$

Nun folgt die Ausflußgeschwindigkeit:

$$v = \frac{4\,Q}{\pi\, d^2} = \frac{4 \,.\, 8}{60 \,.\, \pi\, (1/6)^2} = \frac{19{,}2}{\pi} = 6{,}112 \text{ Fuß},$$

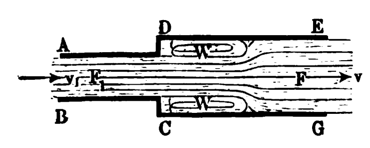
und daher die in Frage stehende Druckhöhe:



$$h = (1 + \zeta)\,\frac{v^2}{2g} = 4{,}207 \,.\, 0{,}016 \,.\, 6{,}112^2 = 2{,}51 \text{ Fuß}.$$

§. 439 **Druckverhältnisse in cylindrischen Röhren.** Mit Hülfe der Borda'schen Formel lassen sich nun auch die Druckverhältnisse in einer Ausflußröhre mit verschiedenen Weiten, wie z. B. ACE Fig. 748, ermitteln. Ist p_1 der Druck und v_1 die Geschwindigkeit des Wassers in F_1, sowie p der Druck und v die Geschwindigkeit desselben in F, so hat man:

Fig. 748.



$$\frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} + \frac{(v_1 - v)^2}{2g} = \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g}, \text{ und daher}$$

$$\frac{p_1}{\gamma} = \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2 - v_1^2 + (v_1 - v)^2}{2g} = \frac{p}{\gamma} - \frac{(v_1 - v)\,v}{g}, \text{ oder}$$

$$\frac{p_1}{\gamma} = \frac{p}{\gamma} - \left(\frac{F}{F_1} - 1\right)\frac{v^2}{g}.$$

Nun ist aber die ganze Druckhöhe

$$h = \frac{v^2}{2g} + \frac{(v_1 - v)^2}{2g} = \left[1 + \left(\frac{F}{F_1} - 1\right)^2\right]\frac{v^2}{2g},$$

daher hat man auch

$$\frac{p_1}{\gamma} = \frac{p}{\gamma} - \frac{2(v_1 - v)\,v}{v^2 + (v_1 - v)^2}\,h,$$

$$= \frac{p}{\gamma} - \frac{2\left(\frac{F}{F_1} - 1\right)h}{1 + \left(\frac{F}{F_1} - 1\right)^2}.$$

In dem Falle, wo das Wasser mit dem Querschnitte F in die freie Luft strömt, ist $\frac{p}{\gamma}$ = dem Wasserbarometerstande b, daher die Piëzometerhöhe in F_1,

$$z_1 = \frac{p_1}{\gamma} = b - \frac{2\left(\frac{F}{F_1} - 1\right)h}{1 + \left(\frac{F}{F_1} - 1\right)^2}.$$

So lange nun p_1 positiv ausfällt, fließt auch das Wasser mit gefülltem Querschnitt F bei EG aus; stellt sich hingegen p_1 negativ heraus, so hört das vorausgesetzte Ausflußverhältniß ganz auf, und es fließt das Wasser durch die äußere Röhre CE so aus, als wenn dieselbe gar nicht vorhanden wäre, und zwar mit der theoretischen Ausflußgeschwindigkeit $v_1 = \sqrt{2gh}$.

Damit der volle Ausfluß bei EG eintrete, ist folglich nöthig, daß

$$\frac{2\left(\frac{F}{F_1} - 1\right)h}{1 + \left(\frac{F}{F_1} - 1\right)^2} < b, \text{ oder daß}$$

$$\frac{h}{b} < \frac{1 + \left(\frac{F}{F_1} - 1\right)^2}{2\left(\frac{F}{F_1} - 1\right)} \text{ sei.}$$

Wenn also die durch diese Formel angegebene Grenze von der Druckhöhe h übertroffen wird, hört der Ausfluß mit gefülltem Querschnitte auf.

Diese Formel findet auch ihre Anwendung bei der Röhre CE, Fig. 742, mit Diaphragma; hier ist nur statt F_1, $\alpha_1 F_1$ einzusetzen, daher für den vollen Ausfluß

$$\frac{h}{b} < \frac{1 + \left(\frac{F}{\alpha_1 F_1} - 1\right)^2}{2\left(\frac{F}{\alpha_1 F_1} - 1\right)} \text{ zu fordern.}$$

Läßt man das Diaphragma weg, hat man es also bloß mit einer kurzen cylindrischen Ansatzröhre CE, Fig. 743, zu thun, so ist $F_1 = F$ und daher

$$\frac{h}{b} < \frac{1 + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2}{2\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)} \text{ zu setzen.}$$

Führt man $\alpha = 0{,}64$, also $\frac{1}{\alpha} - 1 = 0{,}5625$ ein, so ergiebt sich für diese Röhren die Grenze des Ausflusses mit gefülltem Querschnitt:

$$\frac{h}{b} < \frac{1 + 0{,}3164}{2 \,.\, 0{,}5625}, \text{ d. i. } \frac{h}{b} < 1{,}17.$$

Nimmt man $b = 33$ Fuß an, so folgt, daß bei Druckhöhen über $1{,}17 \,.\, 33 = 38{,}6$ Fuß der volle Ausfluß durch eine kurze cylindrische Ansatzröhre aufhört.

Hiermit stimmen auch die Ergebnisse der Versuche des Verfassers vollkommen überein (s. den betreffenden Aufsatz im 9. Bande des Civilingenieur, über den Ausfluß des Wassers unter hohem Drucke).

Beim Ausfluß des Wassers in einen luftverdünnten Raum tritt diese Grenze noch eher ein, da dann b kleiner als 33 Fuß ist; wäre z. B. der Wasserbarometerstand in diesem Raume nur 3 Fuß, so würde der volle Ausfluß durch eine kurze cylindrische Ansatzröhre bei der Druckhöhe $h = 1{,}17 \,.\, 3 = 3{,}51$ Fuß aufhören.

Wenn das Wasser durch eine sich allmälig erweiternde Röhre ACE, Fig. 749, fließt, so ist der Piëzometerstand im Einmündungsstück AB:

$$\frac{p_1}{\gamma} = \frac{p}{\gamma} - \frac{v_1^2 - v^2}{2g} = \frac{p}{\gamma} - \left[\left(\frac{F}{F_1}\right)^2 - 1\right]\frac{v^2}{2g} = \frac{p}{\gamma} - \left[\left(\frac{F}{F_1}\right)^2 - 1\right] h,$$

Fig. 749.

folglich wenn man $\frac{p}{\gamma} = b$ setzt

$$z_1 = \frac{p_1}{\gamma} = b - \left[\left(\frac{F}{F_1}\right)^2 - 1\right] h.$$

Es ist daher hier

$$\frac{h}{b} < \frac{1}{\left(\frac{F}{F_1}\right)^2 - 1}$$

zu fordern, damit der Ausfluß mit gefülltem Querschnitte erfolge. Setzt man $\frac{h}{b} = 1{,}17$, also $\frac{b}{h} = 0{,}8547$, so erhält man das Querschnittsverhältniß, bei welchem unter der Druckhöhe $h = 38{,}6$ Fuß der volle Ausfluß aufhört:

$$\frac{F}{F_1} = \sqrt{1 + 0{,}8547} = 1{,}362,$$

Druckverhältnisse in conischen Röhren. Das Ausfluß- und Druckverhältniß bei einer cylindrischen Röhre CE mit oder ohne Diaphragma erleidet folgende Modificationen, wenn noch ein besonderes Mundstück oder eine andere Röhre $EGHK$, Fig. 750, an diese Röhre angeschlossen ist. Es bezeichne F den Querschnitt, v die Geschwindigkeit und p den Druck des Wassers an der Ausmündung HK, ferner F_1 den Querschnitt der Einmündung, αF_1 den Querschnitt des contrahirten Wasserstrahles, sowie v_1 die Geschwindigkeit und p_1 den Druck des Wassers in demselben; ebenso sei F_2 der Röhrenquerschnitt an der Stelle, wo sich der Wasserstrahl wieder an die Röhre anlegt, endlich bezeichne v_2 die Geschwindigkeit und p_2 den Druck des Wassers an eben dieser Stelle.

§. 440

Fig. 750.

Dann hat man

$$\frac{p_2}{\gamma} = \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2 - v_2^2}{2g} \text{ und daher}$$

$$\frac{p_1}{\gamma} = \frac{p_2}{\gamma} - \frac{v_2(v_1 - v_2)}{g} = \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2 - v_2^2}{2g} - \frac{v_2(v_1 - v_2)}{g}$$

$$= \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2 + v_2^2}{2g} - \frac{v_1 v_2}{g} = \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2 - 2 v_1 v_2 + v_2^2}{2g},$$

oder, da $\alpha F_1 v_1 = F_2 v_2 = F v$ ist, also

$$v_1 = \frac{Fv}{\alpha F_1} \text{ und } v_2 = \frac{Fv}{F_2} \text{ gesetzt werden kann,}$$

$$\frac{p_1}{\gamma} = \frac{p}{\gamma} + \left[1 - \frac{2F^2}{\alpha F_1 F_2} + \left(\frac{F}{F_2}\right)^2\right] \frac{v^2}{2g}.$$

Nun ist aber hier die zur Erzeugung der Ausflußgeschwindigkeit nöthige Druckhöhe

$$h = \frac{v^2}{2g} + \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g} = \left[1 + \left(\frac{F}{\alpha F_1} - \frac{F}{F_2}\right)^2\right] \frac{v^2}{2g},$$

daher folgt auch

$$\frac{p_1}{\gamma} = \frac{p}{\gamma} + \frac{1 - \frac{2F^2}{\alpha F_1 F_2} + \left(\frac{F}{F_2}\right)^2}{1 + \left(\frac{F}{\alpha F_1} - \frac{F}{F_2}\right)^2} h = \frac{p}{\gamma} + \frac{\frac{1}{F^2} - \frac{2}{\alpha F_1 F_2} + \frac{1}{F_2^2}}{\frac{1}{F^2} + \left(\frac{1}{\alpha F_1} - \frac{1}{F_2}\right)^2} h,$$

$$\text{d. i. } z_1 = \frac{p}{\gamma} - \frac{\frac{2}{\alpha F_1 F_2} - \left(\frac{1}{F_2} + \frac{1}{F_2^2}\right)}{\frac{1}{F^2} + \left(\frac{1}{\alpha F_1} - \frac{1}{F_2}\right)^2} h,$$

oder beim Ausflusse in die freie Luft,

$$z_1 = b - \frac{\frac{2}{\alpha F_1 F_2} - \left(\frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2^2}\right)}{\frac{1}{F^2} + \left(\frac{1}{\alpha F_1} - \frac{1}{F_2}\right)^2} h.$$

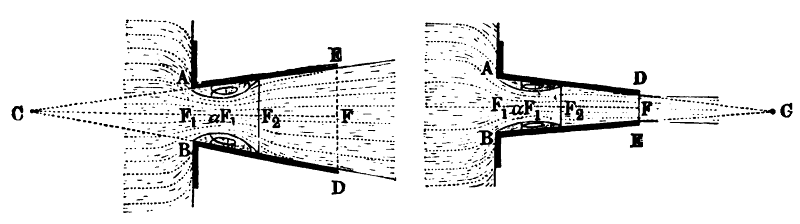
Damit ein voller Ausfluß erfolge, muß hiernach

$$\frac{h}{b} < \frac{\frac{1}{F^2} + \left(\frac{1}{\alpha F_1} - \frac{1}{F_2}\right)^2}{\frac{2}{\alpha F_1 F_2} - \left(\frac{1}{F^2} + \frac{1}{F_2^2}\right)}, \text{ oder}$$

$$\frac{1 + \frac{h}{b}}{F^2} > \left(\frac{2}{\alpha F_1 F_2} - \frac{1}{F_2^2}\right)\frac{h}{b} - \left(\frac{1}{\alpha F_1} - \frac{1}{F_2}\right)^2 \text{ sein.}$$

Mit Hülfe der vorstehenden Formeln lassen sich nun auch die Ausflußverhältnisse der conischen Röhren $ABDE$, Fig. 751 und Fig. 752, angeben;

Fig. 751. Fig. 752.



wenn man in denselben statt F_2 den Querschnitt der Röhre an der Stelle, wo sich der Strahl anlegt, einführt. Bezeichnet δ die Hälfte des Divergenzwinkels ACB der einen oder des Convergenzwinkels der anderen Röhre, und setzt man voraus, daß die Länge $F_1 F_2$ des Wirbels gleich der Mündungsweite $AB = d$ sei, so läßt sich die Weite der Röhren an der Stelle, wo sich das Wasser an die Röhrenwand anlegt, setzen:

$$d_2 = d_1 \pm 2\, d_1 \, tang.\, \delta = (1 \pm 2\, tang.\, \delta)\, d_1,$$

und daher das Querschnittsverhältniß

$$\frac{F_2}{F_1} = \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 = (1 \pm 2\, tang.\, \delta)^2,$$

wobei das Pluszeichen für die divergente Röhre in Fig. 751 und das Minuszeichen für die convergente Röhre in Fig. 752 in Anwendung zu bringen ist. Z. B. für $\delta = 2^1/_2$ Grad, ist $2\, tang.\, \delta = 0,0875$, und

$$\frac{F_2}{F_1} = (1 \pm 0,0875)^2 \text{ entweder } = 1,1827 \text{ oder } 0,8327;$$

daher die Ausflußgeschwindigkeit im ersten Falle:

$$v = \sqrt{\frac{2\,g\,h}{1 + \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{1,1827}\right)^2 \left(\frac{F}{F_1}\right)^2}} = \sqrt{\frac{2\,g\,h}{1 + 0,514 \left(\frac{F}{F_1}\right)^2}},$$

und dagegen im zweiten:

$$v = \sqrt{\frac{2\,g\,h}{1 + \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{0,8327}\right)^2 \left(\frac{F}{F_1}\right)^2}} = \sqrt{\frac{2\,g\,h}{1 + 0,1308 \left(\frac{F}{F_1}\right)^2}}.$$

Der entsprechende Ausflußcoefficient

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1 + 0,514 \left(\frac{F}{F_1}\right)^2}}$$

der divergenten Röhre ist natürlich ansehnlich kleiner als der Ausflußcoefficient

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1 + 0,1308 \left(\frac{F}{F_1}\right)^2}}$$

der convergenten Röhre.

Wären z. B. die Röhren drei Mal so lang als in der Einmündung weit, so hätte man im ersten Falle:

$$\left(\frac{F}{F_1}\right)^2 = (1 + 6\, tang.\, \delta)^4 = 1,2625^4 = 2,5405, \text{ und}$$

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2,306}} = 0,659, \text{ dagegen im zweiten Falle:}$$

$$\left(\frac{F}{F_1}\right)^2 = (1 - 6\, tang.\, \delta)^4 = 0,7375^4 = 0,2958, \text{ und}$$

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1,0387}} = 0,981 \text{ (vergl. §. 425).}$$

Damit der Ausfluß durch diese Röhren mit gefülltem Querschnitte erfolge, muß

$$\frac{h}{b} < \frac{1 + \left(\frac{F}{\alpha F_1} - \frac{F}{F_2}\right)^2}{\frac{2F}{\alpha F_1}\frac{F}{F_2} - \left[1 + \left(\frac{F}{F_2}\right)^2\right]}$$ sein, also im ersten Falle, wo

$$\frac{F}{\alpha F_1} = \frac{1,5939}{0,64} = 2,4906, \text{ und } \frac{F}{F_2} = \frac{1,5939}{1,1827} = 1,3477 \text{ ist,}$$

$$\frac{h}{b} < \frac{1 + 1,1429^2}{6,7112 - 2,8163} = \frac{2,3062}{3,8949} = 0,592,$$

darf also die Druckhöhe h noch nicht $33 . 0,592 = 19,5$ Fuß erreichen.

§. 441 **Knieröhren.** Besondere Hindernisse stellen sich der Bewegung des Wassers in Röhren entgegen, wenn dieselben gekrümmt sind oder gar Kniee bilden. Diese Widerstände lassen sich nicht mit Sicherheit theoretisch bestimmen, und mußten daher, wie so viele andere Ausflußverhältnisse, auf dem Wege der Erfahrung untersucht werden.

Bildet eine Röhre ACB, Fig. 753, ein Knie, so trennt sich der Strahl in Folge der Centrifugalkraft des Wassers von der inneren Fläche des zweiten Röhrenstückes; es hört, wenn dieses Stück kurz ist, der volle Ausfluß auf, und es fällt deshalb auch die Ausflußmenge kleiner aus als bei einer gleich langen geraden Röhre. Ist aber das äußere Stück CB der Knieröhre ACB,

Fig. 753.

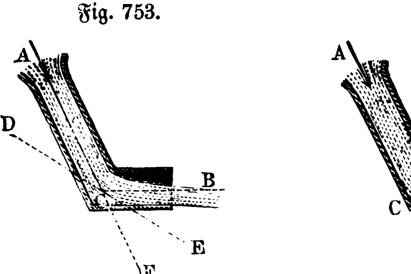


Fig. 754.

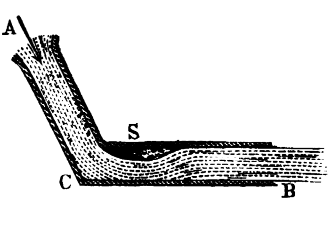


Fig. 754, länger, so bildet sich hinter dem Knie C ein Wirbel S, und es tritt bei wieder gefülltem Querschnitte eine verminderte Ausflußgeschwindigkeit v ein. Diese Verminderung der Ausflußgeschwindigkeit ist genau so zu beurtheilen wie der Widerstand, welchen Verengungen in Röhren bewirken. Ist F der Querschnitt der Röhre und F_1 der Querschnitt des contrahirten Strahles bei S, so hat man den Contractionscoefficienten desselben:

$$\alpha = \frac{F}{F_1},$$

und daher den entsprechenden Widerstandscoefficienten:

$$\zeta = \left(\frac{F}{F_1} - 1\right)^2 = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2.$$

Der Contractionscoefficient α und folglich auch der entsprechende Widerstandscoefficient ζ, hängt von dem Bricol- oder halben Ablenkungswinkel $\delta = ACD = BCE = \frac{1}{2} BCF$, Fig. 753, ab, und es ist nach den Versuchen, welche der Verfasser an einer Röhre von 3 Centimeter Weite hierüber angestellt hat:

$$\zeta = 0{,}9457 \sin. \delta^2 + 2{,}047 \sin. \delta^4$$

zu setzen.

Folgende kleine Tabelle enthält eine Reihe von nach dieser Formel berechneten Widerstandscoefficienten für verschiedene Bricolwinkel:

$\delta^0 =$	10	20	30	40	45	50	55	60	65	70
$\zeta =$	0,046	0,139	0,364	0,740	0,984	1,260	1,556	1,861	2,158	2,431

Man ersieht hieraus, daß durch die Kniee in Röhren der lebendigen Kraft des Wassers in Röhren bedeutende Verluste erwachsen. Ist z. B. das Knie ein rechtwinkeliges, also $\delta = 45^0$, so hat man hiernach den durch dasselbe herbeigeführten Druckhöhenverlust:

$$h = \zeta \cdot \frac{v^2}{2g} = 0{,}984 \cdot \frac{v^2}{2g},$$

also ziemlich gleich der Geschwindigkeitshöhe.

Bei engeren Röhren fällt ζ namhaft größer aus, z. B. für eine Knieröhre von 1 Centimeter Weite und 90 Grad Ablenkung ist $\zeta = 1{,}536$ gefunden worden. S. des Verfassers Experimentalhydraulik.

Stoßen an ein Knie ACB, Fig. 755, noch andere Kniee ohne längere Zwischenröhre, wie z. B. aus Fig. 756 und Fig. 757 zu ersehen ist, so tre-

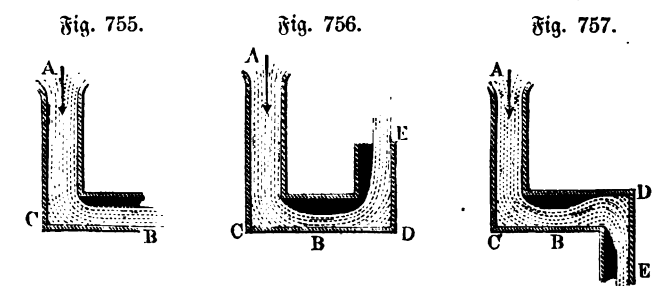


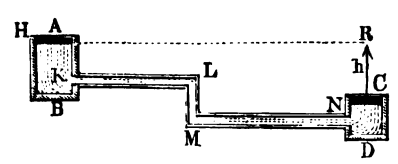
Fig. 755. Fig. 756. Fig. 757.

ten ganz besondere, jedoch leicht erklärliche Ausflußverhältnisse ein. Das zweite Knie BDE, Fig. 756, welches den Strahl nach derselben Seite hin ablenkt, wie das erste ACB, bringt keine weitere Contraction des Strahles hervor, es ist daher auch bei vollem Ausflusse hier ζ nicht größer als für ein einfaches Knie ACB. Lenkt aber das Knie BDE, Fig. 757,

den Strahl auf die entgegengesetzte Seite, so ist die Contraction eine doppelte, und daher auch der Widerstandscoefficient doppelt so groß als bei einfachem Knie. Wird endlich BDE so an ACB gesetzt, daß DE rechtwinkelig auf die Ebene ABD zu stehen kommt, so stellt sich ζ ungefähr $1^1/_2$ mal so groß heraus als bei dem Knie ACB allein.

Beispiel. Wenn eine Röhrenleitung KLN, Fig. 758, von 150 Fuß Länge und 5 Zoll Weite, welche in der Minute 25 Cubikfuß Wasser liefern soll, zwei rechtwinkelige Kniee enthält, so hat man die nöthige Druckhöhe:

Fig. 758.



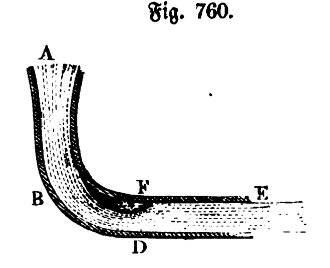
$$h = (1{,}505 + 8{,}712 + 2\,.\,0{,}984) \cdot \frac{v^2}{2g}$$
$$= 12{,}185\,.\,0{,}1494 = 1{,}82 \text{ Fuß}.$$

(Vergl. Beispiel 1 zu §. 430.)

§. 442 **Kropfröhren.** Gekrümmte Röhren geben unter übrigens gleichen Verhältnissen viel kleinere Widerstände als unabgerundete Knieröhren. Auch sie veranlassen in Folge der Centrifugalkraft des Wassers eine partielle Contraction des Wasserstrahles ABD, Fig. 759, so daß, wenn sich an die krumme Röhre keine längere gerade Röhre anschließt, der Querschnitt F_1 des Strahles bei seinem Austritte kleiner ist als der Querschnitt F der Röhre. Endigt sich aber der Kropf ABD, Fig. 760, in einer längeren geraden Röhre DE, so bildet sich wieder ein Wirbel F, und es findet auf Unkosten

Fig. 759.

Fig. 760.



der lebendigen Kraft des Wassers wieder ein voller Ausfluß des Wassers statt. Ist der Contractionscoefficient $\frac{F_1}{F} = \alpha$, so haben wir auch den Coefficienten des Krümmungswiderstandes:

$$\zeta = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2.$$

Der Contractionscoefficient α hängt von dem Verhältnisse $\frac{a}{r}$ der halben Röhrenweite $BM = EM = a$, Fig. 759, und dem Krümmungshalbmesser

$CM = r$ der Röhrenaxe ab und läßt sich annähernd auf folgende Weise theoretisch bestimmen. Ist v die Geschwindigkeit des Wassers beim Eintritt in den Kropf und v_1 die des zusammengezogenen Wasserstrahles, so hat man $v_1 F_1 = v F$, daher $v_1 = \frac{F}{F_1} v$, und demnach die den Druck in BE messende Druckhöhe:

$$h = \frac{v_1^2 - v^2}{2g} = \left[\left(\frac{F}{F_1}\right)^2 - 1\right] \frac{v^2}{2g}.$$

Diese Höhe mit 1 und γ multiplicirt, ergiebt sich der Druck des Wasserstrahles bei E auf die Flächeneinheit nach allen Richtungen hin:

$$p = h\gamma = \left[\left(\frac{F}{F_1}\right)^2 - 1\right] \frac{v^2}{2g}\gamma = \left[\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 - 1\right] \frac{v^2}{2g}\gamma.$$

Da nun die Centrifugalkraft des Wassers an der convexen Seite dem Drucke p entgegenwirkt, so ist es möglich, daß sie denselben hier ganz aufheben kann. In diesem Falle wird aber auch die äußere Luft eindringen und sich der Strahl ganz von der convexen Seite losziehen, wie aus den Fig. 759 und 760 zu ersehen ist. Die Centrifugalkraft eines Wasserprismas von der Länge $BE = 2a$ und dem Querschnitte 1 ist bei dem Krümmungshalbmesser $CM = r$,

$$q = \frac{v^2}{gr} \cdot 2a\gamma,$$

setzt man daher $p = q$, so folgt die Bedingung des Losreißens:

$$\frac{1}{\alpha^2} - 1 = \frac{4a}{r},$$

daher der Contractionscoefficient:

$$\alpha = \sqrt{\frac{r}{r + 4a}},$$

und der Widerstandscoefficient bei vollem Ausflusse:

$$\zeta = \left(\sqrt{\frac{r + 4a}{r}} - 1\right)^2.$$

Da bei dieser Entwickelung nur eine mittlere Geschwindigkeit und ein mittlerer Krümmungshalbmesser zu Grunde gelegt wurde, so kann sie natürlich auch nur auf eine annähernde Bestimmung von α und ζ führen.

Aus den Versuchen des Verfassers und aus eigenen Beobachtungsresultaten Du Buat's hat aber der Verfasser für den Widerstandscoefficienten beim Durchgange des Wassers durch Kröpfe folgende empirische Formeln abgeleitet:

1) Für Kröpfe mit kreisförmigem Querschnitte:

$$\zeta = 0{,}131 + 1{,}847 \left(\frac{a}{r}\right)^{7/2};$$

2) für Kropfröhren mit rectangulären Querschnitten:

$$\zeta = 0{,}124 + 3{,}104 \left(\frac{a}{r}\right)^{7/2}.$$

Nach diesen Formeln sind folgende Tabellen berechnet worden:

Tabelle I.

Coefficienten des Krümmungswiderstandes bei Röhren mit kreisförmigen Querschnitten.

$\frac{a}{r} =$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\zeta =$	0,131	0,138	0,158	0,206	0,294	0,440	0,661	0,977	1,408	1,978

Tabelle II.

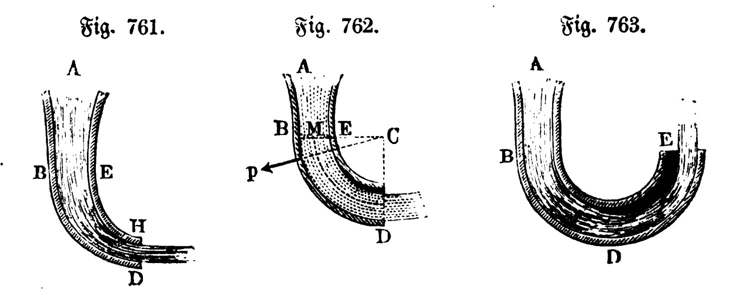
Coefficienten des Krümmungswiderstandes bei Röhren mit rectangulären Querschnitten.

$\frac{a}{r} =$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\zeta =$	0,124	0,135	0,180	0,250	0,398	0,643	1,015	1,546	2,271	3,228

Hiernach sieht man, daß bei einer runden Röhre, deren Krümmungshalbmesser zweimal so groß ist als der Röhrenhalbmesser, der Widerstandscoefficient $= 0{,}294$, und bei einer Röhre, deren Krümmungshalbmesser mindestens zehnmal so groß ist als der Halbmesser des Querschnittes, dieser Coefficient $= 0{,}131$ ausfällt.

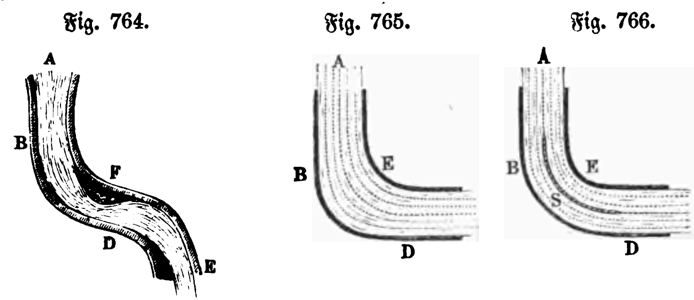
Um die Contraction des Wassers in einer krummen Röhre ABD, Fig. 761, zu verhindern, ist der Querschnitt der Röhre allmälig so zu verengern, daß der Querschnitt $DH = F_1$ der Ausmündung zum Querschnitte $BE = F$ der Einmündung im Verhältnisse $\alpha = \frac{1}{\sqrt{\zeta + 1}}$ zu stehen kommt.

Fig. 761. Fig. 762. Fig. 763.



Stößt an den Kropf BD, Fig. 762, noch ein anderer an, welcher den Strahl nach derselben Seite noch weiter ablenkt, bildet z. B. die Röhrenaxe einen Halbkreis wie BDE, Fig. 763, so ändert sich die Contraction nicht, es behalten also auch α und ζ nahe denselben Werth wie bei der Röhre in Fig. 762, welche nur einen Quadranten einnimmt; schließt sich dagegen ein Kropf DE, Fig. 764, an, welcher nach der entgegengesetzten Seite ablenkt, so bildet sich vor diesem ein Wirbel F und es tritt in demselben eine zweite Zusammenziehung des Strahles ein, wodurch der Widerstand (ζ) nahe verdoppelt wird.

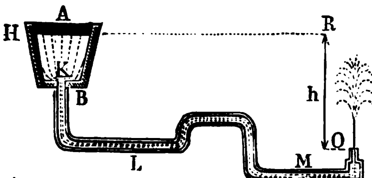
Fig. 764. Fig. 765. Fig. 766.



Der Widerstand des fließenden Wassers in Kropfröhren läßt sich durch Erweiterung der Kröpfe wie BDE, Fig. 765, sowie durch dünne Scheidewände in denselben wie S in BDE, Fig. 766, vermindern, denn im ersten Falle wird die Geschwindigkeit v und im zweiten das Verhältniß $\frac{a}{r}$, und folglich auch der Widerstandscoefficient ζ kleiner.

Beispiel. Wenn die Röhrenleitung BLM, Fig. 767, im zweiten Beispiele des §. 430 noch fünf Kröpfe zu je 90° enthält, und der Krümmungshalbmesser eines jeden 2 Zoll beträgt, so hat man:

Fig. 767.



$$\frac{a}{r} = \frac{1}{2}$$

und nach der ersten der obigen Tabellen, den entsprechenden Widerstandscoefficienten: $\zeta = 0,294$; folglich für alle fünf Kröpfe, $5\zeta = 1,47$, und daher die Geschwindigkeit des ausfließenden Wassers statt

$$v = \frac{17,678}{\sqrt{7,582}} = 6,42 \text{ Fuß},$$

$$v = \frac{17,678}{\sqrt{7,582 + 1,47}} = \frac{17,678}{\sqrt{9,052}} = 5,876 \text{ Fuß},$$

so daß nun die Ausflußmenge pr. Secunde:

$$Q = 0,7854 \cdot \tfrac{1}{36} \cdot 5,876 = 0,1282 \text{ Cubikfuß} = 221 \text{ Cubikzoll folgt.}$$

§. 443 **Schieber, Hähne, Klappen.** Um den Ausfluß des Wassers aus Röhren und Gefäßen zu reguliren, werden sogenannte Obturatoren, und zwar Schieber, Hähne, Klappen und Ventile angewendet, wodurch sich Verengungen erzeugen lassen, welche dem Durchgange des Wassers Widerstände entgegensetzen, die sich auf ähnliche Weise wie die in den letzten Paragraphen abgehandelten Verluste bestimmen lassen. Da aber hier das Wasser noch besondere Richtungsänderungen, Zertheilungen u. s. w. erleidet, so lassen sich die Coefficienten α und ζ nicht unmittelbar bestimmen, sondern es war zu deren Ermittelung die Ausführung besonderer Versuche nöthig. Solche Versuche sind von dem Verfasser ebenfalls angestellt worden*), und die Hauptergebnisse derselben enthalten folgende Tabellen:

Tabelle I.

Die Widerstandscoefficienten für den Durchgang des Wassers durch Schieber oder Schubventile (franz. tiroirs; engl. slide-valves) im parallelepipedischen Rohre.

Querschnittsverhältniß $\frac{F_1}{F}$ =	1,0	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1
Widerstandscoefficient ζ =	0,00	0,09	0,39	0,95	2,08	4,02	8,12	17,8	44,5	193

Tabelle II.

Die Widerstandscoefficienten für den Durchgang des Wassers durch Schieber im cylindrischen Rohre.

Relative Stellhöhe s =	0	1/8	2/8	3/8	4/8	5/8	6/8	7/8
Querschnittsverhältniß =	1,000	0,948	0,856	0,740	0,609	0,466	0,315	0,159
Widerstandscoefficient ζ =	0,00	0,07	0,26	0,81	2,06	5,52	17,0	97,8

*) Versuche über den Ausfluß des Wassers durch Schieber, Hähne, Klappen und Ventile, angestellt und berechnet von Jul. Weisbach, oder unter dem Titel „Untersuchungen im Gebiete der Mechanik und Hydraulik" u. s. w., Leipzig 1842.

Tabelle III.

Die Widerstandscoefficienten für den Durchgang des Wassers durch einen Hahn (franz. robinet; engl. cock) im parallelepipedischen Rohre.

Stellwinkel δ =	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°	55°	$66\frac{3}{4}$
Querschnittsverhältniß =	0,926	0,849	0,769	0,687	0,604	0,520	0,436	0,352	0,269	0,188	0,110	0
Widerstandscoefficient =	0,05	0,31	0,88	1,84	3,45	6,15	11,2	20,7	41,0	95,3	275	∞

Tabelle IV.

Die Widerstandscoefficienten für den Durchgang des Wassers durch einen Hahn im cylindrischen Rohre.

Stellwinkel δ =	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°
Querschnittsverhältniß =	0,926	0,850	0,772	0,692	0,613	0,535	0,458
Widerstandscoefficient =	0,05	0,29	0,75	1,56	3,10	5,47	9,68

Stellwinkel δ =	40°	45°	50°	55°	60°	65°	$82\frac{1}{8}$°
Querschnittsverhältniß =	0,385	0,315	0,250	0,190	0,137	0,091	0
Widerstandscoefficient =	17,3	31,2	52,6	106	206	486	∞

Tabelle V.

Die Widerstandscoefficienten für den Durchgang des Wassers durch Drehklappen oder Drosselventile (franz. valves; engl. throttlevalves) im parallelepipedischen Rohre.

Stellwinkel δ =	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°
Querschnittsverhältniß =	0,913	0,826	0,741	0,658	0,577	0,500	0,426
Widerstandscoefficient =	0,28	0,45	0,77	1,34	2,16	3,54	5,7

Stellwinkel δ =	40°	45°	50°	55°	60°	65°	70°	90°
Querschnittsverhältniß =	0,357	0,293	0,234	0,181	0,134	0,094	0,060	0
Widerstandscoefficient =	9,27	15,07	24,9	42,7	77,4	158	368	∞

Tabelle VI.

Die Widerstandscoefficienten für den Durchgang des Wassers durch Drehklappen im cylindrischen Rohre.

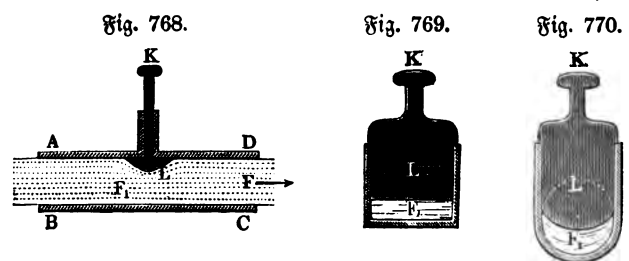
Stellwinkel δ =	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°
Querschnittsverhältniß =	0,913	0,826	0,741	0,658	0,577	0,500	0,426
Widerstandscoefficient =	0,24	0,52	0,90	1,54	2,51	3,91	6,22

Stellwinkel δ =	40°	45°	50°	55°	60°	65°	70°	90°
Querschnittsverhältniß =	0,357	0,293	0,234	0,181	0,134	0,094	0,060	0
Widerstandscoefficient =	10,8	18,7	32,6	58,8	118	256	751	∞

§. 444 Mit Hülfe der in den vorstehenden Tabellen aufgeführten Widerstandscoefficienten kann man nicht nur den einer gewissen Schieber-, Hahn- oder Klappenstellung entsprechenden Druckhöhenverlust angeben, sondern auch bestimmen, welche Stellung diesen Apparaten zu geben ist, damit die Ausflußgeschwindigkeit oder der Widerstand ein gewisser werde. Allerdings wird aber eine solche Bestimmung um so sicherer, je mehr diese regulirenden Vorrichtungen den bei den Versuchen angewendeten gleichen. Uebrigens gelten die in den Tabellen angegebenen Zahlenwerthe nur für den Fall, wenn das Wasser nach dem Durchgange durch die mittels dieser Apparate hervorgebrachten Verengungen das Rohr wieder ausfüllt. Damit dieser volle Ausfluß bei starken Verengungen noch eintrete, muß das Rohr eine beträchtliche Länge haben. Die Querschnitte der parallelepipedischen Röhren waren 5 Centimeter breit und $2\frac{1}{2}$ Centimeter hoch, und die Querschnitte von den

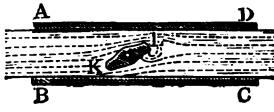
cylindrischen Röhren hatten eine Weite von 4 Centimetern. Bei dem Schieber, Fig. 768, entsteht eine einfache Verengung, deren Querschnitt bei dem

Fig. 768. Fig. 769. Fig. 770.



einen Rohre ein bloßes Rechteck F_1, Fig. 769, bei dem zweiten aber ein Mondchen F_1, Fig. 770, bildet. Bei den **Hähnen**, Fig. 771, stellen sich zwei Verengungen und auch zwei Richtungsabänderungen heraus, deshalb

Fig. 771. Fig. 772.



sind auch hier die Widerstände sehr groß. Die Querschnitte der größten Verengungen haben ganz eigenthümliche Gestalten. Bei den **Drehklappen**, Fig. 772, theilt sich der Strom in zwei Theile, wovon jeder durch eine Verengung hindurchgeht. Die Querschnitte dieser Verengungen sind bei der Drehklappe im parallelepipedischen Rohre rectangulär und im cylindrischen mondförmig. — Zur Anwendung der oben mitgetheilten Tabellen wird durch folgende Beispiele hinreichende Anleitung gegeben werden.

Beispiele. 1) Wenn in einer cylindrischen Röhrenleitung von 3 Zoll Weite und 500 Fuß Länge ein Schubventil angebracht ist, und dieses $^3/_8$ der ganzen Höhe gezogen wird, also $^5/_8$ derselben verschließt, welche Wassermenge liefert dieselbe unter einem Drucke von 4 Fuß? Der Widerstandscoefficient für den Eintritt in die Röhre läßt sich nach dem Früheren, $\zeta_0 = 0{,}505$, und der Widerstandscoefficient ζ_1 für den Schieber nach Tabelle II., §. 443, $= 5{,}52$ setzen, es folgt daher die Ausflußgeschwindigkeit:

$$v = \frac{7{,}906 \,.\, \sqrt{4}}{\sqrt{1{,}505 + 5{,}52 + \zeta \frac{l}{d}}} = \frac{7{,}906 \,.\, 2}{\sqrt{7{,}025 + 500 \,.\, 4\,\zeta}} = \frac{15{,}812}{\sqrt{7{,}025 + 2000\,\zeta}}.$$

Setzen wir den Reibungscoefficienten $\zeta = 0{,}025$, so erhalten wir:

$$v = \frac{15{,}812}{\sqrt{57{,}025}} = 2{,}09 \text{ Fuß}.$$

Nun entspricht aber der Geschwindigkeit $v = 2{,}1$ Fuß genauer $\zeta = 0{,}026$, daher ist richtiger:

$$v = \frac{15{,}812}{\sqrt{59{,}025}} = 2{,}06 \text{ Fuß},$$

und die Ausflußmenge pr. Secunde:

$$Q = \frac{\pi}{4} \cdot 9 \,.\, 12 \,.\, 2{,}06 = 55{,}62 \,.\, \pi = 175 \text{ Cubikzoll}.$$

2) Eine Röhrenleitung von 4 Zoll Weite liefert bei einer Druckhöhe von 5 Fuß in der Minute 10 Cubikfuß Wasser, welche Stellung hat man dem in derselben angebrachten Drosselventile zu geben, damit sie nachher nur 8 Cubikfuß liefert? Die Geschwindigkeit ist anfangs

$$= \frac{10 \,.\, 4}{60 \,.\, \pi \,(1/3)^2} = \frac{6}{\pi} = 1{,}91 \text{ Fuß},$$

und nach der Klappenstellung,

$$= {}^8\!/_{10} \cdot 1{,}91 = 1{,}528 \text{ Fuß}.$$

Der Ausflußcoefficient für den ersten Fall des Ausflusses ist

$$\frac{v}{\sqrt{2\,g\,h}} = \frac{1{,}91}{7{,}906\,\sqrt{5}} = 0{,}108,$$

daher der Widerstandscoefficient

$$= \frac{1}{\mu^2} - 1 = \frac{1}{0{,}108^2} - 1 = 84{,}7;$$

der Ausflußcoefficient für den zweiten Fall ist

$$= {}^8\!/_{10} \cdot 0{,}108 = 0{,}0864,$$

daher der Widerstandscoefficient

$$= \frac{1}{0{,}0864^2} - 1 = 133{,}0,$$

und demnach der Coefficient für den vom Drosselventile zu erzeugenden Widerstand:

$$\zeta = 133{,}0 - 84{,}7 = 48{,}3.$$

Nun giebt aber nach Tabelle VI., §. 443, der Stellwinkel $\delta = 50^0$, $\zeta = 32{,}6$, und der Stellwinkel $\delta = 55^0$, $\zeta = 58{,}8$; es läßt sich daher annehmen, daß bei einer Stellung von $50^0 + \frac{15{,}7}{26{,}2} \cdot 5^0 = 53^0$ das gewünschte Ausflußquantum erhalten werde. Berücksichtigt man noch, daß bei dem Geschwindigkeitswechsel von 1,91 Fuß auf 1,528 Fuß der Reibungscoefficient von 0,0266 in 0,0281 übergeht, so ist noch genauer:

$$\zeta = 133{,}0 - 84{,}7 \cdot \frac{281}{266} = 133{,}0 - 89{,}5 = 43{,}5,$$

und sonach der Stellwinkel

$$\delta = 50^0 + \frac{10{,}9}{26{,}2} \cdot 5^0 = 52^0.$$

§. 445 **Ventile.** Von besonderer Wichtigkeit ist die Kenntniß der durch Ventile (franz. soupapes; engl. valves) hervorgebrachten Widerstände. Auch über diese sind vom Verfasser Versuche angestellt worden. Am häufigsten kommen die sogenannten Kegel- und nächstdem die Klappenventile,

wie in den Figuren 773 und 774 abgebildet sind, zur Anwendung. Bei beiden geht das Wasser durch die von einem Ringe RG gebildete Apertur;

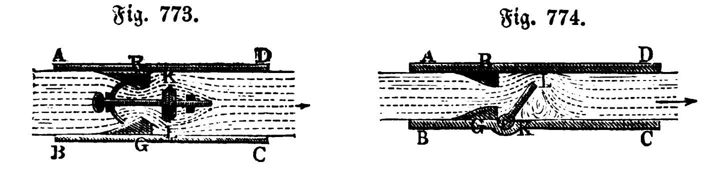


Fig. 773. Fig. 774.

das Kegelventil KL, Fig. 773, hat einen Stiel, womit es in einer Führung liegt, die ihm nur einen Ausschub in der Axenrichtung gestattet; das Klappenventil oder die Ventilklappe KL, Fig. 774, hingegen öffnet sich drehend wie eine Thür. Man sieht leicht ein, daß bei beiden Apparaten dem Wasser nicht nur durch den Ventilring, sondern auch durch die Ventilklappe ein Hinderniß entgegengesetzt wird.

Bei dem Kegelventile, womit die Versuche angestellt wurden, war das Verhältniß zwischen der Apertur im Ventilringe zum Querschnitte der ganzen Röhre: 0,356, und dagegen das Verhältniß zwischen der Ringfläche um das geöffnete Ventil herum, zu dem Röhrenquerschnitte, = 0,406; es läßt sich daher im Mittel $\frac{F_1}{F} = 0,381$ setzen. Indem man den Ausfluß bei verschiedenen Ventilstellungen beobachtete, ergab sich, daß der Widerstandscoefficient zwar abnahm, wenn der Ventilschub größer wurde, daß aber diese Abnahme schon höchst unbedeutend ausfiel, wenn der Ventilschub die halbe Weite der Apertur übertraf. Seine Größe war für diesen Stand, = 11, also die Widerstandshöhe oder der Druckhöhenverlust

$$z = \zeta \frac{v^2}{2g} = 11 \cdot \frac{v^2}{2g},$$

wenn v die Geschwindigkeit des Wassers in der vollen Röhre bezeichnet. Diese Zahl kann man auch benutzen, um die anderen Querschnittsverhältnissen entsprechenden Widerstandscoefficienten zu bestimmen. Setzen wir allgemein

$$\zeta = \left(\frac{F}{\alpha F_1} - 1\right)^2,$$

so erhalten wir für den beobachteten Fall:

$$\frac{F_1}{F} = 0,381, \text{ und } \zeta = \left(\frac{1}{0,381\,\alpha} - 1\right)^2 = 11,$$

daher

$$\alpha = \frac{1}{0,381\,(1 + \sqrt{11})} = \frac{1}{4,317 \,.\, 0,381} = 0,608$$

und endlich allgemein der Widerstandscoefficient:

$$\zeta = \left(\frac{F}{0,608\, F_1} - 1\right)^2 = \left(1,645 \cdot \frac{F}{F_1} - 1\right)^2.$$

Ist z. B. der Querschnitt der Apertur die Hälfte von dem der Röhre, so fällt hiernach der Widerstandscoefficient

$$= (1,645 . 2 - 1)^2 = 2,29^2 = 5,24$$

aus.

Bei dem Klappenventile war das Querschnittsverhältniß zwischen der Apertur und der Röhre, d. i. $\frac{F_1}{F}$, $= 0,535$; wie aber die Widerstandscoefficienten mit der Größe der Eröffnung abnehmen, führt folgende Tabelle vor Augen.

Tabelle
der Widerstandscoefficienten für die Ventilklappe.

Oeffnungswinkel	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°	55°	60°	65°	70°
Widerstandscoefficient	90	62	42	30	20	14	9,5	6,6	4,6	3,2	2,3	1,7

Mit Hülfe dieser Tabelle lassen sich die Widerstandscoefficienten für Klappen auch dann noch annähernd berechnen, wenn das Querschnittsverhältniß ein anderes sein sollte. Es ist derselbe Weg zu betreten, welchen man bei den Kegelventilen verfolgt hat.

Beispiel. Eine Druckpumpe liefert bei jedem Niedergange des Kolbens in 4 Secunden 5 Cubikfuß Wasser, die Weite des Steigrohres, worin das kegelförmige Steigventil sitzt, beträgt 6 Zoll, die innere Weite des Ventilringes, $3\frac{1}{2}$ Zoll und der größte Ventildurchmesser $4\frac{1}{2}$ Zoll, welchen Widerstand hat das Wasser beim Durchgange durch dieses Ventil zu überwinden? Das Querschnittsverhältniß für die Apertur ist

$$\left(\frac{3,5}{6}\right)^2 = (7/12)^2 = 0,34,$$

und das Verhältniß der ringförmigen Verengung zum Querschnitte des Rohres ist

$$= 1 - \left(\frac{4,5}{6}\right)^2 = 1 - (3/4)^2 = 0,44,$$

daher das mittlere Querschnittsverhältniß

$$\frac{F_1}{F} = \frac{0,34 + 0,44}{2} = 0,39$$

und der entsprechende Widerstandscoefficient

$$\zeta = \left(\frac{1,645}{0,39} - 1\right)^2 = 3,22^2 = 10,4.$$

Die Geschwindigkeit des Wassers beträgt

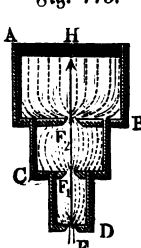
$$v = \frac{5}{4 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (1/2)^2} = \frac{20}{\pi} = 6,37 \text{ Fuß},$$

die Geschwindigkeitshöhe $= 0{,}649$ Fuß, und folglich die Widerstandshöhe $= 10{,}4 \,.\, 0{,}649 = 6{,}75$ Fuß. Die in der Secunde gehobene Wassermenge wiegt $\frac{5}{4} \,.\, 61{,}75 = 77{,}2$ Pfund; daher ist die mechanische Arbeit, welche der Durchgang des Wassers durch das Ventil in eben dieser Zeit consumirt:

$$= 6{,}75 \,.\, 77{,}2 = 521 \text{ Fußpfund.}$$

Zusammengesetzte Gefässe. Die vorstehenden Lehren über den Widerstand des Wassers beim Durchgange desselben durch Verengungen finden ihre Anwendung auch noch bei dem Ausflusse durch zusammengesetzte Gefäße. Der in Fig. 775 abgebildete Apparat AD ist durch zwei, die Mündungen F_1 und F_2 enthaltende Scheidewände abgetheilt und bildet deshalb drei communicirende Gefäße. Wären die Scheidewände nicht vorhanden und die Kanten bei den Uebergängen aus einem Gefäße in das andere abgerundet, so hätte man, wie bei einem einfachen Gefäße, die Ausflußgeschwindigkeit durch F: §. 446

Fig. 775.



$$v = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1 + \zeta_0}},$$

insofern h die Tiefe FH der Oeffnung unter dem Wasserspiegel und ζ_0 den Widerstandscoefficienten für den Durchgang durch die Ausflußöffnung F bezeichnen.

Da aber nach dem Durchgange des Wassers durch die Mündungen F_1 und F_2 die Querschnitte αF_1 und αF_2 plötzlich in die Querschnitte G und G_1 der Gefäße CD und BC übergehen, und nach §. 437 die daraus erwachsenden Widerstände

$$\zeta_1 \frac{v_1^2}{2g} = \left(\frac{G}{\alpha F_1} - 1\right)^2 \left(\frac{\alpha F}{G}\right)^2 \frac{v^2}{2g} = \left(\frac{F}{F_1} - \frac{\alpha F}{G}\right)^2 \cdot \frac{v^2}{2g}$$

und

$$\zeta_2 \frac{v_2^2}{2g} = \left(\frac{G_1}{\alpha F_2} - 1\right)^2 \left(\frac{\alpha F}{G_1}\right)^2 \frac{v^2}{2g} = \left(\frac{F}{F_2} - \frac{\alpha F}{G_1}\right)^2 \cdot \frac{v^2}{2g}$$

betragen, so hat man

$$(1+\zeta_0)\frac{v^2}{2g} + \zeta_1 \frac{v_1^2}{2g} + \zeta_2 \frac{v_2^2}{2g} = \left[1 + \zeta_0 + \left(\frac{F}{F_1} - \frac{\alpha F}{G}\right)^2 + \left(\frac{F}{F_2} - \frac{\alpha F}{G_1}\right)^2\right]\frac{v^2}{2g}$$

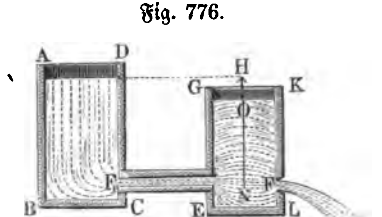
und daher die Ausflußgeschwindigkeit

$$v = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1 + \zeta_0 + \left(\frac{F}{F_1} - \frac{\alpha F}{G}\right)^2 + \left(\frac{F}{F_2} - \frac{\alpha F}{G_1}\right)^2}}$$

zu setzen.

Bei dem zusammengesetzten Ausflußapparate, welchen Fig. 776 repräsentirt, findet ganz dasselbe Verhältniß statt, nur ist hier vielleicht noch die Reibung des Wassers in dem Communicationsrohre CE zu berücksichtigen. Ist l die Länge und d die Weite dieses Rohres, ferner ζ der Reibungscoefficient, und v_1 die Geschwindigkeit des Wassers in demselben, so hat man die Höhe, welche das Wasser beim Uebergange von AC nach GL verliert:

Fig. 776.



$$h_1 = \left[1 + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 + \zeta \frac{l}{d}\right] \frac{v_1^2}{2g},$$

oder, da die Geschwindigkeit $v_1 = \frac{\alpha F}{F_1} v$ zu setzen ist,

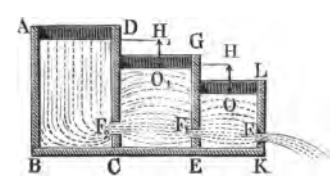
$$h_1 = \left[1 + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 + \zeta \frac{l}{d}\right] \left(\frac{\alpha F}{F_1}\right)^2 \frac{v^2}{2g}.$$

Zieht man nun diese Höhe von der ganzen Druckhöhe h ab, so bleibt die Druckhöhe im zweiten Gefäße, $h_2 = h - h_1$ und daher die Ausflußgeschwindigkeit

$$v = \frac{\sqrt{2gh_2}}{\sqrt{1+\zeta_0}} = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1 + \zeta_0 + \left[1 + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 + \zeta \frac{l}{d}\right] \left(\frac{\alpha F}{F_1}\right)^2}}.$$

Diese Bestimmung wird bei dem Apparate, welchen Fig. 777 repräsentirt, sehr einfach, weil man die Querschnitte G, G_1, G_2 der Gefäße unendlich groß setzen kann in Ansehung der Mündungsquerschnitte F, F_1, F_2. Es ist daher die erste Niveaudifferenz OH oder Widerstandshöhe für den Durchgang durch F_1:

Fig. 777.



$$h = \frac{1}{2g}\left(\frac{v_1}{\alpha_1}\right)^2 = \left(\frac{\alpha F}{\alpha_1 F_1}\right)^2 \cdot \frac{v^2}{2g},$$

und ebenso die zweite Niveaudifferenz $O_1 H_1$ oder die Widerstandshöhe für den Durchgang durch F_2:

$$h_2 = \left(\frac{\alpha F}{\alpha_2 F_2}\right)^2 \cdot \frac{v^2}{2g},$$

wofern nur α, α_1 und α_2 die Contractionscoefficienten für die Mündungen F, F_1 und F_2 bezeichnen. Hiernach folgt:

$$v = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha F}{\alpha_1 F_1}\right)^2 + \left(\frac{\alpha F}{\alpha_2 F_2}\right)^2}}$$

und das Ausflußquantum:

$$Q = \frac{\alpha F \sqrt{2gh}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha F}{\alpha_1 F_1}\right)^2 + \left(\frac{\alpha F}{\alpha_2 F_2}\right)^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{\left(\frac{1}{\alpha F}\right)^2 + \left(\frac{1}{\alpha_1 F_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{\alpha_2 F_2}\right)^2}}.$$

Es ist leicht zu ermessen, daß zusammengesetzte Ausflußbehälter weniger Wasser liefern, als einfache unter übrigens gleichen Verhältnissen.

Beispiel. Wenn bei dem Apparate in Fig. 776 die totale Druckhöhe oder die Tiefe des Mittelpunktes der Mündung F unter dem Wasserspiegel des ersten Gefäßes, $= 6$ Fuß beträgt, die Mündung 8 Zoll breit und 4 Zoll hoch, der die beiden Reservoirs verbindende Lutten aber 10 Fuß lang, 12 Zoll breit und 6 Zoll hoch ist, welches Ausflußquantum wird dieses Reservoir geben?

Die mittlere Weite des Luttens ist

$$d = \frac{4 \, . \, 1 \, . \, 0{,}5}{2 \, . \, 1{,}5} = \frac{2}{3} \text{ Fuß, daher } \frac{l}{d} = \frac{3 \, . \, 10}{2} = 15,$$

setzen wir nun noch den Reibungscoefficienten $\zeta = 0{,}025$, so folgt:

$$\zeta \cdot \frac{l}{d} = 0{,}025 \;\, 15 = 0{,}375;$$

hierzu den Widerstandscoefficienten $\zeta_0 = 0{,}505$ für den Eintritt in prismatische Röhren gesetzt, erhält man:

$$1 + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 + \zeta \, \frac{l}{d} = 1 + 0{,}505 + 0{,}375 = 1{,}88.$$

Da $\frac{\alpha F}{F_1} = \frac{0{,}64 \, . \, 8 \, . \, 4}{12 \, . \, 6} = 0{,}2845$, so folgt der Widerstandscoefficient für den ganzen Lutten, $= 1{,}88 \, . \, 0{,}2845^2 = 0{,}152$, und den Widerstandscoefficienten für den Durchgang durch F, $= 0{,}07$ gesetzt, erhält man die Ausflußgeschwindigkeit:

$$v = \frac{7{,}906 \sqrt{6}}{\sqrt{1{,}07 + 0{,}152}} = \frac{7{,}906 \sqrt{6}}{\sqrt{1{,}222}} = 17{,}52 \text{ Fuß}.$$

Der contrahirte Querschnitt ist $0{,}64 \, . \, 1 \, . \, \frac{1}{2} = 0{,}32$ Quadratfuß, daher das Ausflußquantum:

$$Q = 0{,}32 \, . \, 17{,}52 = 5{,}61 \text{ Cubikfuß}.$$

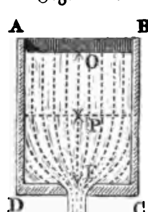
Fünftes Capitel.

Von dem Ausflusse des Wassers unter veränderlichem Drucke.

§. 447 **Prismatische Gefässe.** Erhält ein Gefäß, aus welchem das Wasser durch eine Seiten- oder Bodenöffnung ausfließt, von einer anderen Seite her keinen Zufluß, so tritt ein allmäliges Sinken des Wasserspiegels und endlich Ausleerung des Gefäßes ein. Wenn ferner die Zuflußmenge Q größer oder kleiner ist als das Ausflußquantum $\mu F \sqrt{2gh}$, so steigt oder sinkt der Wasserspiegel, bis die Druckhöhe $h = \frac{1}{2g}\left(\frac{Q}{\mu F}\right)^2$ wird, und nach diesem bleiben Druckhöhe und Ausflußgeschwindigkeit unveränderlich. Unsere Aufgabe ist nun, zu ermitteln, in welcher Abhängigkeit die Zeit, das Steigen oder Sinken des Wassers und, nach Befinden, das Sichleeren von Gefäßen bei gegebener Form und Größe zu einander stehen.

Den einfachsten Fall bietet der Ausfluß aus einem prismatischen Gefäße dar, wenn derselbe durch eine Oeffnung im Boden erfolgt, und wenn dabei kein Zufluß von oben statt hat. Ist x die veränderliche Druckhöhe FP, F der Inhalt der Mündung und G der Querschnitt des Gefäßes AC, Fig. 778, so hat man die theoretische Ausflußgeschwindigkeit

Fig. 778.



$$v = \sqrt{2gx},$$

die theoretische Geschwindigkeit des sinkenden Wasserspiegels:

$$= \frac{F}{G} v = \frac{F}{G} \sqrt{2gx}, \text{ und die effective:}$$

$$v_1 = \frac{\mu F}{G} \sqrt{2gx}.$$

Anfänglich ist $x = FO = h$, und am Ende des Ausflusses, $x = 0$, also die Anfangsgeschwindigkeit ist:

$$c = \frac{\mu F}{G} \sqrt{2gh}$$

und die Endgeschwindigkeit: $c_1 = 0$.

Man ersieht aus der Formel

$$v_1 = \sqrt{2\left(\frac{\mu F}{G}\right)^2 gx},$$

daß die Bewegung des Wasserspiegels gleichförmig verzögert und daß das

Verzögerungsmaß $p = \left(\frac{\mu F}{G}\right)^2 g$ ist; man weiß daher auch (§. 14), daß diese Geschwindigkeit = Null wird und mithin der Ausfluß beendigt ist nach der Zeit

$$t = \frac{v_1}{p} = \frac{\mu F}{G} \sqrt{2gh} : \left(\frac{\mu F}{G}\right)^2 g = \frac{G}{\mu F} \sqrt{\frac{2gh}{g^2}},$$

d. i.

$$t = \frac{2 G \sqrt{h}}{\mu F \sqrt{2g}}.$$

Auch kann man

$$t = \frac{2 G h}{\mu F \sqrt{2gh}} = \frac{2 G h}{Q} = \frac{2 V}{Q}$$

setzen, und diesemnach annehmen, daß zum Ausflusse der Wassermenge $V = Gh$ durch die Bodenöffnung F bei einer von h bis 0 abnehmenden Druckhöhe doppelt soviel Zeit nothwendig ist als bei unveränderlicher Druckhöhe.

Da der Ausflußcoefficient μ nicht ganz constant ist, sondern bei Abnahme des Druckes größer wird, so muß man bei Berechnungen dieser Art einen mittleren Werth dieses Coefficienten einführen.

Beispiel. In welcher Zeit leert sich ein parallelepipedischer Kasten von 14 Quadratfuß Querschnitt durch eine kreisrunde Bodenöffnung von 2 Zoll Weite, wenn die anfängliche Druckhöhe 4 Fuß beträgt? Theoretisch wäre die Ausflußzeit:

$$t = \frac{2 \,.\, 14 \sqrt{4}}{7{,}906 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (1/6)^2} = \frac{2 \,.\, 14 \,.\, 144 \,.\, 2}{7{,}906 \,.\, \pi} = \frac{8064}{7{,}906 \,.\, \pi} = 324'',7 = 5 \text{ Min. } 24{,}7 \text{ Sec.}$$

Am Ende der halben Ausflußzeit ist die Druckhöhe $= (1/2)^2 \,.\, h = 1/4 \,.\, 4 = 1$ Fuß; nun ist der Ausflußcoefficient, welcher der Druckhöhe = 1 Fuß entspricht, für eine Mündung in der dünnen Wand, $\mu = 0{,}613$, daher läßt sich die effective Ausflußzeit $= \frac{324'',7}{0{,}613} = 529'',6 = 8$ Minuten 49,6 Secunden setzen.

Communicirende Gefässe. Da bei einer anfänglichen Druckhöhe h_1 §. 448 die Ausflußzeit

$$t_1 = \frac{2 G \sqrt{h_1}}{\mu F \sqrt{2g}}$$

und bei einer anfänglichen Druckhöhe h_2 diese Zeit

$$t_2 = \frac{2 G \sqrt{h_2}}{\mu F . \sqrt{2g}}$$

ist, so folgt durch Subtraction die Zeit, innerhalb welcher die Druckhöhe aus h_1 und h_2 übergeht, oder der Wasserspiegel um $h_1 - h_2$ sinkt:

$$t = \frac{2 G}{\mu F . \sqrt{2g}} (\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}),$$

oder für Fußmaß:

$$t = 0{,}253\,\frac{G}{\mu F}\left(\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}\right).$$

Es ist umgekehrt die einer gegebenen Ausflußzeit entsprechende Senkung $s = h_1 - h_2$ des Wasserspiegels durch die Formel:

$$h_2 = \left(\sqrt{h_1} - \frac{\mu\sqrt{2g}\,.\,F}{2\,G}\,t\right)^2$$

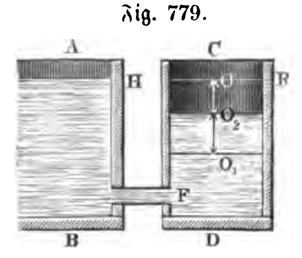
oder

$$s = \frac{\mu\sqrt{2g}\,.\,F t}{G}\left(\sqrt{h_1} - \frac{\mu\sqrt{2g}}{4\,G}\cdot F t\right)$$

zu bestimmen.

Dieselben Formeln finden auch dann noch ihre Anwendung, wenn ein Gefäß CD, Fig. 779, durch ein anderes Gefäß AB, in welchem das Wasser einen unveränderlichen Stand hat, gefüllt wird. Ist der Querschnitt der Communicationsröhre oder der Mündung, $= F$, der Querschnitt des zu füllenden Gefäßes, $= G$, und der anfängliche Niveauabstand $O\,O_1$ zwischen beiden Wasserspiegeln, $= h$, so hat man, da hier der Wasserspiegel G_1 im zweiten Gefäße gleichförmig verzögert steigt, ebenfalls die Zeit zum Füllen oder die Zeit, innerhalb welcher der zweite Wasserspiegel in das Niveau HR des ersten kommt:

Fig. 779.



$$t = \frac{2\,G\sqrt{h}}{\mu F.\sqrt{2g}},$$

und ebenso die Zeit, in welcher der Niveauabstand $O_1 O = h_1$ in $O_2 O = h_2$ übergeht, also der Wasserspiegel um $O_1 O_2 = s = h_1 - h_2$ steigt:

$$t = \frac{2\,G}{\mu F.\sqrt{2g}}\left(\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}\right).$$

Beispiele. 1) Um wie viel sinkt der Wasserspiegel in dem Gefäße des letzten Beispieles (§. 447) binnen 2 Minuten? Es ist

$$h_1 = 4,\ t = 2\,.\,60 = 120,\ \frac{F}{G} = \frac{\pi}{14\,.\,144},$$

und nimmt man noch $\mu = 0{,}605$ an, so folgt:

$$h_2 = \left(\sqrt{h_1} - \mu\,.\sqrt{2g}\cdot\frac{Ft}{2G}\right)^2 = \left(2 - \frac{0{,}605\,.\,7{,}906\,.\,\pi\,.\,120}{2\,.\,14\,.\,144}\right)^2$$

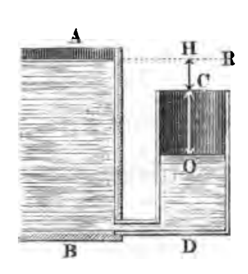
$$= \left(2 - 0{,}605\,.\,7{,}906\cdot\frac{5\,.\,\pi}{168}\right)^2 = 1{,}5523^2 = 2{,}412 \text{ Fuß},$$

und die gesuchte Senkung:

$$s = 4 - 2{,}412 = 1{,}588 \text{ Fuß}.$$

2) Welche Zeit braucht das Wasser, um in der 18 Zoll weiten Röhre CD, Fig. 780, zum Ueberlaufen zu gelangen, wenn es mit einem Gefäße AB durch eine kurze, $1\frac{1}{2}$ Zoll weite Röhre communicirt, und der steigende Wasserspiegel G anfänglich um $OH = 6$ Fuß unter dem unveränderlichen Wasserspiegel A, und um $OC = 4\frac{1}{2}$ Fuß unter dem Kopfe C der Röhre steht? Es ist in

Fig. 780.



$$t = \frac{2\,G}{\mu\,\sqrt{2g}\,.\,F}\,(\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}),$$

$$h_1 = 6,\; h_2 = 6 - 4{,}5 = 1{,}5,$$

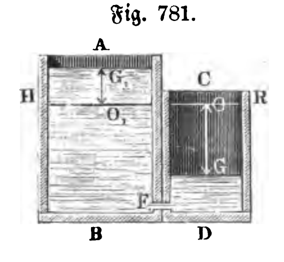
$$\frac{G}{F} = \left(\frac{18}{1{,}5}\right)^2 = 144 \text{ und } \mu = 0{,}81$$

zu setzen, weshalb folgt:

$$t = \frac{2{,}144}{0{,}81\,.\,7{,}906}\,(\sqrt{6} - \sqrt{1{,}5}) = \frac{288\,.\,1{,}2248}{0{,}81\,.\,7{,}906} = 55{,}1 \text{ Secunden.}$$

§. 449 Wenn das erste Gefäß AB, Fig. 781, aus welchem das Wasser in das andere läuft, keinen Zufluß hat, und sein Querschnitt G_1 auch nicht als unendlich groß angesehen werden kann in Hinsicht auf den Querschnitt G des folgenden Gefäßes CD, so hat man die Bestimmung zu modificiren. Ist der veränderliche Abstand $G_1\,O_1$ des ersten Wasserspiegels von dem Niveau HR, in welchem beide Wasserspiegel bei Beendigung des Ausflusses stehen, $= x$, und der Abstand $G\,O$ des zweiten Wasserspiegels von eben dieser Ebene, $= y$, so hat man die veränderliche Druckhöhe $= x + y$ und die entsprechende Ausflußgeschwindigkeit $v = \sqrt{2g\,(x + y)}$, oder, da das Wasserquantum $G_1\,x = G\,y$ ist,

Fig. 781.



$$v = \sqrt{2g\left(1 + \frac{G}{G_1}\right)y}.$$

Die Geschwindigkeit, mit welcher der Wasserspiegel im zweiten Gefäße steigt, ist nun:

$$v_1 = \frac{\mu F}{G}\,v = \frac{\mu F}{G}\sqrt{2g\left(1 + \frac{G}{G_1}\right)y},$$

folglich die entsprechende Retardation:

$$p = \left(\frac{\mu F}{G}\right)^2\left(1 + \frac{G}{G_1}\right)g$$

und die Ausflußzeit:

$$t = \frac{\mu F}{G} \sqrt{2g\left(1 + \frac{G}{G_1}\right)y} : \left(\frac{\mu F}{G}\right)^2 \left(1 + \frac{G}{G_1}\right) g$$
$$= \frac{2 G \sqrt{y}}{\mu F \sqrt{2g\left(1 + \frac{G}{G_1}\right)}}.$$

Führen wir statt x und y den anfänglichen Niveauabstand h ein, setzen wir also $x + y = h$, oder $\left(1 + \frac{G}{G_1}\right) y = h$, so erhalten wir:

$$y = \frac{h}{1 + \frac{G}{G_1}},$$

und die Zeit, binnen welcher die beiden Wasserspiegel in ein Niveau kommen:

$$t = \frac{2 G \sqrt{h}}{\mu F \left(1 + \frac{G}{G_1}\right) \sqrt{2g}} = \frac{2 G G_1 \sqrt{h}}{\mu F (G + G_1) \sqrt{2g}}.$$

Die Zeit, innerhalb welcher der Niveauabstand von h auf h_1 sinkt, ist dagegen:

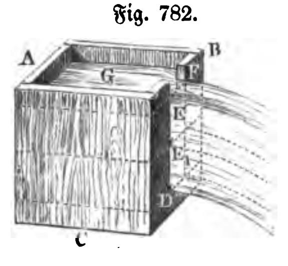
$$t = \frac{2 G G_1 (\sqrt{h} - \sqrt{h_1})}{\mu F (G + G_1) \sqrt{2g}}.$$

Beispiel. Wenn der Querschnitt G_1 des Kastens, aus welchem das Wasser zufließt, 10 Quadratfuß und der Querschnitt G des Kastens, welcher das Wasser aufnimmt, 4 Quadratfuß mißt, wenn ferner der anfängliche Niveauabstand h zwischen beiden Wasserspiegeln 3 Fuß beträgt und die cylindrische Communicationsröhre 1 Zoll Weite hat, so ist die Zeit, in welcher das Wasser in beiden Gefäßen auf gleiches Niveau kommt:

$$t = \frac{2 . 10 . 4 . \sqrt{3}}{0{,}82 . 7{,}906 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{14}{144}} = \frac{320 . 72 . \sqrt{3}}{0{,}82 . 7{,}906 . 7\,\pi} = 280 \text{ Secunden.}$$

§. 450 **Wandeinschnitt.** Fließt das Wasser durch einen Wandeinschnitt oder Ueberfall DE aus einem prismatischen Gefäße ABC, Fig. 782, welches keinen Zufluß erhält, so ist die Ausflußzeit auf folgende Weise zu ermitteln. Bezeichnen wir den Querschnitt des Gefäßes durch G, die Breite EF des Einschnittes durch b und die Höhe DE desselben durch h, und theilen wir die ganze Ausflußmündung durch Horizontalen in lauter schmale Streifen, jeden von der Breite b und Höhe $\frac{h}{n}$. Bei constantem Drucke ist die Ausflußmenge auf die Secunde bezogen,

Fig. 782.



$$Q = \frac{2}{3}\mu b \sqrt{2gh^3},$$

dividiren wir diese in den Inhalt $\frac{Gh}{n}$ einer Wasserschicht, so erhalten wir die entsprechende Ausflußzeit:

$$\tau = \frac{Gh}{\frac{2}{3}\mu n b \sqrt{2gh^3}},$$

wofür wir $\frac{3Gh}{2\mu n b\sqrt{2g}} \cdot h^{-\frac{3}{2}}$ schreiben wollen.

Um nun die Ausflußzeit t für ein Wasserquantum $G(h - h_1)$ zu erhalten, oder um die Zeit zu bestimmen, innerhalb welcher der Wasserstand über der Schwelle, von $DE = h$ auf $DE_1 = h_1$ herabsinkt, setzen wir $h_1 = \frac{m}{n}h$, lassen also h_1 aus m Theilen bestehen, führen nun in der letzten Gleichung statt $h^{-\frac{3}{2}}$, successiv

$$\left(\frac{m}{n}h\right)^{-\frac{3}{2}}, \left(\frac{m+1}{n}h\right)^{-\frac{3}{2}}, \left(\frac{m+2}{n}h\right)^{-\frac{3}{2}} \cdots \left(\frac{nh}{n}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

ein, und addiren endlich die erhaltenen Ergebnisse. Auf diesem Wege bekommen wir die gesuchte Zeit:

$$t = \frac{3Gh}{2\mu n b\sqrt{2g}}\left[\left(\frac{mh}{n}\right)^{-\frac{3}{2}} + \left(\frac{m+1}{n}h\right)^{-\frac{3}{2}} + \cdots + \left(\frac{nh}{n}\right)^{-\frac{3}{2}}\right]$$

$$= \frac{3Gh}{2\mu n b\sqrt{2g}} \cdot \frac{h^{-\frac{3}{2}}}{n^{-\frac{3}{2}}}\left[m^{-\frac{3}{2}} + (m+1)^{-\frac{3}{2}} + \cdots + n^{-\frac{3}{2}}\right]$$

$$= \frac{3Gh^{-\frac{1}{2}}}{2\mu n^{-\frac{1}{2}} b\sqrt{2g}}\left[(1^{-\frac{3}{2}} + 2^{-\frac{3}{2}} + 3^{-\frac{3}{2}} + \cdots + n^{-\frac{3}{2}}) - (1^{-\frac{3}{2}} + 2^{-\frac{3}{2}} + 3^{-\frac{3}{2}} + \cdots + m^{-\frac{3}{2}})\right],$$

oder nach dem „Ingenieur“, Arithmetik Seite 88:

$$t = \frac{3Gh^{-\frac{1}{2}}}{2\mu n^{-\frac{1}{2}} b\sqrt{2g}}\left(\frac{n^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} - \frac{m^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1}\right)$$

$$= \frac{3Gn^{\frac{1}{2}}}{2\mu b\sqrt{2gh}} \cdot 2\,(m^{-\frac{1}{2}} - n^{-\frac{1}{2}}) = \frac{3G}{\mu b\sqrt{2gh}}\left[\left(\frac{m}{n}\right)^{-\frac{1}{2}} - 1\right]$$

$$= \frac{3G}{\mu b\sqrt{2g}}\left[\left(\frac{m}{n}h\right)^{-\frac{1}{2}} - h^{-\frac{1}{2}}\right] = \frac{3G}{\mu b\sqrt{2g}}\left(\frac{1}{\sqrt{h_1}} - \frac{1}{\sqrt{h}}\right).$$

Setzt man $h_1 = 0$, so erhält man $\frac{1}{\sqrt{h_1}}$ und also auch $t = \infty$; damit also das Wasser bis zur Schwelle abläuft, ist eine unendliche Zeit nothwendig.

Beispiel. Wenn das Wasser durch einen Wandeinschnitt von 8 Zoll Breite aus einem Reservoir von 110 Fuß Länge und 40 Fuß Breite ausfließt, in wel-

cher Zeit geht der Wasserstand von 15 Zoll über der Ueberfallschwelle in den Wasserstand von 6 Zoll über? Es ist:

$$t = \frac{3.110.40}{\mu . {}^2/_3 . 7,906}\left(\frac{1}{\sqrt{0,5}} - \frac{1}{\sqrt{1,25}}\right) = \frac{19800}{\mu . 7,906}(\sqrt{2} - \sqrt{{}^4/_5})$$

$$= \frac{19800}{7,906\,\mu}(1,4142 - 0,8944) = \frac{19800 . 0,5198}{7,906\,\mu} = \frac{1302}{\mu} \text{ Secunden.}$$

Nimmt man den Ausflußcoefficienten $\mu = 0,60$ an, so folgt die effective Ausflußzeit:

$$t = \frac{1302}{0,6} = 2170 \text{ Secunden} = 36 \text{ Minuten } 10 \text{ Secunden.}$$

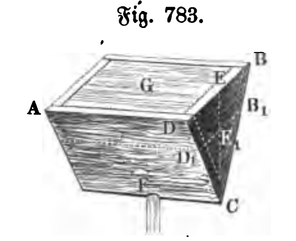
Anmerkung. Für eine rectanguläre Seitenöffnung läßt sich annähernd setzen:

$$t = \frac{2\,G}{\mu F \sqrt{2g}}\left((\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}) - \frac{a^2}{288}(\sqrt{h_1^{-3}} - \sqrt{h_2^{-3}})\right),$$

und es bezeichnen F und G die Querschnitte der Oeffnung und des Gefäßes, a die Oeffnungshöhe, h_1 die Druckhöhe am Anfange, sowie h_2 die am Ende des Ausflusses. Wird $h_2 = \frac{a}{2}$, so geht die Oeffnung in einen Wandeinschnitt über und es ist nun die Formel für diesen anzuwenden.

§. 451 **Keil- und pyramidenförmige Gefässe.** Bildet das Ausflußgefäß ABF, Fig. 783, ein horizontales, dreiseitiges Prisma, so findet man die Ausflußzeit auf folgende Weise. Theilen wir die Höhe $CE = h$ in n gleiche Theile und legen wir durch die Theilpunkte Horizontalebenen, so zerlegen wir das ganze Wasserquantum in lauter gleich dicke Schichten von gleicher Länge $AD = l$ und von oben nach unten zu abnehmenden Breiten. Ist die Breite DB der oberen Schicht, $= b$, so hat man die Breite $D_1 B_1$ einer anderen Schicht, welche um $CE_1 = x$ über der in der unteren Kante liegenden Mündung F steht, $y = \frac{x}{h} b$, und ihr Volumen $= yl \cdot \frac{h}{n} = \frac{b l x}{n}$. Nun ist aber die Ausflußmenge, auf die Zeiteinheit bezogen:

Fig. 783.



$$Q = \mu F \sqrt{2 g x},$$

daher folgt dann die kleine Zeit, innerhalb welcher der Wasserspiegel um $\frac{h}{n}$ sinkt,

$$\tau = \frac{b l}{n} x : \mu F \sqrt{2 g x} = \frac{b l}{n \mu F \sqrt{2 g}} \cdot x^{1/2}.$$

Da endlich die Summe aller $x^{1/2}$, von $x = \frac{h}{n}$ bis $x = \frac{n h}{n}$ genommen,

$$= \left(\frac{h}{n}\right)^{1/2} \cdot \frac{n^{3/2}}{{}^3/_2} = {}^2/_3\, n h^{1/2}$$

ist, so hat man die Zeit zum Ausflusse des ganzen Wasserprisma's:

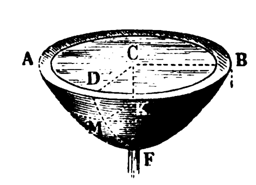
$$= \frac{bl}{n\mu F\sqrt{2g}} \cdot {}^2/_3\, n h^{1/2} = {}^2/_3\, \frac{bl}{\mu F\sqrt{2g}} \cdot h^{1/2} = {}^4/_3\, \frac{{}^1/_2\, blh}{\mu F\sqrt{2gh}}, \text{ d. i.}$$

$$t = {}^4/_3 \cdot \frac{V}{\mu F c},$$

wenn $V = {}^1/_2\, blh$ das ganze Wasservolumen und $c = \sqrt{2gh}$ die anfängliche Ausflußgeschwindigkeit ist. Es braucht also hier das Wasser um $^1/_3$ mehr Zeit, als wenn die Ausflußgeschwindigkeit unveränderlich c wäre.

Bildet das Gefäß ABF, Fig. 784, ein aufrechtstehendes Paraboloid, so hat man für das Verhältniß zwischen den Halbmessern $KM = y$ und $CD = b$,

Fig. 784.



$$\frac{y}{b} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{h}},$$

und daher das Verhältniß des Horizontalschnittes G_1 durch K zur Grundfläche $ADB = G$:

$$\frac{G_1}{G} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{h}, \text{ folglich:}$$

$$G_1 = \frac{Gx}{h},$$

und den Inhalt einer Wasserschicht:

$$= G_1 \cdot \frac{h}{n} = \frac{Gx}{n}.$$

Die vollständige Uebereinstimmung dieses Ausdruckes mit dem für das dreiseitige Prisma gefundenen gestattet daher auch hier

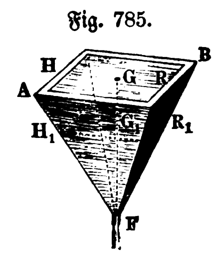
$$t = {}^4/_3 \cdot \frac{{}^1/_2\, Gh}{\mu F\sqrt{2gh}}$$

zu setzen, oder, da hier $V = {}^1/_2\, Gh$ ist (§. 124, Beisp.), auch

$$t = {}^4/_3 \cdot \frac{V}{\mu F c}.$$

Diese Formel läßt sich in vielen anderen Fällen zur angenäherten Bestimmung der Ausflußzeit namentlich auf das Ausleeren von Teichen anwenden. Sie gilt überhaupt auch in allen den Fällen, wenn die Horizontalschnitte wie die Abstände von dem Boden wachsen.

Fig. 785.



Hat man es endlich mit einem pyramidenförmigen Gefäße ABF, Fig. 785, zu thun, so ist

$G_1 : G = x^2 : h^2$, und daher $G_1 = \frac{Gx^2}{h^2}$,

ferner der Inhalt der Schicht $H_1 R_1$:

$$\frac{G_1 h}{n} = \frac{Gx^2}{nh},$$

und die Zeit zum Ausflusse derselben:

$$\tau = \frac{G x^2}{n h} : \mu F \sqrt{2 g x} = \frac{G}{n \mu F h \sqrt{2 g}} \cdot x^{3/2}.$$

Da aber die Summe aller $x^{3/2}$ von $x = \frac{h}{n}$ bis $x = \frac{n h}{n}$ genommen,

$$= \left(\frac{h}{n}\right)^{3/2} \cdot \frac{n^{5/2}}{5/2} = 2/_5\, n\, h^{3/2}$$

ist, so folgt die Zeit zum Leeren der ganzen Pyramide:

$$t = \frac{G}{n \mu F h \sqrt{2 g}} \cdot 2/_5\, n\, h^{3/2} = 2/_5 \cdot \frac{G h^{1/2}}{\mu F \sqrt{2 g}} = 6/_5 \cdot \frac{1/_3\, G h}{\mu F \sqrt{2 g h}},$$

oder $1/_3\, G h = V$ gesetzt,

$$t = 6/_5 \cdot \frac{V}{\mu F c}.$$

Da bei diesem Ausflusse die anfängliche Ausflußgeschwindigkeit von c allmälig bis Null abnimmt, so ist die Ausflußzeit $1/_5$ größer als wenn die Geschwindigkeit unveränderlich $= c$ bliebe.

Beispiel. In welcher Zeit wird sich ein Teich, dessen Wasserspiegel 765000 Quadratfuß Inhalt hat, leeren, wenn das in der tiefsten Stelle einmündende Fischgerinne 15 Fuß unter dem Wasserspiegel steht und eine Röhre von 15 Zoll Weite und 50 Fuß Länge bildet? Theoretisch ist die Ausflußzeit:

$$t = 4/_3 \cdot \frac{V}{F \sqrt{2 g h}} = 4/_3 \cdot 1/_2 \cdot \frac{765000 \,.\, 15}{\frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^2 \cdot 7{,}906 \sqrt{15}} = \frac{19584000}{\pi \,.\, 7{,}906 \sqrt{15}}$$

$= 203586$ Secunden.

Nun ist aber der Widerstandscoefficient für den Eintritt in das innen etwa um den Winkel von 45° abgeschrägte Teichgerinne:

$$\zeta = 0{,}505 + 0{,}327 \text{ (s. §. 423)} = 0{,}832,$$

und der Reibungswiderstand für dieses Gerinne:

$$= 0{,}025 \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2 g} = 0{,}025 \cdot \frac{50}{5/_4} \cdot \frac{v^2}{2 g} = \frac{v^2}{2 g};$$

daher folgt der vollständige Ausflußcoefficient für dasselbe:

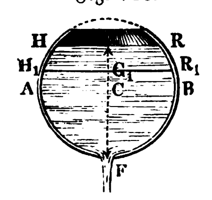
$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1 + 0{,}832 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2{,}832}} = 0{,}594,$$

und die in Frage stehende Ausflußzeit:

$t = 203586 : 0{,}594 = 342670$ Secunden $= 95$ Stunden 11 Minuten.

§. 452 **Kugel- und obeliskenförmige Gefässe.** Mit Hülfe der im letzten Paragraphen aufgefundenen Formeln kann man nun auch die Ausflußzeiten für viele andere Gefäße, z. B. für kugel-, obelisken-, pyramidenförmige u. s. w. finden.

Fig. 786.



1) Für das Leeren eines gefüllten Kugelsegmentes AFB, Fig. 786, dessen Halbmesser $CA = CF = r$, und Höhe $FG = h$ ist, erhält man:

$$t = \,^4/_3 \frac{\pi r h^2}{\mu F \sqrt{2gh}} - \,^2/_5 \cdot \frac{\pi h^3}{\mu F \sqrt{2gh}} = \,^2/_{15}\, \pi \frac{(10r - 3h) h^{3/2}}{\mu F \sqrt{2g}},$$

also für das Leeren einer vollen Kugel, wo $h = 2r$ ist,

$$t = \frac{16 \pi r^2 \sqrt{2r}}{15 \mu F \sqrt{2g}},$$

und für das einer halben Kugel, wo $h = r$,

$$t = \frac{14 \pi r^2 \sqrt{r}}{15 \mu F \sqrt{2g}}.$$

Es ist nämlich hier die der Tiefe $FG_1 = x$ entsprechende Horizontalschicht $H_1 R_1 = G_1$:

$$= \pi x (2r - x) \cdot \frac{h}{n} = \frac{2 \pi r h x}{n} - \frac{\pi h x^2}{n},$$

folglich bei der Ausflußgeschwindigkeit $v = \sqrt{2gh}$, die Zeit zum Ausfließen derselben

$$\tau = \frac{2 \pi r h}{n \mu F \sqrt{2g}} \cdot x^{1/2} - \frac{\pi h}{n \mu F \sqrt{2g}} \cdot x^{3/2}.$$

Da der erste Theil dieses Ausdruckes mit der Formel für das Leeren des prismatischen und der zweite Theil mit derjenigen für das Leeren des pyramidalen Gefäßes übereinstimmt, wenn man nur das eine Mal $2 \pi r h$ statt $b l$ und das zweite Mal πh^2 statt G setzt, so erhält man mit Hülfe der Differenz für die im vorigen Paragraphen gefundenen Ausleerungszeiten eines prismatischen und eines pyramidalen Gefäßes:

$$t = \,^2/_3 \cdot \frac{b l h}{\mu F \sqrt{2gh}}$$

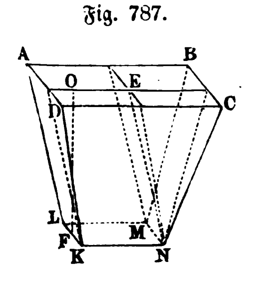
und

$$t = \,^2/_5 \cdot \frac{G h}{\mu F \sqrt{2gh}}$$

auch die oben angegebene Ausleerungszeit des Kugelsegmentes.

2) Für das obelisken- oder pontonförmige Gefäß ACK, Fig. 787, lassen sich, da dasselbe aus einem Parallelepipede AEK, aus zwei Prismen BEN und DEN und einer Pyramide CEN (vergl. §. 121) zusammengesetzt ist, die obigen Formeln ebenfalls anwenden. Es sei b die obere Breite AD, b_1 die untere Breite KL, ferner l die obere Länge AB und l_1 die untere Länge KN, und endlich h die Höhe OF des Gefäßes. Dann hat man für die Fläche des Wasserspiegels AC:

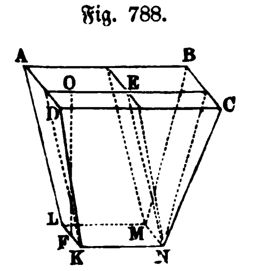
Fig. 787.



$$b l = b_1 l_1 + b_1 (l - l_1) + l_1 (b - b_1) + (l - l_1)(b - b_1),$$

und davon bildet $b_1 l_1$ die Basis des Parallelepipedes AEK; ferner sind $b_1 (l - l_1)$ und $l_1 (b - b_1)$ die Grundflächen der beiden Prismen BEN und DEK und es ist $(l - l_1)(b - b_1)$ die Basis der Pyramide CEN. Nun ist aber die Ausflußzeit für das Parallelepiped:

Fig. 788.



$$t_1 = \frac{2 b_1 l_1 \sqrt{h}}{\mu F \sqrt{2g}},$$

ferner die Ausflußzeit für die beiden dreiseitigen Prismen:

$$t_2 = {}^2/_3 \, \frac{[b_1 (l - l_1) + l_1 (b - b_1)] \sqrt{h}}{\mu F \sqrt{2g}},$$

und endlich die Ausflußzeit für die Pyramide:

$$t_3 = {}^2/_5 \, \frac{(l - l_1)(b - b_1) \sqrt{h}}{\mu F \sqrt{2g}};$$

es folgt daher die Ausflußzeit für das ganze Gefäß:

$$t = t_1 + t_2 + t_3$$

$$= [30 b_1 l_1 + 10 b_1 (l - l_1) + 10 l_1 (b - b_1) + 6 (l - l_1)(b - b_1)] \frac{\sqrt{h}}{15 \mu F \sqrt{2g}}$$

$$= [3 b l + 8 b_1 l_1 + 2 (b l_1 + b_1 l)] \frac{2 \sqrt{h}}{15 \mu F \sqrt{2g}}.$$

Ist $\frac{b_1}{l_1} = \frac{b}{l}$, so hat man es mit einer abgekürzten Pyramide zu thun. Setzen wir für diese die Grundfläche $bl = G$ und die Grundfläche $b_1 l_1 = G_1$, so erhalten wir:

$$t = (3 G + 8 G_1 + 4 \sqrt{G G_1}) \frac{2 \sqrt{h}}{15 \mu F \sqrt{2g}}.$$

Uebrigens ist leicht zu ermessen, daß diese Formel auch für jede drei- und vielseitige Pyramide gilt.

Beispiel. Ein obeliskenförmiger Wasserkasten ist oben 5 Fuß lang und 3 Fuß breit, und 4 Fuß tiefer, nämlich im Niveau der 1 Zoll weiten und 3 Zoll langen horizontalen Ansatzröhre, 4 Fuß lang und 2 Fuß breit, wie viel Zeit braucht das den Kasten anfangs ganz füllende Wasser, um $2^1/_2$ Fuß zu sinken? Die Zeit zum Leeren ist, $\mu = 0{,}815$ angenommen:

$$t = [8 . 4 . 2 + 3 . 5 . 3 + 2 (3 . 4 + 5 . 2)] \frac{2 \sqrt{4}}{15 . 0{,}815 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{1}{12}\right)^2 . 7{,}906}$$

$$= \frac{153 . 4 . 4 . 144}{15 . 0{,}815 . 7{,}906 . \pi} = 153 \cdot \frac{2304}{12{,}225 . 7{,}906 \, \pi} = 153 . 7{,}588 = 1161 \text{ Sec.}$$

Im Niveau $4 - 2^1/_2 = 1^1/_2$ Fuß über der Röhre ist $l = l_1 + {}^3/_8 = 4^3/_8$

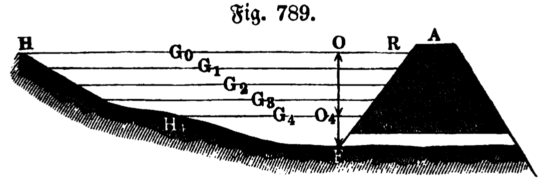
und $b = b_1 + {}^3/_8 = 2{}^3/_8$ Fuß, daher die Zeit zum Leeren, wenn das Gefäß nur bis zu diesem Niveau gefüllt ist,

$$t_1 = [8.4.2 + 3.{}^{35}/_8.{}^{19}/_8 + 2\,(2.{}^{35}/_8 + 4.{}^{19}/_8)] \cdot \frac{1152\sqrt{1,5}}{15.0,815.7906\,\pi}$$
$$= 131,672.4,6465 = 612 \text{ Secunden.}$$

Die Differenz der gefundenen Zeiten giebt die Zeit (549 Secunden), innerhalb welcher der anfänglich bis zum Kopfe des Gefäßes reichende Wasserspiegel um $2^1/_2$ Fuß sinkt.

Ungesetzmässige Gefässe. Ist die Ausflußzeit für ein ungesetzmäßig geformtes Gefäß HFR, Fig. 789, zu finden, so hat man eine §. 453

Fig. 789.



Annäherungsmethode, z. B. die Simpson'sche Regel, anzuwenden. Hat man die ganze Wassermasse in vier gleich hohe Schichten getheilt, und die den Horizontalschnitten G_0, G_1, G_2, G_3, G_4 entsprechenden Druckhöhen durch h_0, h_1, h_2, h_3, h_4 bezeichnet, so ergiebt sich die Ausflußzeit durch die Simpson'sche Regel:

$$t = \frac{h_0 - h_4}{12\mu F\sqrt{2g}}\left(\frac{G_0}{\sqrt{h_0}} + \frac{4\,G_1}{\sqrt{h_1}} + \frac{2\,G_2}{\sqrt{h_2}} + \frac{4\,G_3}{\sqrt{h_3}} + \frac{G_4}{\sqrt{h_4}}\right).$$

Bei Annahme von sechs Schichten erhält man:

$$t = \frac{h_0 - h_6}{18\mu F\sqrt{2g}}\left(\frac{G_0}{\sqrt{h_0}} + \frac{4\,G_1}{\sqrt{h_1}} + \frac{2\,G_2}{\sqrt{h_2}} + \frac{4\,G_3}{\sqrt{h_3}} + \frac{2\,G_4}{\sqrt{h_4}} + \frac{4\,G_5}{\sqrt{h_5}} + \frac{G_6}{\sqrt{h_6}}\right).$$

Das Ausflußquantum ist im ersten Falle:

$$V = \frac{h_0 - h_4}{12}(G_0 + 4\,G_1 + 2\,G_2 + 4\,G_3 + G_4),$$

im zweiten:

$$V = \frac{h_0 - h_6}{18}(G_0 + 4\,G_1 + 2\,G_2 + 4\,G_3 + 2\,G_4 + 4\,G_5 + G_6).$$

Ist die Gestalt und Größe des Ausflußgefäßes nicht bekannt, so kann man durch die in gleichen Zeitintervallen beobachteten Wasserstände h_0, h_1 u. s. w. die Ausflußmenge V gleichwohl berechnen. Ist t die ganze Ausflußzeit, so hat man bei Boden- und Seitenöffnungen:

$$V = \frac{\mu F t\sqrt{2g}}{12}(\sqrt{h_0} + 4\sqrt{h_1} + 2\sqrt{h_2} + 4\sqrt{h_3} + \sqrt{h_4}),$$

und für Ueberfälle oder Wandeinschnitte:

$$V = {}^2/_3\,\frac{\mu b t}{12}\sqrt{2g}\,(\sqrt{h_0^3} + 4\sqrt{h_1^3} + 2\sqrt{h_2^3} + 4\sqrt{h_3^3} + \sqrt{h_4^3}).$$

Beispiel. In welcher Zeit sinkt der Wasserspiegel eines Teiches um 6 Fuß, wenn das Teichgerinne einen halben Cylinder von 18 Zoll Weite, 9 Zoll Tiefe und 60 Fuß Länge bildet, und die Wasserspiegel folgende Inhalte haben:

G_0, bei 20 Fuß Druckhöhe, = 600000 Quadratfuß.
G_1, „ 18,5 „ „ = 495000 „
G_2, „ 17,0 „ „ = 410000 „
G_3, „ 15,5 „ „ = 325000 „
G_4, „ 14,0 „ „ = 265000 „

Es ist $F = \frac{\pi}{8} \cdot (3/2)^2 = \frac{9\pi}{32} = 0{,}8836$ Quadratfuß. Setzen wir, wie im Beispiel zu §. 451, den Widerstandscoefficienten für den Eintritt, $= 0{,}832$, und den für die Reibung, $= 0{,}025 \cdot \frac{l}{d} = 0{,}025 \,.\, 60 \,.\, 1{,}091 = 1{,}6356$, so ist der Ausflußcoefficient:

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1 + 0{,}832 + 1{,}6365}} = \frac{1}{\sqrt{3{,}4685}} = 0{,}537,$$

und

$$\mu F \sqrt{2g} = 0{,}537 \,.\, 0{,}8836 \,.\, 7{,}906 = 3{,}7518.$$

Nun hat man:

$$\frac{G_0}{\sqrt{h_0}} = \frac{600000}{\sqrt{20}} = 134170, \quad \frac{G_1}{\sqrt{h_1}} = \frac{495000}{\sqrt{18{,}7}} = 115090,$$

$$\frac{G_2}{\sqrt{h_2}} = \frac{410000}{\sqrt{17}} = 99440, \quad \frac{G_3}{\sqrt{h_3}} = \frac{325000}{\sqrt{15{,}5}} = 82550,$$

$$\frac{G_4}{\sqrt{h_4}} = \frac{265000}{\sqrt{14}} = 70830,$$

daher folgt die Ausflußzeit:

$$t = \frac{6}{12 \,.\, 3{,}7518} (134170 + 4 \,.\, 115090 + 2 \,.\, 99440 + 4 \,.\, 82550 + 70830)$$

$$= \frac{1194440}{7{,}5036} = 159190 \text{ Secunden} = 44 \text{ Stunden } 13 \text{ Minuten}.$$

Das Ausflußquantum ist:

$$V = 6/12 \,.\, (600000 + 4 \,.\, 495000 + 2 \,.\, 410000 + 4 \,.\, 325000 + 265000)$$

$$= \frac{4965000}{2} = 2482500 \text{ Cubikfuß}.$$

§. 454 **Zu- und Abfluss.** Erhält das Gefäß während des Ausflusses von unten, noch Zufluß von oben, so wird die Bestimmung der Zeit, innerhalb welcher der Wasserspiegel auf eine gewisse Höhe steigt oder sinkt, viel verwickelter, so daß man sich meist mit einer angenäherten Bestimmung begnügen muß. Ist das Zuflußquantum pr. Secunde $Q_1 > \mu F \sqrt{2gh}$, so findet ein Steigen, und ist $Q_1 < \mu F \sqrt{2gh}$, so findet ein Sinken des Wasserspiegels statt. Uebrigens tritt hier alle Mal Beharrungszustand ein, wenn die Druckhöhe entweder auf $k = \frac{1}{2g}\left(\frac{Q_1}{\mu F}\right)^2$ angewachsen oder dahin herabgesunken ist. Die Zeit τ, innerhalb welcher die veränderliche Druckhöhe x um die kleine Größe ξ wächst, ist bestimmt durch die Gleichung:

$$G_1 \xi = Q_1 \tau - \mu F \sqrt{2 g x} . \tau,$$

und dagegen die Zeit, innerhalb welcher der Wasserspiegel um ξ sinkt, durch:

$$G_1 \xi = \mu F \sqrt{2 g x} . \tau - Q_1 \tau.$$

Man hat daher im ersten Falle:

$$\tau = \frac{G_1 \xi}{Q_1 - \mu F \sqrt{2 g x}},$$

und im zweiten:

$$\tau = \frac{G_1 \xi}{\mu F \sqrt{2 g x} - Q_1}.$$

Durch Anwendung der Simpson'schen Regel erhält man so die Ausflußzeit, innerhalb welcher der Wasserspiegel sinkend aus G_0 in G_1, G_2, ... und die Druckhöhe aus h_0 in h_1, h_2, ... übergeht:

$$t = \frac{h_0 - h_4}{12} \left[\frac{G_0}{\mu F \sqrt{2 g h_0} - Q_1} + \frac{4\, G_1}{\mu F \sqrt{2 g h_1} - Q_1} + \frac{2\, G_2}{\mu F \sqrt{2 g h_2} - Q_1} \right.$$
$$\left. + \frac{4\, G_3}{\mu F \sqrt{2 g h_3} - Q_1} + \frac{G_4}{\mu F \sqrt{2 g h_4} - Q_1} \right],$$

oder einfacher, wenn man $\frac{Q_1}{\mu F \sqrt{2 g}}$ durch $\sqrt{k}$ bezeichnet,

$$t = \frac{h_0 - h_4}{12 \mu F \sqrt{2 g}} \left[\frac{G_0}{\sqrt{h_0} - \sqrt{k}} + \frac{4\, G_1}{\sqrt{h_1} - \sqrt{k}} + \frac{2\, G_2}{\sqrt{h_2} - \sqrt{k}} \right.$$
$$\left. + \frac{4\, G_3}{\sqrt{h_3} - \sqrt{k}} + \frac{G_4}{\sqrt{h_4} - \sqrt{k}} \right].$$

Ist das Gefäß prismatisch und hat es den unveränderlichen Querschnitt G, so hat man (s. des Verfassers Experimentalhydraulik, §. 9, XII.):

$$t = \frac{2\, G}{\mu F \sqrt{2 g}} \left[\sqrt{h} - \sqrt{h_1} + \sqrt{k} . \, log. \, nat. \left(\frac{\sqrt{h} - \sqrt{k}}{\sqrt{h_1} - \sqrt{k}} \right) \right],$$

für die Zeit, innerhalb welcher die Druckhöhe aus h in h_1 übergeht.

Da für $h_1 = k$, $\frac{\sqrt{h} - \sqrt{k}}{\sqrt{h_1} - \sqrt{h}} = \frac{\sqrt{h} - \sqrt{k}}{0} = \infty$

ausfällt, so folgt, daß der Beharrungszustand erst unendlich spät eintritt.

Bei einem Wandeinschnitte stellt sich folgende Formel heraus:

$$t = \frac{G k}{3 Q_1} \left[log. \, nat. \, \frac{(\sqrt{h} - \sqrt{k})^2 \, (h_1 + \sqrt{h_1 k} + k)}{(\sqrt{h_1} - \sqrt{k})^2 \, (h_1 + \sqrt{h k} + k)} \right.$$
$$\left. + \sqrt{12} . \, arc. \left(tang. = \frac{(\sqrt{h} - \sqrt{h_1}) \sqrt{12 k}}{3 k + (2 \sqrt{h} + \sqrt{k}) \, (2 \sqrt{h_1} + \sqrt{k})} \right) \right],$$

wo $k = \left(\frac{Q_1}{{}^2/_3 \, \mu b \sqrt{2 g}} \right)^{2/3}$, *log. nat.* den natürlichen Logarithmen und

arc. (*tang.* $= y$) den der Tangente y entsprechenden Kreisbogen bezeichnet. Je nachdem $k \lesseqgtr h$, oder das zufließende Wasserquantum

$$Q_1 \gtrless {}^2/_3\, \mu\, b\, \sqrt{2 g h^3}$$

ist, findet entweder ein Steigen oder ein Fallen des Wasserspiegels statt. Der Beharrungszustand tritt ein, wenn $h_1 = k$ ist, die entsprechende Zeit t fällt aber ∞ aus.

Beispiel. In welcher Zeit steigt das Wasser in einem 12 Fuß langen und 6 Fuß breiten parallelepipedischen Kasten von Null auf 2 Fuß Höhe über der Schwelle eines $\frac{1}{2}$ Fuß breiten Wandeinschnittes, wenn in der Secunde 5 Cubikfuß Wasser zufließen? Man hat hier $h = 0$, daher einfacher:

$$t = \frac{G k}{3 Q_1} \left[log.\,nat. \frac{h_1 + \sqrt{h_1 k} + k}{(\sqrt{h_1} - \sqrt{k})^2} + \sqrt{12}\, arc. \left(tang. = \frac{-\sqrt{3 h_1}}{2\sqrt{k} + \sqrt{h_1}} \right) \right].$$

Nun ist $G = 12 . 6 = 72$, $Q_1 = 5$, $h_1 = 2$, $b = \frac{1}{2}$ und $\mu = 0{,}6$, sowie

$$k = \left(\frac{5}{{}^2/_3 . 0{,}6 . {}^1/_2 . 7{,}906} \right)^{2/3} = 2{,}1544,$$

daher folgt die gesuchte Zeit:

$$t = \frac{72.2{,}1544}{3 . 5} \left[log.nat. \frac{4{,}1544 + \sqrt{4{,}3088}}{(1{,}4142 - 1{,}4678)^2} - \sqrt{12} arc. \left(tang. = \frac{\sqrt{6}}{1{,}4142 + 2{,}9357} \right) \right]$$

$$= 10{,}341 \left[log.\ nat.\ \frac{6{,}2302}{0{,}002873} - \sqrt{12} . arc. \left(tang. = \frac{\sqrt{6}}{4{,}3499} \right) \right]$$

$$= 10{,}341\ (7{,}682 - 1{,}778) = 10{,}341 . 5{,}90 = 61 \text{ Secunden.}$$

§. 455 **Schleusen.** Eine nützliche Anwendung der oben abgehandelten Lehren läßt sich auf das Füllen und Leeren der Schleusen (franz. écluses; engl. sluices) machen. Man unterscheidet zweierlei Schleusen (Schifffahrtsschleusen), nämlich einfache und doppelte. Die einfache Schleuse, Figur 790, besteht aus einer Kammer B, welche durch das Oberthor HF vom Oberwasser A und durch das Unterthor RS vom Unterwasser C getrennt wird. Die doppelte Schleuse, Fig. 791, hingegen besteht aus zwei Kammern, mit dem Oberthore KL, Mittelthore HF und Unterthore RS.

Fig. 790.

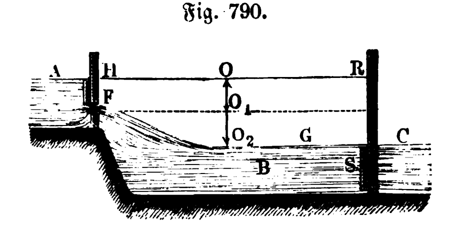
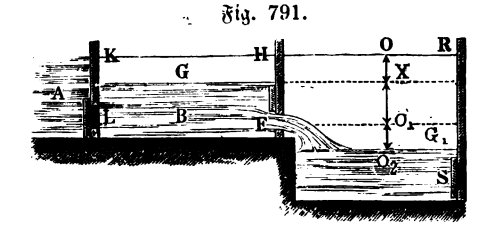


Fig. 791.



1) Setzen wir den mittleren horizontalen Querschnitt einer einfachen Schleusenkammer, $= G$, den Abstand $O O_1$ der Mitte der Schutzöffnung im Oberthore von der Oberfläche HR des Oberwassers, $= h_1$ und den Abstand $O_1 O_2$ von der des Unterwassers, $= h_2$, und endlich den Inhalt der Schutzöffnung, $= F$, so erhalten wir die Zeit des Füllens bis zur Mitte der Mündung, wobei die Druckhöhe constant ist:

$$t_1 = \frac{G h_2}{\mu F \sqrt{2 g h_1}},$$

und die Zeit zum Füllen des übrigen Raumes, wobei ein allmäliges Abnehmen der Druckhöhe statt hat:

$$t_2 = \frac{2 G h_1}{\mu F \sqrt{2 g h_1}};$$

es ist folglich die Zeit zum Füllen der einfachen Schleuse:

$$t = t_1 + t_2 = \frac{(2 h_1 + h_2) G}{\mu F \sqrt{2 g h_1}}.$$

Befindet sich die Mündung im Unterthor ganz unter Wasser, so nimmt beim Leeren die Druckhöhe allmälig von $O O_2 = h_1 + h_2$ bis Null ab, es ist daher die Zeit des Leerens oder Ablassens:

$$t = \frac{2 G \sqrt{h_1 + h_2}}{\mu F \sqrt{2 g}}.$$

Steht hingegen ein Theil der Mündung aus dem Unterwasser hervor, so hat man zwei Ausflußmengen, eine über und eine unter Wasser ausfließend, zu berücksichtigen. Setzen wir die Höhe des Theiles der Mündung über dem Wasser, $= a_1$ und die Höhe des Theiles unter dem Wasser, $= a_2$, sowie die Breite der Mündung, $= b$, so erhält man die Ausflußzeit durch den Ausdruck:

$$t = \frac{2 G (h_1 + h_2)}{\mu b \sqrt{2 g} \left(a_1 \sqrt{h_1 + h_2 - \frac{a_1}{2}} + a_2 \sqrt{h_1 + h_2}\right)}.$$

2) Bei den doppelten Schleusen (Fig. 791) nimmt die Druckhöhe in der vom Oberwasser abgeschlossenen Kammer während des Ausflusses in die zweite Kammer immer mehr und mehr ab. Ist G der horizontale Querschnitt der ersten Kammer und sinkt die anfängliche Druckhöhe $O O_1 = h_1$ in dieser Kammer auf $X O_1 = x$ herab, während das Wasser in der zweiten Kammer bis zur Mitte der Schutz- oder Ausflußöffnung, und zwar um $O_2 O_1 = h_2$ steigt, so hat man die entsprechende Zeit:

$$t_1 = \frac{2 G}{\mu F \sqrt{2 g}} (\sqrt{h_1} - \sqrt{x}).$$

Nun ist aber Wasserquantum:

$$G (h_1 - x) = G_1 h_2, \text{ daher:}$$

$$x = h_1 - \frac{G_1}{G} h_2$$

und:

$$t_1 = \frac{2\,G}{\mu F \sqrt{2g}} \left(\sqrt{h_1} - \sqrt{h_1 - \frac{G_1 h_2}{G}} \right)$$
$$= \frac{2 \sqrt{G}}{\mu F \sqrt{2g}} \left(\sqrt{G h_1} - \sqrt{G h_1 - G_1 h_2} \right).$$

Die Zeit, in welcher das Wasser in der zweiten Kammer so hoch steigt, wie in der ersten Kammer, nach welcher also das Wasser in beiden in einerlei Niveau kommt, ist nach §. 449:

$$t_2 = \frac{2\,G\,G_1 \sqrt{x}}{\mu F (G + G_1) \sqrt{2g}} = \frac{2\,G_1 \sqrt{G} \sqrt{G h_1 - G_1 h_2}}{\mu F (G + G_1) \sqrt{2g}},$$

und die ganze Füllungszeit:

$$t = t_1 + t_2 = \frac{2 \sqrt{G}}{\mu F \sqrt{2g}} \left(\sqrt{G h_1} - \frac{G}{G + G_1} \sqrt{G h_1 - G_1 h_2} \right).$$

Beispiel. Welche Zeit ist zum Füllen und Ablassen folgender einfachen Schleusenkammern nöthig? Mittlere Schleusenlänge = 200 Fuß, mittlere Breite = 24 Fuß, also $G = 200 . 24 = 4800$ Quadratfuß, Abstand des Mittelpunktes der Schutzöffnung im Oberthore von beiden Wasserspiegeln, = 5 Fuß, Breite beider Oeffnungen, = $2^1/_2$ Fuß, Höhe der Oeffnung im Oberthore, = 4 Fuß, und Höhe der Oeffnung im Unterthore (ganz unter Wasser), = 5 Fuß. Setzen wir in

$$t = \frac{(2 h_1 + h_2)\,G}{\mu F \sqrt{2 g h_1}},\ h_1 = 5,\ h_2 = 5,\ G = 4800,\ \mu = 0{,}615,$$
$$F = 4 . 2^1/_2 = 10 \text{ und } \sqrt{2g} = 7{,}906,$$

so erhalten wir die Zeit zum Füllen:

$$t = \frac{3 . 5 . 4800}{6{,}15 . 7{,}906 \sqrt{5}} = \frac{14400}{1{,}23 . 7{,}906 \sqrt{5}} = 662 \text{ Sec.} = 11 \text{ Min. } 2 \text{ Sec.}$$

Setzen wir in der Formel

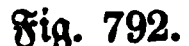
$$t = \frac{2\,G \sqrt{h_1 + h_2}}{\mu F \sqrt{2g}},\ G = 4800,\ h_1 + h_2 = 10,\ F = 5 . 2^1/_2 = 12{,}5,$$

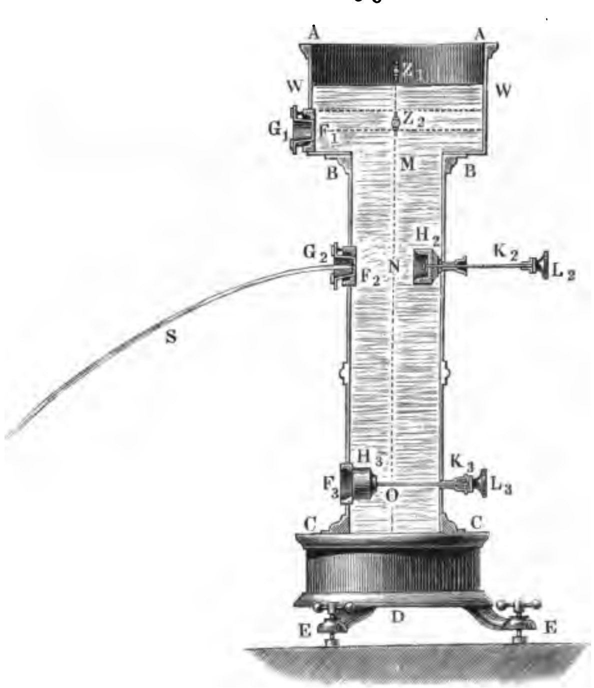
so folgt die Zeit zum Leeren der Schleuse:

$$t = \frac{2 . 4800 \sqrt{10}}{0{,}615 . 12{,}5 . 7{,}905} = 500 \text{ Sec.} = 8 \text{ Min. } 20 \text{ Sec.}$$

§. 456 **Hydraulischer Versuchsapparat.** Mittels eines in Fig. 792 abgebildeten hydraulischen Versuchsapparates kann man nicht allein durch mehr als 100 Versuche die wichtigsten Erscheinungen des Ausflusses vor Augen führen, sondern auch die hauptsächlichsten Gesetze derselben in Zahlen nachweisen. Dieser Apparat besteht in einem Ausflußgefäße ABC mit drei Mündungen F_1, F_2, F_3, deren Mittelpunkte von dem mittleren Wasserspiegel WW um Höhen abstehen, welche sich zu einander wie die Quadratzahlen

1, 4, 9 zu einander verhalten. In diese Mündungen lassen sich die verschiedenartigsten Mundstücke und Röhren einsetzen, und damit dies ohne Störung durch das


Fig. 792.



Wasser geschehen könne, hat man besondere Verschließungsklappen H_2, H_3, deren Stiele K_2, K_3 durch Stopfbüchsen in der Rückwand des Apparates hindurchgehen, angebracht. In dem oberen und weiteren Theile AB des Apparates befinden sich noch zwei zugespitzte und nach oben gerichtete Zeiger Z_1 und Z_2, welche als Anhaltepunkte bei den Versuchen dienen, indem der Durchgang des sinkenden Wasserspiegels durch diese Spitzen den Anfang und das Ende eines jeden Versuches bestimmt. Das ausfließende Wasser fängt man in einem Gefäße auf, das vor dem folgenden Versuche auf das Ausflußreservoir gesetzt wird und durch ein mit einem Stöpsel versehenes Loch seinen Inhalt in das Reservoir zurückführt.

Um mit Hülfe dieses Apparates die Ausflußcoefficienten μ verschiedener Mundstücke und Röhren zu finden, hat man mittels einer guten Secundenuhr die Zeit t zu beobachten, innerhalb welcher während des Ausflusses der Wasserspiegel von der einen Spitze bis zur anderen sinkt, oder die Druckhöhe h_1 in die Druckhöhe h_2 übergeht; ist dann noch F der Querschnitt der

Ausflußmündung und G der Inhalt des sinkenden Wasserspiegels, so hat man den Ausflußcoefficienten (s. §. 448):

$$\mu = \frac{2\,G\,(\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2})}{F\,t\,\sqrt{2\,g}},$$

und die entsprechende mittlere Druckhöhe:

$$h = \left(\frac{\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}}{2}\right)^2.$$

Zu diesem Apparate gehört noch eine Sammlung von Mundstücken und Röhren, nämlich quadratische, rectanguläre, kreisförmige und trianguläre Mündungen in dünnem Blech, mit oder ohne innere Einfassung, kurze cylindrische und conische Röhren, längere gerade Röhren von verschiedenen Weiten, Kropf- und Knieröhren u. s. w., welche sich in die verschiedenen Ausflußlöcher F_1, F_2, F_3 einsetzen lassen. Mittels dieses so ausgerüsteten Apparates kann man in wenig Stunden fast alle Erscheinungen und Gesetze des Ausflusses vor Augen führen; man kann an demselben nicht nur die vollkommene und unvollkommene, die vollständige und unvollständige, sondern auch die verschiedenen Grade der Contraction der Wasserstrahlen studiren, ferner die Reibungs-, Knie- und Krümmungswiderstände in Röhren, sowie auch den positiven und negativen Druck des Wassers, durch Springen und Ansaugen u. s. w. kennen lernen. Immer wird man auf recht leidliche, zum Theil aber auch auf überraschend gute Uebereinstimmungen mit den mitgetheilten Erfahrungsgrößen (μ, φ, α, ζ) stoßen. Bei unserem Apparate ist $G = 0{,}125$ Quadratmeter, die gewöhnliche Mündungs- und Röhrenweite ungefähr 1 Centimeter, und für die untere Mündung, $h_1 = 0{,}96$ und $h_2 = 0{,}84$ Meter. (Eine ausführliche Beschreibung dieses Apparates und der mit demselben auszuführenden Versuche u. s. w. enthält die Experimentalhydraulik des Verfassers.)

Ein Beispiel, wie gut die Beobachtungen an diesem Apparate mit den bekannten Versuchen im Großen übereinstimmen, ist folgendes. Für eine kurze cylindrische Ansatzröhre im unteren Loche wurde $t = 33$, für eine längere Glasröhre mit dem Längenverhältnisse $\frac{l}{d} = 124$ aber $t = 56$ Secunden gefunden; hieraus berechnet sich für die eine:

$$\mu_1 = 0{,}815 \text{ und } \zeta_1 = \frac{1}{\mu_1^2} - 1 = 0{,}504,$$

und für die andere:

$$\mu_2 = 0{,}480 \text{ und } \zeta_2 = \frac{1}{\mu_1^2} - 1 = 3{,}332,$$

es folgt hiernach:

$$\zeta_2 - \zeta_1 = 3{,}332 - 0{,}504 = 2{,}828,$$

und daher der Reibungscoefficient der Röhre:

$$\zeta = \frac{d}{l}(\zeta_2 - \zeta_1) = \frac{2,828}{124} = 0,0228.$$

Nach der ersten Tabelle in §. 429 ist für die mittlere Geschwindigkeit $v = 1,84$ Meter, mit welcher das Wasser aus der Röhre ausfloß, $\zeta = 0,0215$, also die Uebereinstimmung eine ganz gute. Bei diesen Versuchen läßt sich auch auf das Ueberzeugendste nachweisen, daß die Ausflußgeschwindigkeit durch Röhren nicht von der Neigung derselben, sondern nur von der Druckhöhe der Ausmündung abhängt. Es fällt z. B. die Ausflußzeit gleich groß aus, die lange Röhre mag im mittleren oder im unteren Loche stecken, wenn nur die Ausmündung derselben gleich tief unter dem Wasserspiegel im Reservoir steht.

Dieser Ausflußapparat hat neuerer Zeit noch vielfache Ergänzungen erhalten, so daß es möglich ist, mit demselben auch Versuche über den Ausfluß des Wassers unter constantem Druck, sowie auch solche über den Ausfluß der Luft, ferner Versuche über den Druck, Stoß und die Reaction des Wassers u. s. w. anzustellen.

Schlußanmerkung. Die Literatur über den Ausfluß des Wassers und über die Bewegung des Wassers in Röhren wird am vollständigsten mitgetheilt in der „allgemeinen Maschinenencyklopädie, Band 1, Art. Ausfluß". Von den neueren Schriften ist hier nur anzuführen: „Gerstner, Handbuch der Mechanik, Band 2, Prag 1832"; ferner „d'Aubuisson's Traité d'Hydraulique à l'usage des Ingénieurs. II. édit. 1840". Die erste Ausgabe ist auch deutsch erschienen. „Eytelwein's Handbuch der Mechanik fester Körper und der Hydraulik, dritte Auflage, 1842"; ferner Scheffler's Principien der Hydrostatik und Hydraulik, Braunschweig 1847". Wegen ihrer praktischen Haltung haben die älteren hydraulischen Schriften von Bossut und du Buat immer einen großen Werth. Für den Unterricht und für das praktische Studium der Hydraulik ist besonders geeignet: „Die Experimentalhydraulik, eine Anleitung zur Ausführung hydraulischer Versuche im Kleinen, von J. Weisbach, Freiberg 1855". Ferner ist zu empfehlen: „Rühlmann's Hydromechanik", Leipzig 1857. Der neueren Werke von Lesbros, Boileau, Francis u. s. w. ist oben (§§. 378, 380 und 387) gedacht worden. Noch ist zu empfehlen: Rankine's Manual of applied Mechanics, sowie Cours de Mécanique appliquée II., par Bresse. Von den hydraulischen Versuchen des Verfassers sind bis jetzt erst zwei Hefte erschienen, und zwar:

1) Versuche über den Ausfluß des Wassers durch Schieber, Hähne, Klappen und Ventile, und
2) Versuche über die unvollkommene Contraction des Wassers beim Ausflusse u. s. w., Leipzig 1843.

Mehrere neue Abhandlungen des Verfassers über Hydraulik enthält der Civil-Ingenieur, die Zeitschrift des deutschen Ingenieurvereines u. s. w.

Sechstes Capitel.

Von dem Ausflusse der Luft und anderer Flüssigkeiten aus Gefäßen und Röhren.

§. 457 **Ausfluss vom Quecksilber und Oel.** Die allgemeine Formel

$$v = \sqrt{2gh} \text{ (s. §. 397)}$$

für die Ausflußgeschwindigkeit v des unter dem durch die Höhe h gemessenen Drucke ausfließenden Wassers gilt (s. §. 399) auch bei anderen Flüssigkeiten, z. B. Quecksilber, Oel, Alkohol u. s. w., und läßt sich sogar auch auf den Ausfluß der Luft und anderer luftförmigen Flüssigkeiten anwenden, wenn deren Pressung nicht groß ist. Bezeichnet γ die Dichtigkeit der Flüssigkeit und p den Druck derselben auf die Flächeneinheit, so hat man ebenfalls $h = \frac{p}{\gamma}$, und daher auch

$$v = \sqrt{2g\frac{p}{\gamma}}.$$

Mißt man den Druck durch ein Piëzometer, dessen Füllung, z. B. Quecksilber, die Dichtigkeit γ_1 hat, so beträgt der Stand desselben, d. i. die Höhe seiner Flüssigkeitssäule:

$$h_1 = \frac{p}{\gamma_1};$$

es ist also $p = h_1\gamma_1$, und daher auch

$$v = \sqrt{2g\frac{\gamma_1}{\gamma}h_1} = \sqrt{2g\varepsilon_1 h_1},$$

wenn $\varepsilon_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma}$ das Verhältniß der Dichtigkeit der Piëzometerfüllung zur Dichtigkeit der ausströmenden Flüssigkeit bezeichnet.

Die Uebereinstimmung der Ausflußgesetze der verschiedenen Flüssigkeiten erstreckt sich nicht allein auf die Geschwindigkeit, sondern auch auf die Contraction der Flüssigkeitsstrahlen; die Quecksilber-, Oel-, Luftstrahlen u. s. w. beim Ausflusse durch eine Mündung in der dünnen ebenen Wand sind ebenso und fast in demselben Verhältnisse contrahirt als die Wasserstrahlen. Einige Versuche, welche der Verfasser über den Ausfluß des Quecksilbers, Rüböles und der atmosphärischen Luft angestellt hat, weisen diese Uebereinstimmung vollständig nach (s. Polytechn. Centralblatt, Jahrgang 1851, Seite 386). Diese Versuche gaben:

1) Für eine kreisrunde Mündung in der dünnen ebenen Wand von

6,5 Millimeter Durchmesser, bei den Druckhöhen 91,5 Millimeter und 329 Millimeter die Ausflußcoefficienten:

für Wasser	Quecksilber	Rüböl
$\mu = 0{,}709$	0,670	0,674

Es läßt sich hiernach erwarten, daß die Contraction der Quecksilber- und Rübölstrahlen noch wenig stärker ist als die der Wasserstrahlen.

Ferner 2) ein kurzes innen gut abgerundetes conoidisches Mundstück von der Ausmündungsweite $d = 6{,}6$ Millimeter und der doppelten Länge ($l = 2\,d$) gab folgende Ausflußcoefficienten:

für Wasser	Quecksilber	Rüböl	
		bei $12\frac{1}{2}^0$ C. Temp.	bei 39^0 C. Temp.
$\mu = 0{,}942$	0,989	0,430	0,665

3) Eine kurze cylindrische Ansatzröhre ohne alle Abrundung von der Weite $d = 6{,}76$ Millimeter, und der dreifachen Länge ($l = 3\,d$) führte auf folgende Werthe:

für Wasser	Quecksilber	Rüböl	
		bei $12\frac{1}{2}^0$ C. Temp.	bei 39^0 C. Temp.
$\mu = 0{,}885$	0,900	0,363	0,604

Aus diesen Versuchen ergiebt sich, daß beim Ausflusse durch kurze Mundstücke und Röhren das Quecksilber nur wenig schneller ausfließt als das Wasser, dagegen das Rüböl eine viel kleinere, jedoch mit der Temperatur ansehnlich wachsende Geschwindigkeit hat als das Wasser. Der große Unterschied zwischen der Geschwindigkeit des Rüböles und des Wassers hat jedenfalls in der großen Klebrigkeit des Oeles an der Röhrenwand seinen Grund.

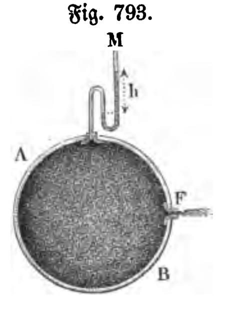
4) Beim Ausflusse durch eine 6,64 Millimeter weite und 86mal so lange Glasröhre (I.) und beim Ausflusse durch eine 6,78 Millimeter weite und 85mal so lange Eisenröhre (II.) ergaben sich folgende Werthe der Widerstandscoefficienten ζ:

	für Wasser	Quecksilber	Rüböl	
			bei 6° C. Temp.	bei 32° C. Temp.
I.	$\zeta = 0{,}0271$	0,0277	39,21	2,722
II.	$\zeta = 0{,}0403$	0,0461	54,90	5,24

Den letzten Versuchen zufolge ist sowohl in einer Glas- als auch in einer Eisenröhre der Widerstandscoefficient des Quecksilbers wenig größer, dagegen aber der Widerstandscoefficient des Rüböles viele Mal größer als der des Wassers. Auch ist aus der letzten Tabelle zu ersehen, daß der Widerstandscoefficient des Rüböles um so mehr abnimmt, je höher die Temperatur oder der Flüssigkeitsgrad desselben ist. Endlich wird auch durch diese Versuche dargethan, daß die Widerstandscoefficienten der Reibung für die Eisenröhre weit größer sind als für die weit glattere Glasröhre.

§. 458 **Ausflussgeschwindigkeit der Luft.** Unter der Voraussetzung, daß die Luft während des Ausflusses ihre Dichtigkeit nicht ändert, läßt sich die bekannte Grundformel für den Ausfluß des Wassers aus Gefäßen auch auf den Ausfluß der Luft anwenden. Ist daher p der Druck der äußeren Luft, sowie p_1 der Druck und γ_1 die Dichtigkeit der Luft im Inneren des Reservoirs AB, Fig. 793, so kann man die Ausflußgeschwindigkeit der letzteren (s. §. 399) setzen:

Fig. 793.



$$v = \sqrt{2g\frac{(p_1 - p)}{\gamma_1}}$$
$$= \sqrt{2g\frac{p_1}{\gamma_1}\left(1 - \frac{p}{p_1}\right)}.$$

Nun ist aber (nach §. 393), wenn p den Druck in Kilogrammen auf ein Quadratcentimeter Fläche, γ das Gewicht eines Cubikmeters Luft und τ die Temperatur derselben bezeichnen, für atmosphärische Luft:

$$\frac{p}{\gamma} = \frac{1 + 0{,}00367\,.\,\tau}{1{,}2514},$$

oder wenn man p auf ein Quadratmeter Fläche bezieht,

$$\frac{p}{\gamma} = \frac{10000}{1{,}2514}\cdot(1 + 0{,}00367\,\tau) = 7991\,(1 + 0{,}00367\,\tau),$$

daher folgt:

$$\sqrt{\frac{p_1}{\gamma_1}} = \sqrt{\frac{p}{\gamma}} = \sqrt{7991}\,\sqrt{1 + 0,00367\,\tau},$$

oder wenn man noch 0,00367 durch δ ersetzt,

$$\sqrt{\frac{p}{\gamma}} = 89,39\,\sqrt{1 + \delta\tau}, \text{ und}$$

$$v = 89,39\,\sqrt{2g\,(1 + \delta\tau)\left(1 - \frac{p}{p_1}\right)}$$

$$= 396\,\sqrt{(1 + \delta\tau)\left(1 - \frac{p}{p_1}\right)} \text{ Meter},$$

oder, für preuß. Maß,

$$v = 159,6\,\sqrt{2g\,(1 + \delta\tau)\left(1 - \frac{p}{p_1}\right)}$$

$$= 1261\,\sqrt{(1 + \delta\tau)\left(1 - \frac{p}{p_1}\right)} \text{ Fuß}.$$

Ist b der äußere Barometerstand, und h der Manometerstand (M), so hat man auch:

$$\frac{p}{p_1} = \frac{b}{b + h}, \text{ also } 1 - \frac{p}{p_1} = \frac{h}{b + h},$$

und folglich die Ausströmungsgeschwindigkeit der Luft:

$$v = 396\,\sqrt{(1 + \delta\tau)\,\frac{h}{b + h}} \text{ Meter}$$

$$= 1261\,\sqrt{(1 + \delta\tau)\,\frac{h}{b + h}} \text{ Fuß},$$

oder annähernd, bei kleinen Manometerständen, indem man

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{h}{b}}} = 1 - \frac{h}{2b} \text{ setzt},$$

$$v = 396\left(1 - \frac{h}{2b}\right)\sqrt{(1 + \delta\tau)\,\frac{h}{b}} \text{ Meter}$$

$$= 1261\left(1 - \frac{h}{2b}\right)\sqrt{(1 + \delta\tau)\,\frac{h}{b}} \text{ Fuß}.$$

Anmerkung. Wegen des gewöhnlichen Feuchtigkeitszustandes der atmosphärischen Luft ist es rathsam, in der Praxis $\delta = 0,004$ anzunehmen.

Ausflussquantum. Ist F die Größe der Ausströmungsöffnung, so hat man die effective Ausflußmenge, gemessen unter dem inneren Drucke p_1 oder $b + h$: §. 459

$$Q_1 = Fv = F\sqrt{2g\frac{p_1}{\gamma_1}\left(1-\frac{p}{p_1}\right)} = F\sqrt{2g\frac{p}{\gamma}}\sqrt{1-\frac{p}{p_1}}$$

$$= F\sqrt{2g\frac{p}{\gamma}}\sqrt{\frac{h}{b+h}},$$

z. B. für atmosphärische Luft:

$$Q_1 = 396\,F\sqrt{\frac{(1+\delta\tau)\,h}{b+h}} \text{ Cubikmeter}$$

$$= 1261\,F\sqrt{\frac{(1+\delta\tau)\,h}{b+h}} \text{ Cubikfuß.}$$

Dieses Luftquantum auf den äußeren Luftdruck p oder b reducirt, erhält man:

$$Q = \frac{p_1}{p}\,Q_1 = \frac{b+h}{b}\,Q_1$$

$$= F\sqrt{\frac{2gp}{\gamma}\cdot\frac{p_1}{p}}\sqrt{1-\frac{p}{p_1}}$$

$$= F\sqrt{\frac{2gp}{\gamma}\cdot\frac{b+h}{b}}\sqrt{\frac{h}{b+h}} = F\sqrt{\frac{2gp}{\gamma}}\sqrt{\left(1+\frac{h}{b}\right)\frac{h}{b}},$$

z. B. für atmosphärische Luft:

$$Q = 396\,F\sqrt{(1+\delta\tau)\left(1+\frac{h}{b}\right)\frac{h}{b}} \text{ Cubikmeter}$$

$$= 1261\,F\sqrt{(1+\delta\tau)\left(1+\frac{h}{b}\right)\frac{h}{b}} \text{ Cubikfuß.}$$

Beispiel. In einem großen Behälter ist Luft von 120 Grad Wärme eingeschlossen, welcher ein Quecksilbermanometerstand von 5 Zoll entspricht, während der äußere Barometerstand 27,2 Zoll beträgt; welche Windmenge wird aus demselben durch eine $1\frac{1}{2}$ Zoll weite kreisrunde Mündung strömen?

Die theoretische Ausflußgeschwindigkeit ist:

$$v = 1261\sqrt{(1+0{,}00367\,.\,120)\frac{5}{32{,}2}} = 1261\sqrt{\frac{1{,}4404\,.\,5}{32{,}2}} = 596{,}4 \text{ Fuß;}$$

ferner der Querschnitt der Mündung:

$$F = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{\pi}{256} = 0{,}01227 \text{ Quadratfuß;}$$

folglich die theoretische Ausflußmenge, gemessen unter dem inneren Drucke:

$$Q_1 = Fv = 596{,}4\,.\,0{,}01227 = 7{,}319 \text{ Cubikfuß;}$$

dagegen gemessen unter dem äußeren Drucke:

$$Q = \frac{b+h}{b}\,Q_1 = \frac{32{,}2}{27{,}2}\cdot 7{,}319 = 8{,}665 \text{ Cubikfuß.}$$

§. 460 **Ausfluss nach dem Mariotte'schen Gesetze.** Unter der Voraussetzung, daß die Luft beim Ausströmen aus Gefäßen keine Tempera-

turveränderung erleidet, läßt sich annehmen, daß sie sich hierbei nach dem Mariotte'schen Gesetze (s. §. 387) ausdehnt, und daher auch voraussetzen, daß das Luftquantum Q beim Uebergange aus der Pressung p_1 in die Pressung p die Arbeit $Q p \, Log. nat. \left(\frac{p_1}{p}\right)$ verrichte (s. §. 388). Setzt man nun diese Arbeit der Arbeit $\frac{v^2}{2g} Q \gamma$ gleich, welche das $Q\gamma$ bei dem Ausflusse in Anspruch nimmt, so erhält man folgende Formel

$$\frac{v^2}{2g} Q \gamma = Log. nat. \left(\frac{p_1}{p}\right) \cdot Q p, \text{ oder}$$

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{p}{\gamma} \, Ln. \left(\frac{p_1}{p}\right),$$

wonach die Ausflußgeschwindigkeit

$$v = \sqrt{2 g \frac{p}{\gamma} \, Ln. \left(\frac{p_1}{p}\right)} \text{ folgt.}$$

Noch ist, wie oben, für Metermaß $\frac{p}{\gamma} = \frac{1 + \delta \tau}{1,2514}$, daher hat man auch

$$v = 396 \sqrt{(1 + \delta \tau) \, Ln. \left(\frac{p_1}{p}\right)} = 396 \sqrt{(1 + \delta \tau) Ln. \left(\frac{b+h}{b}\right)} \text{ Meter,}$$

sowie

$$v = 1261 \sqrt{(1 + \delta \tau) \, Ln. \left(\frac{p_1}{p}\right)} = 1261 \sqrt{(1 + \delta \tau) Ln. \left(\frac{b+h}{b}\right)} \text{ Fuß,}$$

wobei b den Barometerstand der äußeren und h den Manometerstand der inneren Luft, ferner τ die Temperatur der letzteren und $\delta = 0,00367$, den bekannten Ausdehnungscoefficienten der Luft bezeichnet. Nun folgt die theoretische Ausflußmenge pr. Secunde:

$$Q = F v = F \sqrt{2 g \frac{p}{\gamma} \, Ln. \cdot \left(\frac{p_1}{p}\right)}$$

$$= 1261 \, F \sqrt{(1 + \delta \tau) \, Ln. \left(\frac{b + h}{b}\right)} \text{ Cubikfuß,}$$

oder reducirt auf den inneren Druck:

$$Q_1 = \frac{p}{p_1} Q = \frac{p}{p_1} F \sqrt{2 g \frac{p}{\gamma} \, Ln. \left(\frac{p_1}{p}\right)}$$

$$= \frac{b}{b + h} F \sqrt{2 g \frac{p}{\gamma} \, Ln. \left(\frac{b + h}{b}\right)}$$

$$= 1261 \, F \frac{b}{b + h} \sqrt{(1 + \delta \tau) \, Ln \cdot \left(\frac{b + h}{b}\right)}.$$

Ist der Ueberdruck der inneren Luft oder $\frac{h}{b}$ sehr klein, so kann man

$$Ln. \left(\frac{b+h}{b}\right) = Ln. \left(1 + \frac{h}{b}\right) = \frac{h}{b} - {}^1/_2 \left(\frac{h}{b}\right)^2$$

(s. Ingenieur, Seite 81), und daher auch annähernd

$$Q = F \sqrt{2 g \frac{p}{\gamma} \left(1 - \frac{h}{2b}\right) \frac{h}{b}}$$

setzen, während nach der ersteren Ausflußformel (s. §. 459)

$$Q = F \sqrt{2 g \frac{p}{\gamma} \left(1 + \frac{h}{b}\right) \frac{h}{b}} \text{ ist.}$$

Es führt also die Annahme, daß sich die Luft beim Ausströmen nach dem Mariotte'schen Gesetze ausdehne, auf eine kleinere Ausflußmenge, als die Annahme, daß sie sich beim Ausflusse genau so wie Wasser verhalte, also gar nicht ausdehne. Diese Differenz vermindert sich jedoch mit $\frac{h}{b}$, und es ist endlich bei sehr kleinen Werthen von $\frac{h}{b}$, in beiden Fällen:

$$Q = F \sqrt{2 g \frac{p}{\gamma} \cdot \frac{h}{b}} = 1261 F \sqrt{(1 + \delta \tau) \frac{h}{b}} \text{ Cubikfuß.}$$

zu setzen.

§. 461 **Arbeit der Wärme.** Der in §. 388 gefundene logarithmische Ausdruck für die mechanische Arbeit beim Comprimiren und Ausdehnen der Luft hat nur unter der Voraussetzung seine Gültigkeit, daß sich bei dieser Volumen- oder Dichtigkeitsveränderung die Temperatur der Luft nicht ändere; dies ist jedoch nur dann anzunehmen, wenn diese Veränderung sehr langsam erfolgt, wobei die Wärme hinreichende Zeit hat, sich mit der Wärme der Gefäßwand und der äußeren Luft ins Gleichgewicht zu setzen. Geht aber die Dichtigkeitsveränderung der Luft schnell vor sich, so ist mit derselben auch eine Temperaturveränderung verbunden, und zwar beim Verdichten derselben eine Erhöhung und beim Verdünnen eine Verminderung der Temperatur. Es kann daher sich auch in diesem Falle die Spannung nicht nach dem einfachen Mariotte'schen Gesetze verändern. Sind p und p_1 die Pressungen, γ und γ_1 die Dichtigkeiten, sowie τ und τ_1 die Temperaturen einer und derselben Luft, so gilt nach §. 392 die Formel

$$\frac{p_1}{p} = \frac{1 + \delta \tau_1}{1 + \delta \tau} \cdot \frac{\gamma_1}{\gamma}.$$

Wenn sich nun an der plötzlichen Pressungsveränderung die Temperatur in dem Verhältnisse

$$\frac{1 + \delta \tau_1}{1 + \delta \tau_2} = \left(\frac{\gamma_1}{\gamma}\right)^{1/3} \text{, ändert, so läßt sich}$$

$$\frac{p_1}{p} = \left(\frac{1+\delta\tau_1}{1+\delta\tau}\right)^3 = \left(\frac{\gamma_1}{\gamma}\right)^{3/2},$$

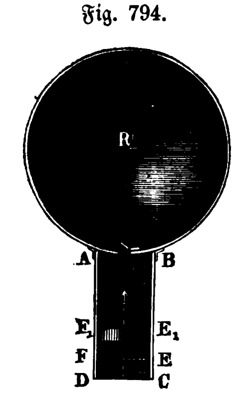
sowie

$$\frac{\gamma_1}{\gamma} = \left(\frac{1+\delta\tau_1}{1+\delta\tau}\right)^2 = \left(\frac{p_1}{p}\right)^{2/3}$$

setzen.

Wenn in dem Cylinder AC, Fig. 794, durch den Kolben EF anfänglich ein Luftprisma von der Höhe $EB = s$, mit der Spannung p und Dichtigkeit γ abgesperrt wird, und diese Luftmenge durch ein schnelles Aufschieben des Kolbens um x plötzlich in die Dichtigkeit y und Spannung z versetzt wird, so ist der letzten Formel zu Folge,

Fig. 794.



$$\frac{z}{p} = \left(\frac{y}{\gamma}\right)^{3/2} = \left(\frac{s}{s-x}\right)^{3/2},$$

und daher

$$z = \left(\frac{s}{s-x}\right)^{3/2} p.$$

Um daher den Kolben, dessen Fläche der Einfachheit wegen, der Flächeneinheit gleich sein möge, durch das Wegelement σ fortzuschieben, ist die mechanische Arbeit

$$z\sigma = \left(\frac{s}{s-x}\right)^{3/2} p\sigma = p\sigma s^{3/2}(s-x)^{-3/2}$$

nöthig.

Führt man nun statt x, nach und nach $1\sigma, 2\sigma, 3\sigma \ldots$ ein, setzt man $s = n\sigma$ sowie die Höhe des Luftraumes am Ende des Kolbenweges EE_1, $E_1B = s_1 = m\sigma$, so erhält man die mechanische Arbeit, welche der Kolben bei dem Ausschube EE_1 verrichtet:

$$A_1 = p\sigma s^{3/2}\left[s^{-3/2} + (s-\sigma)^{-3/2} + (s-2\sigma)^{-3/2} + \cdots + (s-m\sigma)^{-3/2}\right]$$

$$\doteq p\sigma s^{3/2}\left\{\begin{matrix}(\sigma)^{-3/2} + (2\sigma)^{-3/2} + (3\sigma)^{-3/2} + \cdots + (n\sigma)^{-3/2} \\ -\left[(\sigma)^{-3/2} + (2\sigma)^{-3/2} + (3\sigma)^{-3/2} + \cdots + (m\sigma)^{-3/2}\right]\end{matrix}\right\}$$

$$= \frac{p s^{3/2}}{\sigma^{1/2}}\left\{\begin{matrix}1^{-3/2} + 2^{-3/2} + 3^{-3/2} + \cdots + m^{-3/2} + \cdots + n^{-3/2} \\ -\left(1^{-3/2} + 2^{-3/2} + 3^{-3/2} + \cdots + m^{-3/2}\right)\end{matrix}\right\}.$$

Nun ist aber, wenn m und n unendlich große Zahlen bedeuten, nach Seite 88 des Ingenieur:

$$1^{-3/2} + 2^{-3/2} + 3^{-3/2} + \cdots + m^{-3/2} = \frac{m^{-1/2}}{-1/2} = -\frac{2}{m^{1/2}},$$

und

$$1^{-3/2} + 2^{-3/2} + 3^{-3/2} + \cdots + n^{-3/2} = -\frac{2}{n^{-1/2}},$$

daher folgt

$$A_1 = \frac{ps^{3/2}}{\sigma^{1/2}}\left(\frac{2}{m^{1/2}} - \frac{2}{n^{1/2}}\right) = 2ps^{3/2}\left(\frac{1}{s_1{}^{1/2}} - \frac{1}{s^{1/2}}\right)$$
$$= 2ps\left[\left(\frac{s}{s_1}\right)^{1/2} - 1\right].$$

Um das comprimirte Luftquantum AE_1 durch weiteres Aufschieben des Kolbens auf den Weg s_1 in einen Raum R zu drücken, worin die Pressung

$$p_1 = p\left(\frac{s}{s_1}\right)^{3/2}$$

vorhanden ist, wird noch die Arbeit

$$A_2 = p_1 s_1 = \frac{ps^{3/2}}{s_1{}^{1/2}}$$

erfordert, wogegen die äußere Luft während des ganzen Kolbenweges mit der Kraft p nachschiebt, und hierbei die Arbeit $A_3 = ps$ auf den Kolben überträgt. Es ist daher schließlich die ganze mechanische Arbeit zum Comprimiren des Luftvolumens $(1 \,.\, s)$ und Hineindrücken in den Raum R:

$$A = A_1 + A_2 - A_3$$
$$= 2ps\left[\left(\frac{s}{s_1}\right)^{1/2} - 1\right] + \frac{ps^{3/2}}{s_1{}^{1/2}} - ps = 3ps\left[\left(\frac{s}{s_1}\right)^{1/2} - 1\right],$$

und folglich die Arbeit zum Comprimiren des Luftvolumens V, von p auf p_1:

$$A = 3\,Vp\left[\left(\frac{s}{s_1}\right)^{1/2} - 1\right] = 3\,Vp\left[\left(\frac{p_1}{p}\right)^{1/3} - 1\right] = 3\,Vp\left(\sqrt[3]{\frac{p_1}{p}} - 1\right),$$

während nach dem Mariotte'schen Gesetze

$$A = Vp\,Ln.\left(\frac{p_1}{p}\right)$$

und bei vollständiger Incompressibilität des Fluidums,

$$A = V\,(p_1 - p) = Vp\left(\frac{p_1}{p} - 1\right)$$

zu setzen wäre.

Wird umgekehrt das Luftquantum $V_1\gamma_1$ von der Pressung p_1 durch plötzliche Ausdehnung auf die Pressung p und Dichtigkeit

$$\gamma = \gamma_1\left(\frac{p}{p_1}\right)^{2/3}$$

oder Volumen

$$V = V_1\left(\frac{p_1}{p}\right)^{2/3}$$

zurückgeführt, so verrichtet dasselbe die mechanische Arbeit

$$A = 3\,Vp\left[\left(\frac{p_1}{p}\right)^{1/3} - 1\right] = 3\,V_1 p_1\left[1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{1/3}\right].$$

Beispiel. Ein Gebläse, welches pro Secunde 10 Cubikfuß Luft von $b = 28$ Zoll Barometerstand in Wind von $b + h = 30$ Zoll Spannung verwandelt, erfordert nach der Formel

$$A = 3\,Vp\left[\left(\frac{p_1}{p}\right)^{1/3} - 1\right],$$

da der Druck der äußeren Luft auf den Quadratfuß

$p = 144 \,.\, 0{,}5037\,b = 144 \,.\, 0{,}5037 \,.\, 28 = 2031$ Pfd. beträgt,

den Arbeitsaufwand

$$A = 30 \,.\, 2031\left(\sqrt[3]{\frac{30}{28}} - 1\right) = 6093\left(\sqrt[3]{\frac{15}{14}} - 1\right) = 6093 \,.\, 0{,}23265$$
$$= 1418 \text{ Fußpfd.}$$

während die logarithmische Formel (siehe Beisp. 1 zu §. 388), $A = 1401$ Fußpfd. gegeben hat und nach der Wasserformel

$$A = Vp\left(\frac{p_1}{p} - 1\right) = 29310\left(\frac{15}{14} - 1\right) = \frac{20310}{14} = 1451 \text{ Fußpfd.}$$

ist.

Ausfluss der Luft mit Rücksicht der Abkühlung. Das Arbeitsquantum $A = 3\,Q_1\,p_1\left[1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{1/3}\right]$, welches bei der plötzlichen Ausdehnung des Luftvolumens Q_1 auf Q frei wird, ist auch gleich zu setzen der Arbeit $Q_1\,\gamma_1 \cdot \frac{v^2}{2g}$, welche die Trägheit der Luftmasse $\frac{Q_1\,\gamma_1}{g}$ bei Annahme der Ausflußgeschwindigkeit v in Anspruch nimmt. §. 462

Die hiernach aufzustellende Gleichung

$$Q_1\gamma_1\frac{v^2}{2g} = 3\,Q_1 p_1\left[1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{1/3}\right]$$

führt nun auf folgende Ausflußformel

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{3p_1}{\gamma_1}\left[1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{1/3}\right], \text{ oder}$$

$$v = \sqrt{2g \cdot \frac{3p_1}{\gamma_1}\left[1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{1/3}\right]},$$

wonach für französisches Maß

$$v = 154{,}8\sqrt{2g(1 + \delta\tau)\left[1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{1/3}\right]}$$
$$= 685{,}8\sqrt{(1 + \delta\tau)\left[1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{1/3}\right]} \text{ Meter,}$$

und für preußisches Maß

$$v = 276{,}4\sqrt{2g(1 + \delta\tau)\left[1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{1/3}\right]}$$
$$= 2185\sqrt{(1 + \delta\tau)\left[1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{1/3}\right]} \text{ Fuß folgt.}$$

Die ausströmende Luft hat die äußere Pressung p, die Dichtigkeit

$$\gamma_2 = \gamma_1 \left(\frac{p}{p_1}\right)^{3/4}$$

und die Temperatur

$$\tau_2 = \tau_1 \left(\frac{p}{p_1}\right)^{1/4} \frac{\left(\frac{p}{p_1}\right)^{1/4} - 1}{\delta},$$

und das theoretische Luftquantum, welches durch eine Mündung vom Inhalte F strömt, ist

$$Q_2 = Fv = F\sqrt{2g \cdot \frac{3p_1}{\gamma_1}\left[1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{1/4}\right]},$$

$$= 276{,}4\, F\sqrt{2g(1 + \delta\tau)\left[1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{1/4}\right]} \text{ Cubikfuß},$$

wobei p_1, γ_1 und τ_1 Pressung, Dichtigkeit und Temperatur der inneren Luft bezeichnen.

Auf den inneren Druck reducirt, ist das Ausflußquantum

$$Q_1 = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \cdot Q_2 = \left(\frac{p}{p_1}\right)^{3/4} Q_1 = F\left(\frac{p}{p_1}\right)^{3/4}\sqrt{2g \cdot 3\frac{p_1}{\gamma_1}\left[1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{1/4}\right]},$$

und endlich auf den äußeren Luftdruck und die innere Temperatur oder auf die Dichtigkeit $\gamma = \gamma_1 \left(\frac{p}{p_1}\right)$ reducirt, ist es

$$Q = \frac{p_1}{p}\, Q_1 = F\left(\frac{p_1}{p}\right)^{1/4}\sqrt{2g\frac{3p_1}{\gamma_1}\left[1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{1/4}\right]}$$

$$= F\sqrt{2g\frac{3p_1}{\gamma_1}\left(\frac{p_1}{p}\right)^{1/4}\left[\left(\frac{p_1}{p}\right)^{1/4} - 1\right]}.$$

Setzt man $\frac{p_1}{p} = \frac{b + h}{b}$, wo b den äußeren und $b + h$ den inneren Barometerstand bezeichnet, so erhält man

$$Q = F\sqrt{2g\frac{3p_1}{\gamma_1}\left(\frac{b+h}{b}\right)^{1/4}\left[\left(\frac{b+h}{b}\right)^{1/4} - 1\right]}$$

$$= 276{,}9\, F\sqrt{2g(1 + \delta\tau)\left(\frac{b+h}{b}\right)^{1/4}\left[\left(\frac{b+h}{b}\right)^{1/4} - 1\right]}$$

$$= 2185\, F\sqrt{(1 + \delta\tau)\left(\frac{b+h}{b}\right)^{1/4}\left[\left(\frac{b+h}{b}\right)^{1/4} - 1\right]} \text{ Cubikfuß}.$$

In den meisten Fällen der Anwendung ist $\frac{h}{b}$ klein, so daß sich

$$\left(\frac{b+h}{b}\right)^{1/4} = \left(1 + \frac{h}{b}\right)^{1/4} = 1 + {}^1/_3\,\frac{h}{b} - {}^1/_9\left(\frac{h}{b}\right)^2 + \cdots,$$

$$\left(\frac{b+h}{b}\right)^{1/4} - 1 = {}^1/_3\,\frac{h}{b} - {}^1/_9\left(\frac{h}{b}\right)^2 + {}^5/_{81}\left(\frac{h}{b}\right)^3$$

$$= \frac{h}{3b}\left[1 - \frac{1}{3}\,\frac{h}{b} + \frac{5}{27}\left(\frac{h}{b}\right)^2\right]$$

setzen läßt, und nun

$$Q = F\sqrt{2g\frac{p_1}{\gamma_1}\cdot\frac{h}{b}\left[1 + \frac{1}{3}\,\frac{h}{b} - \frac{1}{9}\left(\frac{h}{b}\right)^2\right]\left[1 - \frac{1}{3}\,\frac{h}{b} + \frac{5}{27}\left(\frac{h}{b}\right)^2\right]}$$

$$= F\sqrt{2g\frac{p_1}{\gamma_1}\cdot\frac{h}{b}\left[1 - \frac{1}{27}\left(\frac{h}{b}\right)^2\right]}$$

$$= F\left[1 - \frac{1}{54}\left(\frac{h}{b}\right)^2\right]\sqrt{2g\frac{p_1}{\gamma_1}\,\frac{h}{b}} \text{ folgt.}$$

Bei Anwendung auf Gebläse-, Wetter- und Lüftungsmaschinen ist $\frac{h}{b} < \frac{1}{2}$, und daher ganz einfach das theoretische Ausflußquantum, gemessen unter dem äußeren Drucke und bei der inneren Temperatur

$$Q = F\sqrt{2g\,\frac{p_1}{\gamma_1}\,\frac{h}{b}}$$

$$= 89{,}39\,F\sqrt{2g(1 + \delta\tau)\frac{h}{b}} = 396\,F\sqrt{(1 + \delta\tau)\frac{h}{b}} \text{ Cubikm.}$$

$$= 159{,}6\,F\sqrt{2g(1 + \delta\tau)\frac{h}{b}} = 1261\,F\sqrt{(1 + \delta\tau)\frac{h}{b}} \text{ Cubikfuß.}$$

Beispiel. Für den im Beispiel zu §. 459 behandelten Fall, wo $b = 27{,}2$ und $h = 5$ Zoll, ferner $\tau = 120^0$ und $F = \frac{\pi d^2}{4} = 0{,}01227$ Quadratfuß ist, hat man nach der letzten Formel die Ausflußmenge, gemessen unter dem äußeren Drucke:

$$Q = 1261\,F\sqrt{1{,}4404\cdot\frac{5}{27{,}2}} = 1261\,F\sqrt{0{,}2648}$$
$$= 648{,}9\,F = 648{,}9\cdot 0{,}01227 = 7{,}962 \text{ Cubikfuß,}$$

während oben (§. 459) nach der Wasserformel, $Q = 8{,}665$ Cubikfuß gefunden wurde, und die logarithmische Formel in §. 460,

$$Q = 1261\,F\sqrt{1{,}4404\,Ln.\frac{32{,}2}{27{,}2}} = 1261\,F\sqrt{0{,}2431}$$
$$= 621{,}7 \,.\, 0{,}01227 = 7{,}628 \text{ Cubikfuß giebt.}$$

Ausfluss der bewegten Luft. Die gefundenen Ausflußformeln §. 463 setzen voraus, daß die Pressung p oder der Manometerstand h an einer Stelle gemessen worden sei, wo die Luft in Ruhe befindlich ist, oder eine sehr schwache Bewegung hat; mißt man aber p_1 oder h_1 an einem Orte, wo die Luft in Bewegung ist, communicirt z. B. das Manometer M_1 mit der in einer Leitungsröhre CF, Fig. 795 (a. f. S.), befindlichen Luft, so hat

man bei der Bestimmung der Ausflußgeschwindigkeit auch noch die lebendige Kraft der ankommenden Luft zu berücksichtigen. Ist nun c die Geschwindigkeit der vor der Manometermündung vorbeigehenden Luft, so hat man demnach zu setzen:

$$Q_1 \gamma_1 \cdot \frac{v^2}{2g} = Q_1 \gamma_1 \cdot \frac{c^2}{2g} + 3\, Q_1 p_1 \left[1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{1/3}\right].$$

Bezeichnet F den Querschnitt der Mündung und G den der Röhre oder des an der Manometermündung vorbeigehenden Stromes, so ist das ausströmende Luftquantum $Q_1 \gamma_1 = G c \gamma_1 = F v \gamma_2$, daher folgt

$$\frac{c}{v} = \frac{F \gamma_2}{G \gamma_1} = \frac{F}{G} \left(\frac{p}{p_1}\right)^{2/3} \text{ und}$$

$$Q_1 \gamma_1 \left[1 - \left(\frac{F}{G}\right)^2 \left(\frac{p}{p_1}\right)^{4/3}\right] \frac{v^2}{2g} = 3\, Q_1 p_1 \left[1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{1/3}\right],$$

und die in Frage stehende Ausflußgeschwindigkeit:

$$v = \sqrt{\frac{2g \dfrac{3 p_1}{\gamma_1} \left[1 - \left(\dfrac{p}{p_1}\right)^{1/3}\right]}{1 - \left(\dfrac{F}{G}\right)^2 \left(\dfrac{p}{p_1}\right)^{4/3}}},$$

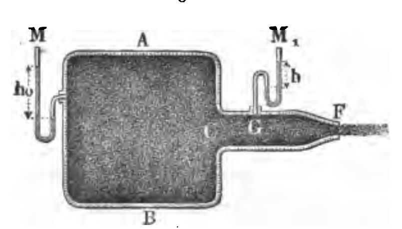
oder annähernd, wenn p_1 nicht viel größer als p ist,

$$v = \sqrt{\frac{2g \dfrac{3 p_1}{\gamma_1} \left[1 - \left(\dfrac{p}{p_1}\right)^{1/3}\right]}{1 - \left(\dfrac{F}{G}\right)^2}}$$

$$= 2185 \sqrt{\frac{(1 + \delta \tau) \left[1 - \left(\dfrac{p}{p_1}\right)^{1/3}\right]}{1 - \left(\dfrac{F}{G}\right)^2}} \text{ Fuß.}$$

Es stellt sich also auch hier, genau wie beim Ausflusse des Wassers aus Gefäßen, die Ausflußgeschwindigkeit um so größer heraus, je größer das Verhältniß $\frac{F}{G}$ zwischen dem Querschnitte der Mündung und dem der Röhre oder des ankommenden Luftstromes ist. Man ersieht auch hieraus, daß unter übrigens gleichen Verhältnissen der Manometerstand p_1 um so kleiner ausfällt, je enger die Leitungsröhre oder je größer die Geschwindigkeit der durch sie fortgeführten Luft ist.

Fig. 795.



Bezeichnet p_0 die Spannung im Windreservoir, wo die Luft noch in Ruhe ist, so hat man auch:

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{3p_1}{\gamma_1}\left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{1/3}\right]$$

und wenn man aus beiden Gleichungen v eliminirt, so ergiebt sich

$$\frac{1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{1/3}}{1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{1/3}} = 1 - \left(\frac{F}{G}\right)^2 \left(\frac{p}{p_1}\right)^{4/3}, \text{ annähernd } = 1 - \left(\frac{F}{G}\right)^2.$$

Ist b der äußere Barometer- und h der innere Manometerstand, sowie F der Inhalt der Ausflußöffnung, so hat man schließlich das theoretische Ausflußquantum, gemessen unter der Dichtigkeit

$$\gamma = \left(\frac{p}{p_1}\right)\gamma_1 = \frac{b\gamma_1}{b+h}$$

$$Q = F\sqrt{\frac{2g\frac{p_1}{\gamma}\frac{h}{b}}{1-\left(\frac{F}{G}\right)^2}} = 159{,}6\,F\sqrt{\frac{2g(1+\delta\tau)\frac{h}{b}}{1-\left(\frac{F}{G}\right)^2}}$$

$$= 1261\,F\sqrt{\frac{(1+\delta\tau)\frac{h}{b}}{1-\left(\frac{F}{G}\right)^2}}.$$

Beispiel. Ein auf einer $3\frac{1}{2}$ Zoll weiten Windleitung sitzendes Quecksilbermanometer steht auf $2\frac{1}{2}$ Zoll, während der Wind am Ende der Röhre durch eine runde, 2 Zoll weite Mündung ausströmt; mit welcher Geschwindigkeit findet dieses Ausströmen statt, vorausgesetzt, daß der äußere Barometerstand $27\frac{1}{2}$ Zoll und die Temperatur der Luft in der Windleitung 10 Grad beträgt?

Es ist hier

$$\sqrt{1+\delta\tau} = \sqrt{1{,}0367} = 1{,}018,\ \sqrt{\frac{h}{b}} = \sqrt{5/55} = \sqrt{1/11} = 0{,}3015,$$

sowie

$$F = \pi r^2 = 3{,}141 : 144 = 0{,}02181 \text{ und}$$

$$\sqrt{1-\left(\frac{F}{G}\right)^2} = \frac{\sqrt{49^2 - 16^2}}{49} = \frac{46{,}314}{49} = 0{,}9452,$$

daher folgt die Ausflußmenge

$$Q = 1261\,F \cdot \frac{1{,}018 \cdot 0{,}3015}{0{,}9452} = 409{,}5\,F = 8{,}931 \text{ Cubikfuß}.$$

Für die entsprechende Spannung p_0 im Luftreservoir ist:

$$1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{1/3} = \left[1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{1/3}\right] : \left[1 - \left(\frac{F}{G}\right)^2\right] = \left(1 - \sqrt[3]{11/12}\right) : 0{,}9452^2$$

$$= \frac{0{,}0287}{0{,}8934} = 0{,}03212, \text{ daher}$$

$$\sqrt[3]{\frac{p}{p_0}} = 0{,}90788 \text{ und } p_0 = 1{,}103\,p, \text{ sowie auch } b + h_0 = 1{,}103\,b,$$

und folglich der Manometerstand im Reservoir:

$$h_0 = 0{,}103\,b = 0{,}103\,.\,27{,}5 = 2{,}83 \text{ Zoll.}$$

§. 464 **Ausflusscoefficienten.** Die Contractionserscheinungen, welche wir beim Ausflusse des Wassers aus Gefäßen kennen gelernt haben, finden sich auch beim Ausströmen der Luft aus Gefäßen vor. Ist die Ausflußöffnung in einer dünnen Wand ausgeschnitten, so hat der durch sie gehende Luft- oder Windstrahl einen kleineren Querschnitt als die Mündung selbst, und es ist deshalb auch die effective Ausflußmenge Q_1 kleiner als das theoretische Ausflußquantum Q oder das Product Fv aus Querschnitt F der Mündung und theoretischen Geschwindigkeit v. Diese Verminderung der Ausflußmenge hat, wie man am ausströmenden Rauch beobachten kann, hauptsächlich ihren Grund in der Contraction des Luftstrahles, und wir können daher auch, wie bei den Wasserstrahlen (s. §. 406), das Verhältniß $\alpha = \frac{F_1}{F}$ zwischen dem Querschnitte F_1 des Luftstrahles und dem Querschnitte F der Mündung

den Contractionscoefficienten,

ferner das Verhältniß $\varphi = \frac{v_1}{v}$ zwischen der effectiven Ausströmungsgeschwindigkeit v_1 und der theoretischen Ausflußgeschwindigkeit v (s. §. 408)

den Geschwindigkeitscoefficienten,

und das Verhältniß $\mu = \frac{Q_1}{Q} = \frac{F_1 v_1}{F v} = \alpha\varphi$ der wirklichen Ausflußmenge Q_1 zur theoretischen Ausflußmenge Q

den Ausflußcoefficienten der ausströmenden Luft

nennen.

Jedenfalls ist bei dem Ausflusse der Luft durch eine Mündung in der dünnen ebenen Wand wie bei dem des Wassers der Geschwindigkeitscoefficient φ nahe = Eins, und daher auch, so lange als besondere Messungen der Luftstrahlen nicht vorgenommen worden sind, der Ausflußcoefficient $\mu = \alpha\varphi$ der Luft dem Contractionscoefficienten α gleich zu setzen. Die älteren Versuche, welche über den Ausfluß der Luft durch Mündungen in der dünnen Wand angestellt worden sind, weichen sehr von einander ab. Die von Buff nach der Wasserformel berechneten Versuche von Koch geben für Kreismündungen von 3 bis 6 Linien Durchmesser, bei 0,2 bis 6,2 Fuß Wassermanometerhöhe, $\mu = 0{,}60$ bis $0{,}50$, dagegen liefern die hiernach berechneten Versuche von d'Aubuisson bei 0,027 bis 0,144 Meter Wassermanometerhöhe an Kreismündungen von 1 bis 3 Centimeter Durchmesser, $\mu = 0{,}65$ bis $0{,}64$. Ferner fand

Poncelet durch die Berechnung der Pecqueur'schen Versuche nach derselben Formel für eine Mündung von 1 Centimeter Durchmesser, unter dem Ueberdrucke von 1 Atmosphäre, also 10 Meter Höhe Wassersäule, $\mu = 0,563$, und für eine solche von 1,5 Centimeter Weite, $\mu = 0,566$. Die in großer Ausdehnung angestellten, und mittels der letzten Ausflußformel

$$Q = F\left[1 - {}^1/_{54}\left(\frac{h}{b}\right)^2\right]\sqrt{2g\frac{p_1}{\gamma_1}\frac{h}{b}}$$

berechneten Versuche des Verfassers haben folgende Resultate geliefert.

1) bei der Mündungsweite $d = 1$ Centimeter, und dem mittleren Pressungsverhältnisse:

$\frac{p_1}{p} = \frac{b+h}{b} =$	1,05	1,09	1,43	1,65	1,89	2,15
$\mu =$	0,555	0,589	0,692	0,724	0,754	0,788

2) bei der Mündungsweite $d = 2,14$ Centimeter, für

$\frac{b+h}{b} =$	1,05	1,09	1,36	1,67	2,01
$\mu =$	0,558	0,573	0,634	0,678	0,723

3) bei der Mündungsweite $d = 1,725$ Centimeter, für

$\frac{b+h}{b} =$	1,08	1,37	1,63
$\mu =$	0,563	0,631	0,665

4) bei der Mündungsweite $d = 2$ Centimeter, für

$\frac{b+h}{b} =$	1,08	1,39
$\mu =$	0,578	0,641

Es wächst also hiernach der Contractionscoefficient beim Ausflusse durch eine Mündung in der dünnen Wand ansehnlich mit der Druckhöhe. Bei Anwendung der Wasserformel wird aber diese Veränderlichkeit bedeutend herabgezogen; diese Formel giebt μ nahe $\sqrt{\frac{p}{p_1}}$, z. B. für $\frac{p_1}{p} = 2$;

$\sqrt{1/2} = 0,707$ mal so groß als die letzte Formel. Nach der ersten Tabelle ist z. B. für $d = 1$, und $\frac{p_1}{p} = 2$, $\mu = \frac{0,754 + 0,788}{2} = 0,771$, und daher nach der Wasserformel $\mu = 0,707 \,.\, 0,771 = 0,555$, also sehr nahe denselben Werth, wie Poncelet gefunden hat.

Bei dem Ausfluß durch eine Kreismündung von 1 Centimeter Durchmesser in einer conisch convergenten Wand von 100 Grad Convergenz wurde für

$\frac{b+h}{b} =$	1,31	1,66
$\mu =$	0,752	0,793

gefunden.

Ebenso bei einer solchen Mündung in der conisch divergenten Wand von 100 Grad Divergenz, für

$\frac{b+h}{b} =$	1,30	1,66
$\mu =$	0,589	0,663

§. 465 Die Veränderlichkeit des Contractionscoefficienten $\alpha = \mu$ für den Ausfluß der Luft durch eine Mündung in der dünnen Wand, erstreckt sich der bekannten Formel

$$\mu = \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2}} \text{ (s. §. 422)}$$

zufolge auf den Ausfluß durch kurze cylindrische Ansatzröhren. Nach den oben angeführten Versuchen von Koch ist z. B. für solche Röhren von 3 bis 4 Linien Weite und 4- bis 6facher Länge, bei 0,3 bis 6,2 Fuß Wassermanometerhöhe, $\mu = 0,74$ bis 0,72, wogegen d'Aubuisson für solche Röhren von 1 bis 3 Centimeter Weite und der 3- bis 4fachen Länge, bei 0,027 bis 0,141 Meter Wasserbarometerstand, $\mu = 0,92$ bis 0,93 und Poncelet für cylindrische Röhren von 1 Centimeter Weite und der $2^1/_2$- bis 10fachen Weite, bei dem doppelten Atmosphärendrucke, $\mu = 0,632$ bis 0,650 gefunden hat.

Die vom Verfasser angestellten Versuche haben dagegen auf folgende Resultate geführt:

1) Eine kurze cylindrische Ansatzröhre von 1 Centimeter Weite und 3 Centimeter Länge, gab für

$\frac{b+h}{b} =$	1,05	1,10	1,30
$\mu =$	0,730	0,771	0,830

2) Eine solche Röhre von 1,414 Centimeter Weite und der dreifachen Länge, führte für

$\frac{b+h}{b} =$	1,41	1,69
auf $\mu =$	0,813	0,822

3) Eine solche Röhre von 2,44 Centimeter Weite und der dreifachen Länge, gab für

$$\frac{b+h}{b} = 1,74;\ \mu = 0,833.$$

Die Zunahme des Ausflußcoefficienten beim Wachsen der Pressung ist durch das gleichzeitige Wachsen des Contractionscoefficienten erklärlich.

Die Ansatzröhre (1) mit schwach abgerundeter Einmündung gab im Mittel den Ausflußcoefficienten $\mu = 0,927$, also viel größer als bei einer solchen Röhre ohne Abrundung.

4) Ein kurzes innen gut abgerundetes Mundstück von 1 Centimeter Länge und 1,6 Centimeter Länge gab für

$\frac{b+h}{b} =$	1,24	1,38	1,59	1,85	2,14
$\mu =$	0,979	0,986	0,965	0,971	0,978

Da dieser Coefficient, wie erforderlich, der Einheit sehr nahe kommt, so ist dadurch der Vorzug der Ausflußformel

$$Q = \mu F \sqrt{2g\frac{p_1}{\gamma}\cdot\frac{b}{p}}$$

vor den anderen Formeln dargethan.

Die ältere Formel giebt natürlich bei hohem Drucke viel kleinere Werthe, und dagegen die logarithmische Formel (s. §. 460) viel größere, die Einheit sogar übersteigende Werthe von μ.

Eine kurze conische Röhre mit innerer Abrundung gab ziemlich

dieselben Werthe für μ, dagegen eine kurze conische Röhre ohne Abrundung von 1 Centimeter Mündungsweite, 4 Centimeter Länge und 7° 9′ Convergenz für

$\frac{b+h}{b} =$	1,08	1,27	1,65
$\mu =$	0,910	0,922	0,964

Nach Buff und Koch ist für eine solche Röhre von 2,72 Linien äußerer Weite und 6° Seitenconvergenz, bei 0,3 bis 6,2 Fuß Wassermanometerhöhe, $\mu = 0,73$ bis $0,85$, und nach d'Aubuisson, bei einer ähnlichen Röhre von 1,5 Centimeter Mündungsweite, unter 0,027 bis 0,144 Meter Wasserdruckhöhe, $\mu = 0,94$, bei Zugrundelegung der älteren oder sogenannten Wasserformel.

Das vollständige längere Düsenmundstück AC, Fig. 736 aus §. 434, d. i. eine conische Röhre, von 14,5 Centimeter Länge, 1 Centimeter Weite in der Ausmündung, und 3,8 Weite in der übrigens gut abgerundeten Einmündung, bei nahe 6° Seitenconvergenz gab für

$\frac{b+h}{b} =$	1,08	1,45	2,16
$\mu =$	0,932	0,960	0,984

Durch Versuche über das Einströmen der Luft in Gefäße fanden die Franzosen Saint-Venant und Wantzel für ein kurzes, inwendig nach einem Viertelkreise abgerundetes Mundstück, nach der neueren Formel berechnet, $\mu = 0,98$, und für eine Mündung in der dünnen Wand, $\mu = 0,61$.

Sind die Pressungen klein, ist, wie z. B. bei der gewöhnlichen Gebläseluft, $\frac{h}{b} < {}^1/_6$, so läßt sich dem Vorstehenden zufolge, bei Anwendung der neueren Ausflußformel

$$Q = \mu F \sqrt{2g\frac{p_1}{\gamma}\cdot\frac{b}{h}} = 1261\,\mu F \sqrt{(1 + 0,004\,.\,\tau)\,\frac{h}{b}} \text{ Cubikfuß,}$$

im Mittel setzen:

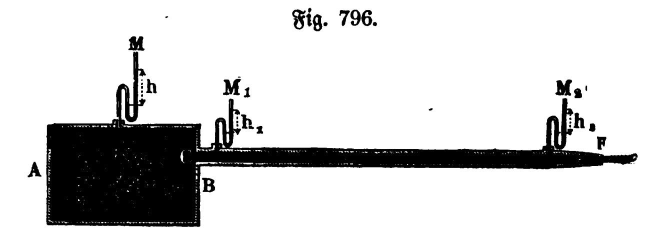
1) für Mündungen in der dünnen Wand, $\mu = 0,56$,
2) für kurze cylindrische Ansatzröhren, $\mu = 0,75$,
3) für ein gut abgerundetes conoidisches Mundstück, $\mu = 0,98$,
4) für eine conische Röhre von circa 6° Seitenconvergenz, $\mu = 0,92$.

Beispiel. Wenn bei einem Gebläse die Mündungen der beiden conischen Düsen zusammen 3 Quadratzoll Inhalt haben, wenn ferner bei einer Temperatur von 15 Grad der Manometerstand im Regulator 3 Zoll und der äußere Barometerstand $27\frac{1}{2}$ mißt, so läßt sich das effective Ausflußquantum, gemessen unter dem äußeren Drucke, setzen:

$$Q = 1261\,\mu F \sqrt{(1 + 0{,}004\,\tau)\,\frac{b}{h}}$$
$$= 1261\,.\,0{,}92\cdot\frac{3}{144}\sqrt{(1 + 0{,}004\,.\,15)\,\frac{3\,.\,2}{55}} = 24{,}17\sqrt{\frac{1{,}06\,.\,6}{55}}$$
$$= 24{,}17\sqrt{0{,}1156} = 24{,}17\,.\,0{,}34 = 8{,}22 \text{ Cubikfuß}.$$

Reibungscoefficient der Luft. Bewegt sich die Luft durch eine lange Röhre CF, Fig. 796, so hat sie einen Reibungswiderstand wie das §. 466

Fig. 796.



Wasser zu überwinden, auch läßt sich dieser Widerstand durch die Höhe einer Luftsäule messen, welche der Ausdruck:

$$z = \zeta\cdot\frac{l}{d}\cdot\frac{v^2}{2g},$$

worin genau, wie bei den Wasserleitungen, l die Länge, d die Weite der Röhre, v die Geschwindigkeit und ζ den durch Versuche zu bestimmenden Widerstandscoefficienten der Luft bezeichnen, angiebt.

Die Versuche von Girard über die Bewegung der Luft durch Röhren führen auf den Widerstandscoefficienten $\zeta = 0{,}0256$, und die von d'Aubuisson liefern im Mittel $\zeta = 0{,}0238$, wogegen nach Buff's Versuchen im Mittel $\zeta = 0{,}0375$ zu setzen ist. Dagegen findet wieder Poncelet aus den Ergebnissen der Versuche von Pecqueur bei dem Pressungsverhältnisse $\frac{p_1}{p} = 2$, $\mu = 0{,}0237$.

Die nach der neueren Formel berechneten Versuche des Verfassers gaben folgende Resultate.

1) Eine Messingröhre von 1 Centimeter Weite und 2 Meter Länge gab für Geschwindigkeiten von 25 bis 150 Meter, ζ allmälig abnehmend von 0,027260 bis 0,01482,

2) und eine Glasröhre von derselben Länge bei ziemlich denselben Geschwindigkeiten, lieferte $\zeta = 0{,}02738$ bis 0,01390.

3) Eine Messingröhre von 1,41 Centimeter Weite und 3 Meter Länge, führt r auf $\zeta = 0{,}02578$ bis $0{,}01214$,

4) und eine dergleichen Glasröhre auf $\zeta = 0{,}02663$ bis $0{,}009408$.

5) Eine Zinkröhre von 2,4 Centimeter Weite und 10 Meter Länge gab endlich bei Geschwindigkeiten von 25 bis 80 Meter, $\zeta = 0{,}02303$ bis $0{,}01296$.

Es ist hieraus zu folgern, daß nur bei mäßigen Windgeschwindigkeiten, von circa 25 Meter = 80 Fuß, der Widerstandscoefficient $\zeta = 0{,}024$ gesetzt werden kann, daß er aber immer kleiner und kleiner angenommen werden muß, je größer die Geschwindigkeit des Windes in der Röhre ist.

Annähernd läßt sich auch für Metermaß $\zeta = \frac{0{,}120}{\sqrt{v}}$, und für Fußmaß, $\zeta = \frac{0{,}214}{\sqrt{v}}$ setzen.

Im Ganzen verhält sich also die Luft bei der Bewegung in Röhren ebenso wie das Wasser.

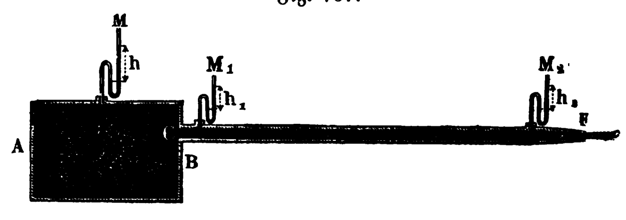
Auch der Widerstand, welchen Kniee und Kröpfe in den Röhren der Bewegung der durchströmenden Luft entgegensetzen, ist ähnlich wie beim Wasser zu beurtheilen.

Bei den Versuchen des Verfassers gab ein rechtwinkeliges Knie von 1 Centimeter Weite, $\zeta = 1{,}61$, und ein solches von 1,41 Centimeter Weite, $\zeta = 1{,}24$; ferner ein nach einem Kreisquadranten gebogener Kropf gab bei der ersteren Weite, $\zeta = 0{,}485$; und bei der letzteren, $\zeta = 0{,}471$.

§. 467 **Bewegung der Luft in langen Röhren.** Mit Hülfe des Coefficienten ζ des Reibungswiderstandes einer Röhre, wie BF, läßt sich nun auch die Ausflußgeschwindigkeit und Ausflußmenge bei gegebener Länge und Weite derselben u. s. w. bestimmen.

Ist h_2 der Stand des Manometers M_2 am Ende der Röhre CF, Fig. 797, unmittelbar vor dem Mundstück F, dessen Widerstandscoefficient

Fig. 797.



$\zeta_1 = \frac{1}{\mu_1^2} - 1$ sein möge, und bezeichnet d die Weite der Röhre, sowie d_1

die Weite, also $\frac{\pi d_1^2}{4}$ den Inhalt der Mündung F_1, so hat man nach dem Obigen die Ausflußmenge:

$$Q = \mu_1 F_1 \sqrt{\frac{2g \frac{p_1}{\gamma_1} \cdot \frac{h_2}{b}}{1 - \left(\frac{d_1}{d}\right)^4}} = 1261\, \mu_1 \pi \frac{d_1^2}{4} \sqrt{\frac{(1 + \delta \tau) \frac{h_2}{b}}{1 - \left(\frac{d_1}{d}\right)^4}} \text{ Cbkfß.}$$

sowie umgekehrt für den Manometerstand h_2,

$$\frac{p_1}{\gamma_1} \cdot \frac{h_2}{b} = \left[1 - \left(\frac{d_1}{d}\right)^4\right] \cdot \frac{1}{2g} \left(\frac{Q}{\mu F_1}\right)^2.$$

Nun ist aber der Manometerstand am Anfang der Leitung,

$$h_1 = h_2 + \zeta \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g},$$

wenn l die Länge der Röhre zwischen beiden Manometern M_1 und M_2, und v die Geschwindigkeit des Luftstromes in dieser Röhre bezeichnet, daher hat man:

$$\frac{p_1}{\gamma_1} \cdot \frac{h_1}{b} = \left[1 - \left(\frac{d_1}{d}\right)^4\right] \cdot \frac{1}{2g} \left(\frac{Q}{\mu_1 F_1}\right)^2 + \zeta \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}, \text{ oder}$$

$$v = \left(\frac{d_1}{d}\right)^2 v_1, \text{ und } v_1 = \frac{Q}{F_1} \text{ eingeführt,}$$

$$\frac{p_1}{\gamma_1} \cdot \frac{h_1}{b} = \left(\left[1 - \left(\frac{d_1}{d}\right)^4\right] \frac{1}{\mu_1^2} + \zeta \frac{l}{d} \left(\frac{d_1}{d}\right)^4\right) \cdot \frac{1}{2g} \left(\frac{Q}{F_1}\right)^2,$$

und es folgt daher die Ausflußmenge

$$Q = F_1 \sqrt{\frac{2g \frac{p_1}{\gamma_1} \cdot \frac{h_1}{b}}{\left[1 - \left(\frac{d_1}{d}\right)^4\right] \frac{1}{\mu_1^2} + \zeta \frac{l}{d} \left(\frac{d_1}{d}\right)^4}}$$

$$= 1261 \frac{\pi d_1^2}{4} \sqrt{\frac{(1 + \delta \tau) \frac{h_1}{b}}{\left[1 - \left(\frac{d_1}{d}\right)^4\right] \frac{1}{\mu_1^2} + \zeta \frac{l}{d} \left(\frac{d_1}{d}\right)^4}} \text{ Cubikfuß.}$$

Ist endlich der Stand h des Manometers M im Reservoir AB bekannt, so haben wir, wenn wir den Widerstandscoefficienten für den Eintritt bei C durch ζ_0 bezeichnen, und $\frac{1}{\mu_1^2} = 1 + \zeta_1$ einzusetzen, da hier beim Eintritt in die Röhre die Druckhöhe $\zeta_0 \frac{v^2}{2g}$ verloren geht,

$$\frac{p_1}{\gamma_1} \cdot \frac{h}{b} = \left[\left(\zeta_0 + \zeta \frac{l}{d}\right) \left(\frac{d_1}{d}\right)^4 + 1 + \zeta_1\right] \frac{1}{2g} \left(\frac{Q}{F_1}\right)^2,$$

folglich die Ausflußmenge

$$Q = F_1 \sqrt{\frac{2g\frac{p_1}{\gamma_1}\cdot\frac{h}{b}}{\left(\zeta_0 + \zeta\frac{l}{d}\right)\left(\frac{d_1}{d}\right)^4 + 1 + \zeta_1}}$$

$$= 1261\,\frac{\pi d_1^2}{4}\sqrt{\frac{(1 + 0{,}04\,\tau)\,\frac{h}{b}}{\left(\zeta_0 + \zeta\frac{l}{d}\right)\left(\frac{d_1}{d}\right)^4 + 1 + \zeta_1}} \text{ Cubikfuß.}$$

Je nachdem der Einmündungspunkt um s höher oder tiefer liegt als die Ausmündungsstelle, hat man in dem Zähler der Wurzelgröße zu $\frac{p_1}{\gamma_1}\cdot\frac{h}{b}$ noch s zu addiren oder subtrahiren.

Beispiel. In dem Regulator am Kopfe einer 320 Fuß langen und 4 Zoll weiten Windleitung steht das Quecksilbermanometer auf 3,1 Zoll, während der äußere Barometerstand 27,2 Zoll mißt; es ist ferner die Mündungsweite des conisch zusammengezogenen Röhrenendes, $d_1 = 2$ Zoll, und die Temperatur der comprimirten Luft im Regulator, $\tau = 20$ Grad C., welches Windquantum liefert die Leitung?

Es ist hier $(1 + 0{,}004\,\tau)\,\frac{b}{h} = 1{,}08\cdot\frac{3{,}1}{27{,}2} = 0{,}1231$, ferner

$\zeta_0 = \frac{1}{\mu_0^2} - 1 = \frac{1}{0{,}75^2} - 1 = \frac{16}{9} - 1 = \frac{7}{9} = 0{,}778$, sowie

$\zeta_1\,\frac{l}{d} = 0{,}024\,.\,320\,.\,3 = 23{,}04$, $\left(\frac{d_1}{d}\right)^4 = \left(\frac{2}{4}\right)^4 = \frac{1}{16} = 0{,}0625$,

$\zeta_1 = \frac{1}{\mu_1^2} - 1 = \frac{1}{0{,}92^2} - 1 = 0{,}330$, und

$F_1 = \frac{\pi d_1^2}{4} = \frac{\pi}{4}\,(1/6)^2 = \frac{3{,}1416}{144} = 0{,}021817$ Quadratfuß,

daher folgt die gesuchte Windmenge

$$Q = 1261\,.\,0{,}021817\sqrt{\frac{0{,}1231}{(0{,}778 + 23{,}04)\,0{,}0625 + 1{,}330}}$$

$$= 27{,}51\sqrt{\frac{0{,}1231}{1{,}489 + 1{,}330}} = 27{,}51\sqrt{0{,}04367} = 5{,}744 \text{ Cubikfuß.}$$

§. 468 **Ausfluss unter abnehmendem Drucke.** Wenn ein Windreservoir keinen Zufluß erhält, während durch eine Mündung in demselben ununterbrochenes Ausströmen statt hat, so nimmt die Dichtigkeit und Spannung allmälig ab, und es fällt daher auch die Ausflußgeschwindigkeit während des Ausflusses immer kleiner und kleiner aus. In welchem Verhältnisse nun diese Abnahme zur Zeit und zur Ausflußmenge in derselben steht, läßt sich auf folgende Weise ermitteln.

Es sei das Volumen des Reservoirs V, der anfängliche Manometerstand $= h_0$, und der Manometerstand am Ende einer gewissen Zeit t, $= h_1$, sowie der äußere Barometerstand $= b$. Dann ist das auf den äußeren Druck reducirte Luft- oder Windquantum im Reservoir anfangs

$$= \frac{V(b + h_0)}{b}$$

und am Ende der Zeit t

$$= \frac{V(b + h_1)}{b},$$

und folglich das innerhalb der Zeit t ausgeflossene und unter dem äußeren Drucke gemessene Windquantum:

$$V_1 = \frac{V(b + h_0)}{b} - \frac{V(b + h_1)}{b} = \frac{V(h_0 - h_1)}{b}.$$

Nun hat man aber auch

$$V_1 = \mu F t \sqrt{2 g \frac{p_1}{\gamma_1} \cdot \frac{x}{b}},$$

wenn x dem mittleren Manometerstand während der Ausflußzeit t entspricht, daher folgt

$$t = \frac{V(h_0 - h_1)}{\mu F \sqrt{2 g \frac{p_1}{\gamma_1} b x}} = \frac{V(h_0 - h_1)}{\mu F \sqrt{2 g \frac{p_1}{\gamma_1} b}} (x)^{-1/2}.$$

Ferner ist, wenn $h_0 = m\sigma$ und $h_1 = n\sigma$ gesetzt wird, der Mittelwerth

$$(x)^{-1/2} = \frac{(\sigma)^{-1/2}}{m-n} (1^{-1/2} + 2^{-1/2} + \cdots + m^{-1/2}) - (1^{-1/2} + 2^{-1/2} + \cdots + n^{-1/2})$$

$$= \frac{(\sigma)^{-1/2}}{m-n} \left(\frac{m^{1/2}}{1/2} - \frac{n^{1/2}}{1/2}\right) = \frac{2(\sigma)^{-1/2}}{m-n} \left(\sqrt{\frac{h_0}{\sigma}} - \sqrt{\frac{h_1}{\sigma}}\right)$$

$$= \frac{2(\sqrt{h_0} - \sqrt{h_1})}{(m-n)\sigma} = \frac{2(\sqrt{h_0} - \sqrt{h_1})}{h_0 - h_1}$$ (s. Ingenieur S. 88);

daher folgt die gesuchte Ausflußzeit

$$t = \frac{2V(\sqrt{h_0} - \sqrt{h_1})}{\mu F \sqrt{2 g \frac{p_1}{\gamma_1} b}} = \frac{2V}{\mu F \sqrt{2 g \frac{p_1}{\gamma_1}}} \left(\sqrt{\frac{h_0}{b}} - \sqrt{\frac{h_1}{b}}\right).$$

Diese Bestimmung hat übrigens dann nur eine hinreichende Genauigkeit, wenn das Ausflußreservoir (V) groß, oder die Ausflußmündung, sowie die Pressungsdifferenz klein ist, wo die Abkühlung der Luft im Reservoir während des Ausflusses unbedeutend ausfällt.

Beispiel. Der 50 Fuß lange und 5 Fuß weite cylindrische Windregulator eines Gebläses ist mit Wind angefüllt, dessen Manometerstand $h = 10$ Zoll und Thermometerstand 6^0 beträgt. Wenn nun der Wind durch eine 1 Zoll weite runde Mündung in einen Raum ausströmt, dessen Barometerstand 27 Zoll beträgt, so

entsteht die Frage, in welcher Zeit sinkt der Manometerstand auf 7 Zoll herab, und welches ist die entsprechende Ausflußmenge?

Das Volumen des Regulators oder Kessels ist:

$$V = \frac{\pi}{4} \cdot 5^2 . 50 = 1250 \cdot \frac{\pi}{4} = 981{,}75 \text{ Cubikfuß, ferner}$$

$$\sqrt{\frac{h_0}{b}} - \sqrt{\frac{h_1}{b}} = \sqrt{\frac{10}{27}} - \sqrt{\frac{7}{27}} = 0{,}09942,$$

$$\sqrt{2\, g\, \frac{p_1}{\gamma_1}} = 1261 \sqrt{1 + 0{,}00367 . \tau} = 1261 \sqrt{1{,}02202} = 1275,$$

und

$$F = \frac{\pi}{4} (1/_{12})^2 = \frac{\pi}{576} = 0{,}005454 \text{ Quadratfuß.}$$

Setzt man nun noch den Ausflußcoefficienten $\mu = 0{,}95$, so folgt die in Frage stehende Ausflußzeit:

$$t = \frac{2 . 981{,}75 . 0{,}09942}{0{,}95 . 0{,}005454 . 1275} = \frac{97{,}61}{3{,}303} = 29{,}55 \text{ Secunden.}$$

Anmerkung. Eine allgemeinere Theorie des Ausflusses der Luft und des Wasserdampfes wird im zweiten Theile abgehandelt.

Schlußanmerkung. Versuche über den Ausfluß der Luft sind angestellt worden von Young, Schmidt, Lagerhjelm, Koch, d'Aubuisson, Buff, und in neuerer Zeit von Saint-Venant, Wantzel und Pecqueur. In Betreff der Versuche von Young und Schmidt ist nachzusehen in Gilbert's Annalen Bd. 22, 1801, und Bd. 6, 1820, und in Poggendorff's Annalen, Bd. 2, 1824, in Betreff derjenigen von Koch und Buff aber in den Studien des Götting'schen Vereines bergmännischer Freunde, Bd. 1, 1824; Bd. 3, 1833; Bd. 4, 1837 und Bd. 5, 1838; ferner in Poggendorff's Annalen, Bd. 27, 1836 und Bd. 40, 1837. Nächstdem auch in Gerstner's Mechanik, Bd. 3, und in Hülsse's allgemeiner Maschinenencyclopädie, Artikel „Ausfluß". Die Lagerhjelm'schen Versuche werden behandelt in dem schwedischen Werke Hydrauliska Försök af Lagerhjelm, Forselles och Kallstenius, 1 Delen, Stockholm, 1818. Die Versuche d'Aubuisson's lernt man kennen in den Annales des Mines, Tome 11, 1825; Tome 13, 1826; Tome 34, 1827, dann aber auch in d'Aubuisson's Traité d'Hydraulique. Ueber die Versuche von Saint-Venant und Wantzel siehe Comptes rendus hebd. des séances de l'Académie des sciences, à Paris 1839. Von den neuesten in Frankreich angestellten Versuchen handelt Poncelet in einer Note sur les expériences de M. Pecqueur relatives à l'écoulement de l'air dans les tubes etc. der Comptes rendus und hiervon im Auszuge das polytechnische Centralblatt, Bd. 6, 1845. Aus diesen Versuchen folgert Poncelet, daß die Luft bei ihrem Ausflusse denselben Gesetzen folge, wie das Wasser. Die meisten dieser Versuche sind mit sehr engen Mündungen angestellt worden, weshalb sie wohl schwerlich den Ansprüchen der Praxis Genüge leisten. Leider findet auch unter den Ergebnissen aller dieser Versuche nicht die erwünschte Uebereinstimmung statt, namentlich weichen auch die von d'Aubuisson gefundenen Ausflußcoefficienten von denen, welche sich aus den Koch'schen berechnen lassen, bedeutend ab. Vergleichende Versuche über das Aus- und Einströmen der Luft und über den Ausfluß des Wassers rapportirt des Verfassers Experimental-Hydraulik. Die Resultate der neuesten, im größeren Maßstabe vom Verfasser ausgeführten Versuche über den Ausfluß der Luft werden im 5. Bande des Civilingenieurs mitgetheilt.

Siebentes Capitel.

Von der Bewegung des Wassers in Canälen und Flüssen.

§. 469 **Fliessende Wasser.** Die Lehre von der Bewegung des Wassers in Canälen und Flüssen macht den zweiten Haupttheil der Hydraulik aus. Das Wasser fließt entweder in einem natürlichen oder in einem künstlichen Bette (franz. lit; engl. bed). Im ersten Falle bildet es Ströme, Flüsse, Bäche, im zweiten Canäle, Gräben und Gerinne. Bei der Theorie der Bewegung der fließenden Wasser kommt auf diesen Unterschied nichts, oder nur wenig an.

Das Flußbett besteht aus dem Grundbette oder der Sohle (franz. font du lit; engl. bottom of the channel), und aus den beiden Ufern (franz. bords; engl. shores). Durch eine Ebene winkelrecht gegen die Bewegungsrichtung des fließenden Wassers ergiebt sich der Querschnitt (franz. section; engl. perpendicular-section) desselben. Der Umfang desselben ist das Quer- oder Breitenprofil, welches wieder aus dem Wasser- und dem Luftprofile besteht. Eine Verticalebene in der Richtung des fließenden Wassers giebt den Längendurchschnitt und das Längenprofil (franz. profil; engl. profile) desselben. Unter Abhang (franz. pente; eng. declivity, slope) eines fließenden Wassers versteht man den Neigungswinkel seiner Oberfläche gegen den Horizont. Um diesen auf eine bestimmte Länge eines fließenden Wassers anzugeben, dient das Gefälle (franz. chute; engl. fall), welches der Verticalabstand der beiden Endpunkte im Wasserspiegel einer bestimmten Flußstrecke ist. Rösche ist das Gefälle für die Längenerstreckung $= 1$. Für die Flußstrecke $AD = l$, Fig. 798, ist BC das Grundbette, $DH = h$ das Gefälle und der Winkel $DAH = \delta$ der Abhang; die Rösche aber ist

Fig. 798.



$$sin.\,\delta = \frac{h}{l},\ \text{oder annähernd},\ \delta = \frac{h}{l}.$$

Anmerkung. Das Gefälle der Bäche und Flüsse ist sehr verschieden. So hat z. B. die Elbe auf eine deutsche Meile Erstreckung von Hohenelbe bis Podiebrad, 57 Fuß, von da bis Leitmeritz 9 Fuß, von da bis Mühlberg im Mittel 5,8 und von Mühlberg bis Magdeburg, 2,5 Fuß Gefälle. Gebirgsbäche haben auf die Meile ein Gefälle von 40 bis 400 Fuß. Näheres hierüber siehe: „Vergleichende hydrographische Tabellen u. s. w. von Stranz.“ Canäle oder andere künstliche Wasserleitungen erhalten viel kleinere Gefälle. Hier ist die Rösche meistens unter 0,001, oft 0,0001 und noch kleiner. Mehr hierüber im zweiten Theile.

§. 470. **Verschiedene Geschwindigkeiten eines Querprofiles.** Die Geschwindigkeit des Wassers in einem und demselben Querprofile ist an verschiedenen Stellen sehr verschieden. Die Adhäsion des Wassers an dem Bette und der Zusammenhang der Wassertheile unter einander bewirken, daß die den Bettwänden näher liegenden Wassertheile in ihrer Bewegung mehr aufgehalten werden und daher langsamer fließen, als die entfernteren. Aus diesem Grunde nimmt die Geschwindigkeit von der Oberfläche nach dem Bette zu ab, und es ist dieselbe am Boden und nahe den Ufern am kleinsten. Die größte Geschwindigkeit befindet sich bei geraden Flußstrecken meist in der Mitte oder an derjenigen Stelle in der freien Oberfläche des Wassers, wo es die größte Tiefe hat. Man nennt diejenige Stelle, wo das Wasser die größte Geschwindigkeit hat, den Stromstrich, und die tiefste Stelle im Bette die Stromrinne.

Bei Krümmungen ist der Stromstrich in der Regel nahe dem concaven Ufer.

Die mittlere Geschwindigkeit des Wassers innerhalb eines Querprofiles ist nach §. 396:

$$c = \frac{Q}{F} = \frac{\text{Wasserquantum pr. Secunde}}{\text{Inhalt des Querschnittes}}.$$

Außerdem läßt sich die mittlere Geschwindigkeit auch noch aus den Geschwindigkeiten c_1, c_2, c_3 u. s. w. der einzelnen Theile des Querprofiles und aus den Inhalten F_1, F_2, F_3 u. s. w. der letzteren berechnen. Es ist nämlich:

$$Q = F_1 c_1 + F_2 c_2 + F_3 c_3 + \cdots,$$

und daher auch:

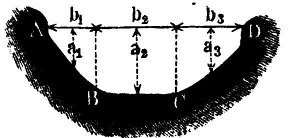
$$c = \frac{F_1 c_1 + F_2 c_2 + \cdots}{F_1 + F_2 + \cdots}.$$

Außer der mittleren Geschwindigkeit führt man auch die mittlere Wassertiefe, also diejenige Tiefe a ein, welche ein Querprofil an allen Stellen haben müßte, damit es ebenso viel Inhalt erhielte, als es bei den veränderlichen Tiefen a_1, a_2, a_3 u. s. w. wirklich hat. Es ist also hiernach:

$$a = \frac{F}{b} = \frac{\text{Inhalt des Querschnittes}}{\text{Breite des Querschnittes}}.$$

Sind die den einzelnen Breitentheilen b_1, b_2, b_3 u. s. w. entsprechenden mittleren Tiefen a_1, a_2, a_3 u. s. w., Fig. 799, so hat man:

Fig. 799.



$$F = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots,$$

und daher auch:

$$a = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots}{b_1 + b_2 + \cdots}.$$

Endlich ist die mittlere Geschwindigkeit auch

$$c = \frac{a_1 b_1 c_1 + a_2 b_2 c_2 + \cdots}{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots},$$

und bei gleicher Größe der Theile b_1, b_2 u. s. w.:

$$c = \frac{a_1 c_1 + a_2 c_2 + \cdots}{a_1 + a_2 + \cdots}.$$

Ein Fluß oder Bach ist im **Beharrungszustande** (franz. permanence; engl. permanency), wenn durch jeden seiner Querschnitte in gleicher Zeit eine gleiche Wassermenge fließt, wenn also Q oder das Product Fc aus dem Inhalte des Querprofiles und aus der mittleren Geschwindigkeit auf die ganze Flußstrecke eine unveränderliche Zahl ist. Hieraus folgt nun das einfache Gesetz: **bei der permanenten Bewegung des Wassers verhalten sich die mittleren Geschwindigkeiten innerhalb zweier Querprofile umgekehrt wie die Inhalte dieser Profile.**

Beispiele. 1) An dem Querprofile $ABCD$, Fig. 799, eines Canales hat man gefunden:
Breitentheile:

$$b_1 = 3{,}1 \text{ Fuß},\ b_2 = 5{,}4 \text{ Fuß},\ b_3 = 4{,}3 \text{ Fuß},$$

mittlere Tiefen:

$$a_1 = 2{,}5 \text{ Fuß},\ a_2 = 4{,}5 \text{ Fuß},\ a_3 = 3{,}0 \text{ Fuß},$$

entsprechende mittlere Geschwindigkeiten:

$$c_1 = 2{,}9 \text{ Fuß},\ c_2 = 3{,}7 \text{ Fuß},\ c_3 = 3{,}2 \text{ Fuß},$$

daher läßt sich setzen der Inhalt dieses Profiles:

$$F = 3{,}1 . 2{,}5 + 5{,}4 . 4{,}5 + 4{,}3 . 3{,}0 = 44{,}95 \text{ Quadratfuß},$$

ferner die Wassermenge:

$$Q = 3{,}1 . 2{,}5 . 2{,}9 + 5{,}4 . 4{,}5 . 3{,}7 + 4{,}3 . 3{,}0 . 3{,}2 = 153{,}665 \text{ Cubikfuß},$$

und die mittlere Geschwindigkeit:

$$c = \frac{Q}{F} = \frac{153{,}665}{44{,}95} = 3{,}419 \text{ Fuß}.$$

2) Wenn ein Graben pr. Secunde 4,5 Cubikfuß Wasser mit einer mittleren Geschwindigkeit c von 2 Fuß fortführen soll, so hat man ihm ein Querprofil von $\frac{4{,}5}{2} = 2{,}25$ Quadratfuß Inhalt zu geben.

3) Wenn ein und derselbe Fluß an einer Stelle bei 560 Fuß Breite und 9 Fuß mittlerer Tiefe eine mittlere Geschwindigkeit von $2^1/_4$ Fuß hat, so wird er an einer anderen Stelle, bei 320 Fuß Breite und 7,5 Fuß mittlerer Tiefe, die mittlere Geschwindigkeit:

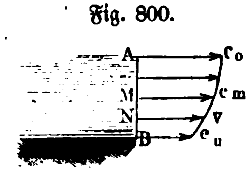
$$c = \frac{560 . 9}{320 . 7{,}5} \cdot 2{,}25 = \frac{567}{120} = 4{,}725 \text{ Fuß}$$

haben.

Mittlere Geschwindigkeit. Wenn man die Wassertiefe an irgend einer Stelle eines fließenden Wassers in gleiche Theile theilt, und die entsprechenden Geschwindigkeiten als Ordinaten aufträgt, so erhält man eine sogenannte **Stromgeschwindigkeitsscala** AB, Fig. 800. Obwohl es als ausgemacht anzusehen ist, daß das Gesetz dieser Scala oder der Geschwindig- §. 471

keitsveränderung durch irgend eine Curve, wie z. B. nach Gerstner, durch eine Ellipse u. s. w. ausgedrückt wird, so läßt sich doch auch ohne einen großen Fehler befürchten zu müssen, eine gerade Linie substituiren, oder annehmen, daß die Geschwindigkeit nach der Tiefe gleichmäßig abnehme, weil die Abnahme der Geschwindigkeit nach unten immer nur eine mäßige ist. Aus den Versuchen von Ximenes, Brünnings und Funk ergiebt sich, daß die mittlere Geschwindigkeit in einem Perpendikel

Fig. 800.



$$c_m = 0{,}915\, c_0$$

ist, wenn c_0 die Geschwindigkeit an der Oberfläche oder die Maximalgeschwindigkeit bezeichnet. Es nimmt also hiernach die Geschwindigkeit von oben bis zur Mitte M um

$$c_0 - c_m = (1 - 0{,}915)\, c_0 = 0{,}085\, c_0$$

ab, und es läßt sich folglich die Geschwindigkeit unten oder am Fußpunkte des Perpendikels,

$$c_u = c_0 - 2 \,.\, 0{,}085\, c_0 = (1 - 0{,}170)\, c_0 = 0{,}83\, c_0$$

setzen. Ist nun die ganze Tiefe $AB = a$, so hat man, bei Annahme einer der geraden Linie entsprechenden Geschwindigkeitsscala für eine Tiefe $AN = x$ unter dem Wasser, die entsprechende Geschwindigkeit:

$$v = c_0 - (c_0 - c_u)\, \frac{x}{a} = \left(1 - 0{,}17\, \frac{x}{a}\right) c_0.$$

Sind ferner noch $c_0, c_1, c_2 \ldots$ die Oberflächengeschwindigkeiten eines ganzen Querprofiles von nicht sehr veränderlicher Tiefe, so hat man die entsprechenden Geschwindigkeiten in der mittleren Tiefe:

$$0{,}915\, c_0,\ 0{,}915\, c_1,\ 0{,}915\, c_2,$$

und daher die mittlere Geschwindigkeit im ganzen Querprofile:

$$c = 0{,}915\, \frac{(c_0 + c_1 + c_2 + \cdots c_n)}{n}.$$

Nehmen wir endlich an, daß die Geschwindigkeit vom Stromstriche aus nach den Ufern zu ebenso abnehme wie nach der Tiefe zu, so können wir wieder die mittlere Oberflächengeschwindigkeit

$$\frac{c_0 + c_1 + \cdots + c_n}{n} = 0{,}915\, c_0$$

setzen, und erhalten so die mittlere Geschwindigkeit im ganzen Querprofile

$$c = 0{,}915 \,.\, 0{,}915 \,.\, c_0 = 0{,}837 \,.\, c_0,$$

d. i. 83 bis 84 Procent der Maximal- oder Stromstrichgeschwindigkeit.

Prony leitet aus den allerdings nur in kleinen Gräben angestellten Versuchen du Buat's und für diese Fälle vielleicht noch genauer

$$c_m = \left(\frac{2,372 + c_0}{3,153 + c_0}\right) c_0 \text{ Meter} = \left(\frac{7,50 + c_0}{9,97 + c_0}\right) c_0 \text{ Fuß}$$

ab. Für mittlere Geschwindigkeiten von 3 Fuß folgt hiernach:

$$c_m = 0,81\, c_0.$$

Fließt das Wasser **nicht frei**, sondern ist es durch eine Verengerung des Querprofiles **gestaut**, so fällt c_m noch größer aus.

Beispiel. Wenn im Stromstriche eines Flusses die Geschwindigkeit des Wassers 4 Fuß und die Tiefe 6 Fuß ist, so hat man die mittlere Geschwindigkeit im entsprechenden Perpendikel:

$$c_m = 0,915 . 4 = 3,66 \text{ Fuß},$$

und die am Boden:

$$= 0,83 . 4 = 3,32 \text{ Fuß};$$

ferner die Geschwindigkeit bei 2 Fuß unter der Oberfläche:

$$v = (1 - 0,17 . {}^2/_6) . 4 = (1 - 0,057) . 4 = 3,772 \text{ Fuß},$$

endlich die mittlere Geschwindigkeit im ganzen Querprofile:

$$c = 0,837 . 4 = 3,348 \text{ Fuß},$$

dagegen nach **Prony**:

$$c = \frac{11,50}{13,97} \cdot 4 = \frac{46}{13,97} = 3,29 \text{ Fuß}.$$

Anmerkung. Ueber diesen und über die nächstfolgenden Gegenstände wird ausführlich gehandelt in der allgemeinen Maschinenencyklopädie, Artikel „Bewegung des Wassers". Neue Versuche und neue Ansichten hierüber findet man in folgender Schrift: **Lahmeyer**, Erfahrungsresultate über die Bewegung des Wassers in Flußbetten und Canälen, Braunschweig 1845. Nach **Baumgarten's** Beobachtungen (s. Annales des Ponts et Chaussées, Paris 1848, sowie polytechnisches Centralblatt, Nr. 14, 1849) giebt diese Formel bei größeren Geschwindigkeiten (über 1,5 Meter) zu große Werthe, und es ist für solche

$$c_m = \left(\frac{2,372 + c_0}{3,153 + c_0}\right) \cdot 0,8\, c_0 \text{ Meter}$$

zu setzen.

Die Maximalgeschwindigkeit des Wassers kommt immer etwas unterhalb der Oberfläche des Wassers vor, was jedenfalls seinen Grund in dem Widerstande der Luft hat. Von der Stelle der Maximalgeschwindigkeit an nimmt die Geschwindigkeit mit dem Quadrate der Tiefe ab, wonach also die Geschwindigkeitsscala einer Parabel entspricht. Ebenso soll nach **Boileau** (s. dessen Traité sur la mesure des eaux) vom Stromstriche aus die Geschwindigkeit mit dem Quadrate des Abstandes von dieser Stelle abnehmen. Bezeichnet c_0 die Geschwindigkeit im Stromstriche, so ist hiernach die Geschwindigkeit im Horizontalabstande x:

$$c_x = c_0 - \mu x^2,$$

wobei μ eine allerdings bei verschiedenen Flüssen verschiedene Erfahrungszahl bezeichnet.

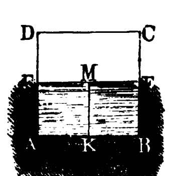
§. 472 **Vortheilhafteste Querprofile.** Der **Widerstand**, welchen das Bette der Bewegung des Wassers in Folge der Adhäsion, Klebrigkeit oder Reibung entgegensetzt, wächst mit der Berührungsfläche zwischen dem Bette und dem Wasser, und also auch mit dem Umfange p des Wasserprofiles oder im Bette

liegenden Theiles vom Querprofile. Da aber durch ein Querprofil um so mehr Wasserfäden hindurchgehen, je größer der Inhalt eines solchen ist, so wächst der Widerstand eines Wasserfadens auch umgekehrt wie der Inhalt, und daher im Ganzen wie der Quotient $\frac{p}{F}$ aus dem Umfange des Wasserprofiles und dem Inhalte F des ganzen Querprofiles.

Damit nun dieser Reibungswiderstand eines fließenden Wassers möglichst klein ausfalle, hat man dem Querprofile diejenige Gestalt zu geben, bei welcher $\frac{p}{F}$ möglichst klein ist, für welche also der Umfang p bei gegebenem Inhalte ein Minimum, oder der Inhalt bei gegebenem Umfange ein Maximum werde. Bei ringsumschlossenen Wasserleitungen, wie z. B. bei Röhren, ist p der ganze Umfang der vom Querprofile gebildeten Figur. Nun hat aber unter allen Figuren von gleicher Seitenzahl allemal die regelmäßige, und unter allen regelmäßigen Figuren wieder diejenige, deren Seitenzahl die größere ist, bei gleichem Inhalte den kleinsten Umfang, daher fällt auch bei ringsumschlossenen Wasserleitungen der Reibungswiderstand um so kleiner aus, je mehr ihr Querprofil einer regelmäßigen Figur sich nähert, und je größer die Seitenzahl derselben ist, und es ist der Kreis, als eine regelmäßige Figur von unendlich vielen Seiten, in diesem Falle das dem kleinsten Reibungswiderstande entsprechende Querprofil. Bei den oben offenen Wasserleitungen ist das Verhältniß ein anderes, weil die obere Seite des Querprofiles frei oder vielmehr nur mit Luft in Berührung ist, die, so lange sie sich in Ruhe befindet, dem Wasser keinen oder nur einen sehr kleinen Widerstand entgegensetzt. Wir müssen also auch bei Beurtheilung dieses Reibungswiderstandes in dem Quotienten $\frac{p}{F}$ die obere Seite oder das sogenannte Luftprofil außer Acht lassen.

Bei Anwendung von Canälen, Gräben und Gerinnen kommen in der Regel nur rectanguläre und trapezoidale Querprofile vor. Eine durch den Mittelpunkt M des Quadrates AC gehende Horizontale EF, Fig. 801, theilt sowohl den Inhalt als auch den Umfang in zwei gleiche Theile, daher bleibt dann das, was für das Quadrat gilt, auch für diese Hälfte richtig, und es entspricht sonach unter allen rectangulären Querprofilen das halbe Quadrat AE, oder dasjenige, welches doppelt so breit als hoch ist, dem kleinsten Reibungswiderstande.

Fig. 801.

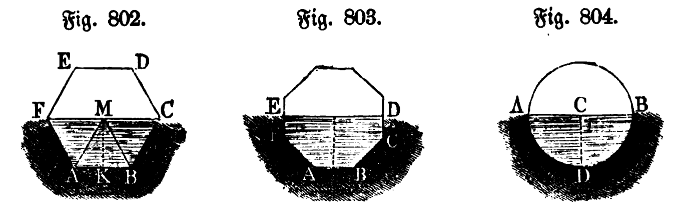


Ebenso wird das regelmäßige Sechseck ACE, Fig. 802, durch eine Horizontale CF in zwei gleiche Trapeze zertheilt, wovon jedes, wie das ganze Sechseck, den größten relativen Inhalt hat, und

es ist folglich unter allen trapezoidalen Querprofilen das halbe regelmäßige Sechseck oder das Trapez $ABCF$ mit Böschungswinkeln $AFM = BCM$, von 60° dasjenige, bei dessen Anwendung der kleinste Reibungswiderstand eintritt.

Ebenso liefern das halbe regelmäßige Achteck ADE, Fig. 803, das halbe regelmäßige Zehneck u. s. w. und endlich der Halbkreis ADB, Fig. 804, unter gegebenen Umständen die vortheilhaftesten Querprofile für

Fig. 802. Fig. 803. Fig. 804.



Canäle. Das trapezoidale oder halbe regelmäßige Sechseck giebt noch einen kleineren Widerstand als das halbe Quadrat oder Rechteck mit dem Seitenverhältniß 1 : 2, weil das Sechseck einen kleineren relativen Umfang hat als das Quadrat. Das halbe regelmäßige Zehneck führt auf eine noch kleinere Reibung, und dem Halbkreise entspricht allerdings das Minimum der Reibung. Nach dem Halbkreise und nach dem Rechtecke werden nur die Profile von Gerinnen aus Holz, Stein oder Eisen gebildet, nach Trapezen hingegen construirt man die Querprofile von ausgegrabenen und gemauerten Canälen. Andere Formen werden wegen Schwierigkeiten in der Ausführung nicht leicht angewendet.

§. 473 In den Fällen, wenn Canäle nicht ausgemauert, sondern in der lockeren Erde oder in Sand ausgegraben werden, ist der Böschungswinkel von 60° zu groß oder die relative Böschung *cotang.* 60° = 0,57735 zu klein, weil die Ufer noch nicht hinreichende Stabilität erhalten; man wird daher genöthigt, trapezoidale Querprofile anzuwenden, bei welchen die Neigung der Seiten gegen die Basis noch kleiner als 60°, vielleicht nur 45° oder sogar noch kleiner ist. Bei einem trapezoidalen Querprofile $ABCD$, Fig. 805 (a. f. S.), welches mit dem halben Quadrate gleichen Umfang und Inhalt hat, ist die relative Böschung = $^4/_3$ und der Böschungswinkel nur 36° 52′. Theilt man die Höhe BE dieses Profiles in drei gleiche Theile, so hat die Basis BC deren 2, die Parallele AD, 10, und jede der Seiten $AB = CD$, = 5 Theile. In vielen Fällen macht man die Böschung = 2, deren Winkel 26° 34′ beträgt, und zuweilen macht man sie noch größer.

Jedenfalls läßt sich der Böschungswinkel $BAE = \theta$, Fig. 806, oder die Böschung $\frac{AE}{BE} = cotang.\ \theta$ als eine gegebene und von der

Natur des Erdreiches, worin der Canal ausgegraben wird, abhängige Größe ansehen, und es sind daher nur noch die Dimensionen des den kleinsten

Fig. 805.

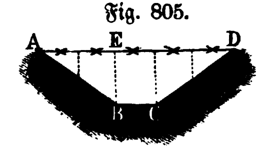
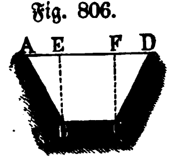


Fig. 806.



Widerstand gebenden Querprofiles zu bestimmen. Setzen wir die untere Breite $BC = b$, die Tiefe $BE = a$ und die Böschung $\frac{AE}{BE} = v$, so erhalten wir für den Umfang des Profiles:

$AB + BC + CD = p = b + 2\sqrt{a^2 + v^2 a^2} = b + 2a\sqrt{1 + v^2}$,

für den Inhalt desselben:

$$F = ab + vaa = a(b + va),$$

und daher umgekehrt:

$$b = \frac{F}{a} - va,$$

und das Verhältniß:

$$\frac{p}{F} = \frac{1}{a} + \frac{a}{F}(2\sqrt{v^2 + 1} - v).$$

Führt man statt a, $a + x$ ein, wo x eine kleine Zahl bezeichnet, so läßt sich

$$\frac{p}{F} = \frac{1}{a + x} + \frac{(a + x)}{F}(2\sqrt{v^2 + 1} - v)$$

$$= \frac{1}{a}\left(1 - \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2}\right) + \frac{a + x}{F}(2\sqrt{v^2 + 1} - v)$$

$$= \frac{1}{a} + \frac{a}{F}(2\sqrt{v^2 + 1} - v) + \left(\frac{2\sqrt{v^2 + 1} - v}{F} - \frac{1}{a^2}\right)x + \frac{x^2}{a^3}$$

setzen.

Damit nun dieser Werth nicht allein für einen positiven, sondern auch für einen negativen Werth von x größer ausfalle, als der erste Werth

$$\frac{1}{a} + \frac{a}{F}(2\sqrt{v^2 + 1} - v),$$

damit also $\frac{p}{F}$ zum Minimum werde, ist nöthig, daß das Glied mit dem Factor x verschwinde, daß also

$$\frac{2\sqrt{v^2 + 1} - v}{F} - \frac{1}{a^2} = 0 \text{ sei},$$

wonach für die gesuchte Canaltiefe a folgt:

$$a^2 = \frac{F}{2\sqrt{v^2 + 1} - v},$$

oder, da $\nu = cotang.\,\theta$ und $\sqrt{\nu^2 + 1} = \frac{1}{sin.\,\theta}$ ist:

$$a^2 = \frac{F\,sin.\,\theta}{2 - cos.\,\theta}.$$

Hiernach ist also die in einem gegebenen Böschungswinkel θ und einem gegebenen Inhalte entsprechende zweckmäßigste Form des Querprofiles bestimmt durch die Formel

$$a = \sqrt{\frac{F\,sin.\,\theta}{2 - cos.\,\theta}} \text{ und } b = \frac{F}{a} - a\,cotang.\,\theta.$$

Es ist folglich die obere Breite AD des Querprofiles:

$$b_1 = b + 2\,\nu\,a = \frac{F}{a} + a\,cotang.\,\theta,$$

und das Verhältniß:

$$\frac{p}{F} = \frac{b}{F} + \frac{2\,a}{F\,sin.\,\theta} = \frac{1}{a} + \frac{(2 - cos.\,\theta)\,a}{F\,sin.\,\theta} = \frac{2}{a}.$$

Beispiel. Welche Dimensionen sind dem Querprofile eines Canales zu geben, dessen Ufer 40° Böschung erhalten sollen, und der bestimmt ist, bei einer mittleren Geschwindigkeit von 3 Fuß ein Wasserquantum Q von 75 Cubikfuß fortzuführen? Es ist

$$F = \frac{Q}{c} = \frac{75}{3} = 25 \text{ Quadratfuß, daher die erforderliche Tiefe:}$$

$$a = \sqrt{\frac{25\,sin.\,40^0}{2 - cos.\,40^0}} = 5\sqrt{\frac{0,64279}{1,23396}} = 3,609 \text{ Fuß, die untere Breite:}$$

$$b = \frac{25}{3,609} - 3,609\;cotang.\,40^0 = 6,927 - 4,301 = 2,626 \text{ Fuß,}$$

die Böschung oder Ausladung der Ufer,

$\nu\,a = a\;cotang.\,\theta = 3,609\,.\,cotang.\,40^0 = 4,301$, die obere Breite

$b_1 = b + 2\,a\;cotang.\,\theta = 6,927 + 4,301 = 11,228$ Fuß,

der Umfang:

$$p = b + \frac{2\,a}{sin.\,\theta} = 2,626 + \frac{7,218}{sin.\,40^0} = 13,855 \text{ Fuß,}$$

und das den Reibungswiderstand bestimmende Verhältniß:

$$\frac{p}{F} = \frac{2}{a} = \frac{2}{3,609} = 0,5542.$$

Bei dem Querprofile in Form eines halben regelmäßigen Rechteckes, wo $\theta = 60^0$ ist, fällt $a = 3,80$ Fuß, $b = 4,39$, $b_1 = 8,78$ und $p = 13,16$ Fuß aus, daher ist

$$\frac{p}{F} = \frac{13,16}{25} = 0,526.$$

Tabelle der vortheilhaftesten Querprofile. Die Dimensionen der, verschiedenen Böschungswinkeln und einem gegebenen Querschnitte entsprechenden, zweckmäßigsten Querprofile giebt folgende Tabelle an. §. 474

Böschungswinkel θ.	Relative Böschung ν.	Dimensionen der Querprofile.				Quotient
		Tiefe a.	Untere Breite b.	Absolute Böschung νa.	Obere Breite $b + 2 \nu a$.	$\frac{p}{F} = \frac{m}{\sqrt{F}}$
90°	0	$0{,}707 \sqrt{F}$	$1{,}414 \sqrt{F}$	0	$1{,}414 \sqrt{F}$	$\frac{2{,}828}{\sqrt{F}}$
60°	0,577	$0{,}760 \sqrt{F}$	$0{,}877 \sqrt{F}$	$0{,}439 \sqrt{F}$	$1{,}755 \sqrt{F}$	$\frac{2{,}632}{\sqrt{F}}$
45°	1,000	$0{,}740 \sqrt{F}$	$0{,}613 \sqrt{F}$	$0{,}740 \sqrt{F}$	$2{,}092 \sqrt{F}$	$\frac{2{,}704}{\sqrt{F}}$
40°	1,192	$0{,}722 \sqrt{F}$	$0{,}525 \sqrt{F}$	$0{,}860 \sqrt{F}$	$2{,}246 \sqrt{F}$	$\frac{2{,}771}{\sqrt{F}}$
36°52′	1,333	$0{,}707 \sqrt{F}$	$0{,}471 \sqrt{F}$	$0{,}943 \sqrt{F}$	$2{,}357 \sqrt{F}$	$\frac{2{,}828}{\sqrt{F}}$
35°	1,402	$0{,}697 \sqrt{F}$	$0{,}439 \sqrt{F}$	$0{,}995 \sqrt{F}$	$2{,}430 \sqrt{F}$	$\frac{2{,}870}{\sqrt{F}}$
30°	1,732	$0{,}664 \sqrt{F}$	$0{,}356 \sqrt{F}$	$1{,}150 \sqrt{F}$	$2{,}656 \sqrt{F}$	$\frac{3{,}012}{\sqrt{F}}$
26°34′	2,000	$0{,}636 \sqrt{F}$	$0{,}300 \sqrt{F}$	$1{,}272 \sqrt{F}$	$2{,}844 \sqrt{F}$	$\frac{3{,}144}{\sqrt{F}}$
Halbkreis	—	$0{,}798 \sqrt{F}$	—	—	$1{,}596 \sqrt{F}$	$\frac{2{,}507}{\sqrt{F}}$

Man ersieht aus dieser Tafel, daß allerdings beim Halbkreise der Quotient $\frac{p}{F}$ am kleinsten, nämlich $= \frac{2{,}507}{\sqrt{F}}$ ist, daß er beim halben Sechseck größer, beim halben Quadrate und beim Trapeze von 36° 52′ Böschung aber noch größer ausfällt u. s. w.

Beispiel. Welche Dimensionen sind einem Querprofile zu geben, welches bei 40 Quadratfuß Inhalt eine Uferböschung von 35° hat? Nach der vorstehenden Tafel ist die Tiefe:

$a = 0{,}697 \sqrt{40} = 4{,}408$, die untere Breite

$b = 0{,}439 \sqrt{40} = 2{,}777$ Fuß, die absolute Böschung

$\nu a = 0{,}995 \sqrt{40} = 6{,}293$ Fuß, die obere Breite

$b_1 = 15{,}363$,

und der Quotient:

$$\frac{p}{F} = \frac{2,870}{\sqrt{40}} = 0,4538.$$

§. 475

Gleichförmige Bewegung. Die Bewegung des Wassers in Betten ist auf einer gewissen Strecke entweder gleichförmig oder ungleichförmig; gleichförmig, wenn die mittlere Geschwindigkeit in allen Querschnitten dieser Strecke sich gleichbleibt, und also auch die Inhalte der Querschnitte gleich sind; ungleichförmig hingegen, wenn die mittleren Geschwindigkeiten und also auch die Inhalte der Querschnitte sich verändern. Zunächst ist von der gleichförmigen Bewegung die Rede.

Bei der gleichförmigen Bewegung des Wassers auf einer Strecke $AD = l$, Fig. 807, wird das ganze Gefälle $HD = h$ nur auf die Ueberwindung der Reibung des Wassers im Bette verwendet, weil das Wasser mit derselben Geschwindigkeit fortfließt, mit welcher es zuströmt, also eine Geschwindigkeitshöhe weder gebunden noch frei wird. Messen wir nun diese Reibung durch die Höhe jener Wässersäule, so können wir folglich das Gefälle dieser Höhe gleichsetzen. Die Reibungswiderstandshöhe wächst aber mit dem Quotienten $\frac{p}{F}$, mit l und mit dem Quadrate der mittleren Geschwindigkeit c (§. 427), daher gilt denn die Formel:

Fig. 807.

$$1)\ h = \zeta \cdot \frac{l p}{F} \cdot \frac{c^2}{2g},$$

worin ζ eine Erfahrungszahl ausdrückt, welche der Coefficient des Reibungswiderstandes zu nennen ist.

Durch Umkehrung folgt

$$2)\ c = \sqrt{\frac{F}{\zeta . l p} \cdot 2 g h}.$$

Es kommt also bei der Bestimmung des Gefälles aus der Länge, dem Querprofile und der Geschwindigkeit, sowie umgekehrt, bei der Ermittelung der Geschwindigkeit aus dem Gefälle, der Länge und dem Querprofile, auf die Kenntniß des Reibungscoefficienten ζ an. Nach den Eytelwein'schen Berechnungen der 91 Beobachtungen von du Buat, Brünings, Funk und Woltmann ist $\zeta = 0,007565$, und daher:

$$h = 0,007565 \cdot \frac{l p}{F} \cdot \frac{c^2}{2g}.$$

Setzt man $g = 9,809$ Meter oder 31,25 Fuß ein, so erhält man für Metermaß:

$$h = 0{,}0003856 \frac{lp}{F} \cdot c^2 \text{ und } c = 50{,}9 \sqrt{\frac{Fh}{pl}},$$

dagegen für das Fußmaß:

$$h = 0{,}00012103 \frac{lp}{F} \cdot c^2 \text{ und } c = 90{,}9 \sqrt{\frac{Fh}{pl}}.$$

Bei Röhrenleitungen ist $\frac{lp}{F} = \frac{\pi l d}{{}^1/_4 \pi d^2} = \frac{4l}{d}$, daher giebt diese Formel für Röhren:

$$h = 0{,}03026 \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g},$$

während wir richtiger (§. 428) für diese bei mittleren Geschwindigkeiten:

$$h = 0{,}025 \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g}$$

gefunden haben. Es ist also, wie zu erwarten stand, die Reibung in Flußbetten größer, als in metallenen Röhrenleitungen.

Beispiele. 1) Welches Gefälle ist einem Canale von der Länge $l = 2600$ Fuß, unteren Breite $b = 3$ Fuß, oberen Breite $b_1 = 7$ Fuß, und der Tiefe $a = 3$ Fuß zu geben, wenn er ein Wasserquantum $Q = 40$ Cubikfuß pr. Secunde fortführen soll? Es ist:

$$p = 3 + 2\sqrt{2^2 + 3^2} = 10{,}211,\ F = \frac{(7+3)\,3}{2} = 15, \text{ und } c = {}^{40}/_{15} = {}^8/_3,$$

daher das gesuchte Gefälle:

$$h = 0{,}000121 \cdot \frac{2600 \,.\, 10{,}211}{15} \cdot ({}^8/_3)^2 = \frac{0{,}3146 \,.\, 10{,}211 \,.\, 64}{15 \,.\, 9} = 1{,}52 \text{ Fuß}.$$

2) Welches Wasserquantum liefert ein Canal von 5800 Fuß Länge bei 3 Fuß Gefälle, 5 Fuß Tiefe, 4 Fuß unterer und 12 Fuß oberer Breite? Hier ist:

$$\frac{p}{F} = \frac{4 + 2\sqrt{5^2 + 4^2}}{5 \,.\, 8} = \frac{16{,}806}{40} = 0{,}42015,$$

daher die Geschwindigkeit:

$$c = 90{,}9 \sqrt{\frac{3}{0{,}42015 \,.\, 5800}} = \frac{90{,}9}{\sqrt{0{,}14005 \,.\, 5800}} = \frac{90{,}9}{\sqrt{812{,}29}}$$
$$= \frac{90{,}9}{28{,}5} = 3{,}19 \text{ Fuß},$$

und das Wasserquantum:

$$Q = Fc = 40 \,.\, 3{,}19 = 127{,}6 \text{ Cubikfuß}.$$

§. 476 **Reibungscoefficienten.** Auch bei Flüssen, Bächen u. s. w. zeigt sich der Widerstandscoefficient, wofür wir im vorigen Paragraphen den mittleren Werth 0,007565 angegeben haben, nicht constant, sondern, wie bei Röhren, bei kleinen Geschwindigkeiten etwas zu- und bei großen etwas abnehmend. Man hat also zu setzen:

$$\zeta = \zeta_1 \left(1 + \frac{\alpha}{c}\right) \text{ oder } \zeta_1 \left(1 + \frac{\alpha}{\sqrt{c}}\right) \text{ oder dergl.}$$

Der Verfasser der schon in der Anmerkung zu §. 471 angeführten Schrift findet aus 255 zum großen Theil von ihm angestellten Versuchen für das preuß. Maß:

$$\zeta = 0{,}007409 \left(1 + \frac{0{,}1865}{c}\right),$$

und es folgt hiernach für das Metermaß:

$$\zeta = 0{,}007409 \left(1 + \frac{0{,}05853}{c}\right).$$

Man sieht, daß diese Formeln bei einer Geschwindigkeit $c = 8^1/_2$ Fuß den oben angegebenen mittleren Widerstandscoefficienten $\zeta = 0{,}007565$ wiedergeben. Zur Erleichterung der Rechnung dient folgende für das Metermaß zunächst brauchbare Tabelle der Widerstandscoefficienten:

Geschwindigkeit c	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	Meter.
Widerstandscoefficient $\zeta = 0{,}0$	1175	0958	0885	0849	0828	0813	0803	0795	0789	

Geschwindigkeit c	1	1,2	1,5	2	3	4	5 Meter.
Widerstandscoefficient $\zeta = 0{,}0$	0784	0777	0771	0763	0755	0752	0750

Für das preuß. Fußmaß gilt folgende Tabelle:

Geschwindigkeit c	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	$1^1/_2$	2	3	5	7	10	15 Fuß.
Widerstandscoefficient $\zeta = 0{,}0$	1202	1096	1017	0971	0938	0914	0894	0879	0833	0810	0787	0769	0761	0755	07501

Diese Tabellen finden eine unmittelbare Anwendung in allen den Fällen, wenn die Geschwindigkeit c gegeben ist und das Gefälle gesucht wird, und wenn die Formel Nr. 1 des vorigen Paragraphen in Anwendung kommt. Ist aber die Geschwindigkeit c unbekannt oder die zu suchende Größe, so gestattet diese Tabelle nur dann eine unmittelbare Anwendung, wenn man schon einen Näherungswerth von c hat. Am einfachsten geht man zu Werke, wenn man erst annähernd c durch eine der Formeln

$$c = 50{,}9\sqrt{\frac{Fh}{pl}} \text{ Meter oder } c = 90{,}9\sqrt{\frac{Fh}{pl}} \text{ Fuß,}$$

bestimmt, dann hieraus, mittels der Tabelle, ζ ermittelt, und den so erhaltenen Werth in der Formel:

$$\frac{c^2}{2g} = \frac{h}{\zeta} \cdot \frac{F}{lp}, \text{ oder:}$$

$$c = \sqrt{\frac{F}{\zeta l p} \cdot 2gh} \text{ einsetzt.}$$

Aus der Geschwindigkeit c folgt dann auch noch das Wasserquantum mittels der Formel $Q = Fc$.

Ist endlich das Wasserquantum und Gefälle gegeben und, wie es bei Anlegung von Canälen oft vorkommt, das Querprofil zu bestimmen, so setze man $\frac{p}{F} = \frac{m}{\sqrt{F}}$ (s. Tabelle §. 474) und $c = \frac{Q}{F}$ in die Formel:

$$h = 0{,}007565\,\frac{lp}{F} \cdot \frac{c^2}{2g}, \text{ schreibe also:}$$

$$h = 0{,}007565\,\frac{m l Q^2}{2gF^{5/2}}, \text{ und bestimme hiernach:}$$

$$F = \left(0{,}007565\,\frac{m l Q^2}{2gh}\right)^{2/5}, \text{ d. i. für Metermaß:}$$

$$F = 0{,}0431\left(\frac{m l Q^2}{h}\right)^{2/5}, \text{ oder für Fußmaß:}$$

$$F = 0{,}0271\left(\frac{m l Q^2}{h}\right)^{2/5}.$$

Hieraus folgt nun annähernd:

$$c = \frac{Q}{F};$$

nimmt man diesem Werth entsprechend, ζ aus einer der Tabellen, so läßt sich

$$F = \left(\zeta \cdot \frac{m l Q^2}{2gh}\right)^{2/5}$$

genauer berechnen, und es ergeben sich hieraus auch schärfere Werthe für

$$c = \frac{Q}{F} \text{ und } p = m\sqrt{F},$$

sowie für a, b u. s. w.

Beispiele. 1) Welches Gefälle erfordert ein Canal von 1500 Fuß Länge, 2 Fuß unterer, 8 Fuß oberer Breite und 4 Fuß Tiefe, zur Fortleitung einer Wassermenge von 70 Cubikfuß pr. Secunde? Es ist

$$p = 2 + 2\sqrt{4^2 + 3^2} = 12,\ F = 5 \,.\, 4 = 20,\ c = {}^{70}/_{20} = 3{,}5,$$

daher:

$$\zeta = 0{,}00784 \text{ und}$$

$$h = 0{,}00784 \cdot \frac{1500 \cdot 12}{20} \cdot \frac{3{,}5^2}{2g} = 7{,}056 \cdot 0{,}196 = 1{,}38 \text{ Fuß}.$$

2) Welche Wassermenge liefert ein Bach von 40 Fuß Breite, $4\frac{1}{2}$ Fuß mittlerer Tiefe und 46 Fuß Wasserprofil, wenn er auf einer Länge von 750 Fuß, 10 Zoll Gefälle hat? Es ist ungefähr

$$c = 90{,}9 \cdot \sqrt{\frac{40 \cdot 4{,}5 \cdot 10}{46 \cdot 750 \cdot 12}} = \frac{90{,}9}{\sqrt{230}} = 6 \text{ Fuß},$$

und hiernach $\zeta = 0{,}00765$

anzunehmen. Man erhält daher genauer:

$$\frac{c^2}{2g} = \frac{Fh}{\zeta l p} = \frac{4{,}5 \cdot 40 \cdot 10}{0{,}00765 \cdot 46 \cdot 750 \cdot 12} = \frac{1}{1{,}7595} = 0{,}5683 \text{ und } c = 5{,}96 \text{ Fuß}.$$

Die entsprechende Wassermenge ist endlich:

$$Q = 4{,}5 \cdot 40 \cdot 5{,}96 = 10{,}73 \text{ Cubikfuß}.$$

3) Man will einen Graben von 3650 Fuß Länge anlegen, welcher bei einem Totalgefälle von 1 Fuß eine Wassermenge von 12 Cubikfuß pr. Secunde fortführt. Welche Dimensionen sind dem Querprofile desselben zu geben, wenn es die Form eines halben regelmäßigen Sechseckes erhalten soll? Hier ist $m = 2{,}632$ (s. Tabelle §. 474), daher annähernd:

$$F = 0{,}0271\,(2{,}632 \cdot 3650 \cdot 144)^{2/5} = 7{,}75 \text{ Quadratfuß und}$$

$$c = \frac{12}{7{,}75} = 1{,}548 \text{ Fuß}.$$

Hiernach ist $\zeta = 0{,}0083$, und daher:

$$F = \left(0{,}0083 \cdot 2{,}632 \cdot \frac{3650 \cdot 144}{62{,}5}\right)^{2/5} = 8{,}22 \text{ Quadratfuß}$$

zu nehmen. Es ist hiernach zu setzen:

die Tiefe: $a = 0{,}760\,\sqrt{F} = 2{,}18$ Fuß,

die untere Breite: $b = 0{,}877\,\sqrt{F} = 2{,}51$,

und die obere Breite: $b_1 = 2 \cdot 2{,}51 = 5{,}02$ Fuß.

Anmerkung 1. Nach Saint-Venant läßt sich mit ziemlicher Genauigkeit setzen:

$$h = 0{,}000401\,\frac{p}{F} \cdot v^{21/11} = 0{,}000401 \cdot 2g \cdot v^{-1/11} \cdot \frac{p}{F} \cdot \frac{v^2}{2g} \text{ Meter};$$

es ist daher der Widerstandscoefficient:

$$\zeta = 0{,}000401 \cdot 2g \cdot v^{-1/11} = 0{,}000401 \cdot 19{,}62 \cdot v^{-1/11} = 0{,}007887\, v^{-1/11},$$

also z. B. für $v = 1$ Meter:

$$\zeta = 0{,}007887,$$

und für $v = \frac{1}{4}$ Meter:

$$\zeta = 0{,}007887 \cdot \sqrt[11]{4} = 0{,}007887 \cdot 1{,}134 = 0{,}008945.$$

(Vergl. oben §. 428, Anmerkung 3).

Anmerkung 2. Eine Tabelle zur Abkürzung dieser Rechnungen theilt der „Ingenieur" Seite 460 und 461 mit.

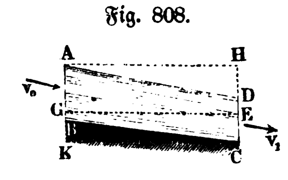
Ungleichförmige Bewegung. §. 477 Die Theorie der ungleichförmigen Bewegung des Wassers in Flußbetten läßt sich insofern auf die Theorie der gleichförmigen Bewegung zurückführen, als man den Reibungswiderstand auf einer kurzen Flußstrecke als constant und die entsprechende Höhe ebenfalls

$$= \zeta \cdot \frac{lp}{F} \cdot \frac{v^2}{2g}$$

setzen kann. Außerdem ist aber noch auf die der Geschwindigkeitsveränderung entsprechende lebendige Kraft des Wassers Rücksicht zu nehmen.

Es sei $ABCD$, Fig. 808, eine kurze Flußstrecke, von der Länge $AD = l$, dem Gefälle $DH = h$, und es sei v_0 die Geschwindigkeit des ankommenden, v_1 die des fortgehenden Wassers. Wenden wir die Regeln des Ausflusses auf ein Element D im Wasserspiegel an, so erhalten wir für dessen Geschwindigkeit v_1:

Fig. 808.



$$\frac{v_1^2}{2g} = h + \frac{v_0^2}{2g};$$

was aber ein Element E unter Wasser betrifft, so hat dasselbe zwar von der einen Seite her eine größere Druckhöhe $AG = EH$, allein da das Unterwasser mit der Druckhöhe DE entgegenwirkt, so bleibt für dasselbe ebenfalls nur das Gefälle $DH = EH - ED$ als Bewegung erzeugende Druckhöhe übrig, und es gilt also auch für dieses und für jedes andere Element die Formel:

$$h = \frac{v_1^2 - v_0^2}{2g},$$

und nimmt man hierzu noch den Reibungswiderstand, so erhält man:

$$h = \frac{v_2 - v_0^2}{2g} + \zeta \cdot \frac{lp}{F} \cdot \frac{v^2}{2g},$$

worin p, F und v Mittelwerthe des Wasserprofiles, Querschnittes und der Geschwindigkeit sind. Ist F_0 der Inhalt des oberen und F_1 der des unteren Querprofiles, so läßt sich setzen:

$$F = \frac{F_0 + F_1}{2} \text{ und } Q = F_0 v_0 = F_1 v_1,$$

weshalb nun

$$\frac{v_1^2 - v_0^2}{2g} = \frac{1}{2g}\left[\left(\frac{Q}{F_1}\right)^2 - \left(\frac{Q}{F_0}\right)^2\right] = \left(\frac{1}{F_1^2} - \frac{1}{F_0^2}\right)\frac{Q^2}{2g},$$

sowie

$$\frac{v^2}{F} = \frac{v_0^2 + v_1^2}{F_0 + F_1} = \left(\frac{1}{F_0^2} + \frac{1}{F_1^2}\right)\frac{Q^2}{F_0 + F_1}$$

folgt und sich ergiebt:

$$1)\ h = \left[\frac{1}{F_1^2} - \frac{1}{F_0^2} + \zeta\frac{lp}{F_0 + F_1}\left(\frac{1}{F_0^2} + \frac{1}{F_1^2}\right)\right]\frac{Q^2}{2g}, \text{ sowie}$$

$$2)\ Q = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{\frac{1}{F_1^2} - \frac{1}{F_0^2} + \zeta\frac{lp}{F_0 + F_1}\left(\frac{1}{F_0^2} + \frac{1}{F_1^2}\right)}}.$$

Mit Hülfe der Formel 1) läßt sich aus dem Wasserquantum, der Länge und den Querschnitten einer Fluß- oder Canalstrecke das entsprechende Gefälle h berechnen, mit Hülfe der Formel 2) aber umgekehrt aus dem Gefälle, der Länge und den Querschnitten das Wasserquantum. Um mehr Genauigkeit zu erzielen, kann man die Rechnung für mehrere kurze Flußstrecken durchführen und zuletzt das arithmetische Mittel nehmen. Ist nur das Totalgefälle bekannt, so setze man gleich dieses statt h in die letzte Formel, führe statt

$$\frac{1}{F_1^2} - \frac{1}{F_0^2},\ \frac{1}{F_n^2} - \frac{1}{F_0^2},$$

wo F_n den Inhalt des letzten Querprofiles bezeichnet, und statt

$$\zeta \cdot \frac{lp}{F_0 + F_1}\left(\frac{1}{F_0^2} + \frac{1}{F_1^2}\right)$$

die Summe aller ähnlichen Werthe der einzelnen Flußstrecken ein.

Beispiel. Ein Bach hat auf einer Strecke von 300 Fuß Länge 9,6 Zoll Gefälle, der mittlere Umfang seines Wasserprofiles ist 40 Fuß, der Inhalt des oberen Querprofiles mißt 70 und der des unteren 60 Quadratfuß. Welche Wassermenge liefert dieser Bach? Es ist:

$$Q = \frac{7{,}906\ \sqrt{0{,}8}}{\sqrt{\frac{1}{60^2} = \frac{1}{70^2} + 0{,}007565 \cdot \frac{300\ .\ 40}{130}\left(\frac{1}{60^2} + \frac{1}{70^2}\right)}}$$

$$= \frac{7{,}071}{\sqrt{0{,}0000731 + 0{,}0003365}} = \frac{7{,}071}{\sqrt{0{,}0004096}} = 349 \text{ Cubikfuß.}$$

Die mittlere Geschwindigkeit beträgt $\frac{2\,Q}{F_0 + F_1} = \frac{698}{130} = 5{,}37$ Fuß, daher ist richtiger

$$\zeta = 0{,}00768 \text{ statt } 0{,}007565$$

zu setzen, und es folgt nun schärfer:

$$Q = \frac{7{,}071}{\sqrt{0{,}0000731 + 0{,}0003416}} = 347 \text{ Cubikfuß.}$$

Wenn derselbe Bach bei demselben Wasserstande auf einer anderen Strecke von 450 Fuß Länge 11 Zoll Gefälle hat, und wenn auf dieser Strecke sein oberes Querprofil 50 und sein unteres 60 Quadratfuß beträgt, wobei der mittlere Profilumfang 36 Fuß mißt, so hat man:

$$Q = \frac{7{,}906\ \sqrt{0{,}9167}}{\sqrt{\frac{1}{60^2} - \frac{1}{50^2} + 0{,}00768 \cdot \frac{450\ .\ 36}{110}\left(\frac{1}{60^2} + \frac{1}{50^2}\right)}}$$

$$= 7{,}906 \sqrt{\frac{0{,}9167}{-\ 0{,}0001222 + 0{,}0007549}} = 301 \text{ Cubikfuß.}$$

Aus beiden Werthen folgt der mittlere:

$$Q = \frac{347 + 301}{2} = 324 \text{ Cubikfuß.}$$

Um eine Formel für die Wassertiefe zu erhalten, setzen wir die obere Tiefe $= a_0$ und die untere $= a_1$, ferner den Abhang des Flußbettes, §. 478

$= \alpha$, folglich das Gefälle des Grundbettes, $= l\ sin.\ \alpha$. Dann erhalten wir das Wassergefälle:

$$h = a_0 - a_1 + l\ sin.\ \alpha,$$

und es folgt nun die Gleichung:

$$a_0 - a_1 - \left(\frac{1}{F_1^2} - \frac{1}{F_1^2}\right)\frac{Q^2}{2g} = \left[\zeta\,\frac{p}{F_0 + F_1}\left(\frac{1}{F_0^2} + \frac{1}{F_1^2}\right)\frac{Q^2}{2g} - sin.\ \alpha\right] l,$$

daher:

$$l = \frac{a_0 - a_1 - \left(\frac{1}{F_1^2} - \frac{1}{F_0^2}\right)\frac{Q^2}{2g}}{\zeta\,\frac{p}{F_0 + F_1}\left(\frac{1}{F_0^2} + \frac{1}{F_1^2}\right)\frac{Q^2}{2g} - sin.\ \alpha}.$$

Mit Hülfe dieser Formel kann man die Strecke l bestimmen, welche einer gegebenen Veränderung $a_0 - a_1$ der Wassertiefe entspricht. Ist aber die umgekehrte Aufgabe zu lösen, so hat man den Weg der Näherung zu betreten, indem man erst die den angenommenen Senkungen $a_0 - a_1$ und $a_1 - a_2$ entsprechenden Entfernungen l_1 und l_2 ermittelt, und hieraus durch eine Proportion die der gegebenen Entfernung l entsprechende Senkung berechnet (s. „Ingenieur", Arithmetik, §. 16, V. Seite 76).

Die Formel ist noch einer Vereinfachung fähig, wenn die Breite b des fließenden Wassers constant ist, oder als constant angesehen werden kann. Wir setzen in diesem Falle:

$$\left(\frac{1}{F_1^2} - \frac{1}{F_0^2}\right)\frac{Q^2}{2g} = \frac{F_0^2 - F_1^2}{F_0^2 F_1^2}\cdot\frac{Q^2}{2g} = \frac{(F_0 - F_1)(F_0 + F_1)}{F_1^2}\cdot\frac{v_0^2}{2g}$$

$$= \frac{(a_0 - a_1)(a_0 + a_1)}{a_1^2}\cdot\frac{v_0^2}{2g} \text{ annähernd } = 2\,\frac{(a_0 - a_1)}{a_0}\cdot\frac{v_0^2}{2g},$$

und ebenso:

$$\frac{p}{F_0 + F_1}\left(\frac{1}{F_0^2} + \frac{1}{F_1^2}\right)\frac{Q^2}{2g} = \frac{p\,(F_0^2 + F_1^2)}{(F_0 + F_1)\,F_1^2}\cdot\frac{v_0^2}{2g}$$

annähernd $= \frac{p}{a_0 b}\cdot\frac{v_0^2}{2g}$, erhalten daher:

$$l = \frac{(a_0 - a_1)\left(1 - \frac{2}{a_0}\cdot\frac{v_0^2}{2g}\right)}{\zeta\cdot\frac{p}{a_0 b}\cdot\frac{v_0^2}{2g} - sin.\ \alpha},$$

und folglich:

$$\frac{a_0 - a_1}{l} = \frac{\zeta\cdot\frac{p}{a_0 b}\cdot\frac{v_0^2}{2g} - sin.\ \alpha}{1 - \frac{2}{a_0}\cdot\frac{v_0^2}{2g}}.$$

Mit Hülfe dieser Formel läßt sich direct die einer gegebenen Strecke l entsprechende Veränderung $(a_0 - a_1)$ der Wassertiefe berechnen.

Beispiel. Man will in einem horizontalen Graben von 5 Fuß Breite und 800 Fuß Länge eine Wassermenge von 20 Cubikfuß fortführen und dieselbe 2 Fuß hoch eintreten lassen, welche Höhe wird das Wasser am Ende des Canales haben? Theilen wir die ganze Länge in zwei gleiche Theile und bestimmen wir nach der letzten Formel das Gefälle für jeden dieser Theile.

Allemal ist $sin. \alpha = 0$, $l = \frac{800}{2} = 400$, und $b = 5$; für den ersten Theil ist $v_0 = \frac{20}{2 \cdot 5} = 2$, daher $\zeta = 0{,}00810$, ferner $a_0 = 2$; da nun $p = 8^1/_2$, so folgt:

$$a_0 - a_1 = \left(\frac{0{,}00810 \cdot \frac{8{,}5}{10} \cdot \frac{4}{2g}}{1 - \frac{2}{2} \cdot \frac{4}{2g}}\right) \cdot 400 = \frac{0{,}1762}{0{,}936} = 0{,}188 \text{ Fuß}.$$

Nun ist für die zweite Hälfte $a_1 = 2 - 0{,}188 = 1{,}812$, ferner p_1 etwa $= 8{,}2$, $v_1 = \frac{20}{9{,}106} = 2{,}207$, und die Senkung des zweiten Theiles:

$$a_1 - a_2 = \left(\frac{0{,}00810 \cdot \frac{8{,}2}{9{,}106} \cdot \frac{2{,}207^2}{2g}}{1 - \frac{2}{1{,}812} \cdot \frac{2{,}207^2}{2g}}\right) \cdot 400 = \frac{0{,}2285}{0{,}914} = 0{,}250 \text{ Fuß},$$

daher folgt die ganze Senkung

$$= 0{,}188 + 0{,}250 = 0{,}438,$$

und die Wassertiefe am unteren Ende

$$= 2 - 0{,}438 = 1{,}562 \text{ Fuß} = 18^3/_4 \text{ Zoll}.$$

§. 479 **Anschwellungen.** Wenn Flüsse oder Canäle ihren Wasserstand ändern, so treten auch Geschwindigkeitsveränderungen und Veränderungen in den Wassermengen ein. Einem höheren Wasserstande entspricht nicht nur ein größerer Querschnitt, sondern auch eine größere Geschwindigkeit, und daher aus doppelten Gründen ein größeres Wasserquantum, und ebenso giebt eine Abnahme der Wassertiefe eine Verminderung im Querschnitt und in der Geschwindigkeit, und daher auch eine Abnahme der Wassermenge in zweifacher Beziehung. Ist die anfängliche Tiefe $= a$, und die spätere Tiefe $= a_1$, sowie die obere Breite des Canales, $= b$, so läßt sich die Vergrößerung des Querschnittes, $= b\,(a_1 - a)$, und daher der Querschnitt nach der Anschwellung $(a_1 - a)$:

$$F_1 = F + b\,(a_1 - a)$$

setzen, auch folgt hiernach:

$$\frac{F_1}{F} = 1 + \frac{b\,(a_1 - a)}{F}$$

und:

$$\sqrt{\frac{F_1}{F}} \text{ annähernd } = 1 + \frac{b\,(a_1 - a)}{2F}.$$

Ist ferner p der anfängliche, p_1 der spätere Umfang des Wasserprofiles, sowie θ der Böschungswinkel der Ufer, so läßt sich setzen:

$$p_1 = p + \frac{2\,(a_1 - a)}{sin.\,\theta}\text{, daher}$$

$$\frac{p_1}{p} = 1 + \frac{2\,(a_1 - a)}{p\,sin.\theta}\text{ und:}$$

$$\sqrt{\frac{p_1}{p}} = 1 + \frac{a_1 - a}{p\,sin.\,\theta}\text{, sowie:}$$

$$\sqrt{\frac{p}{p_1}} = 1 - \frac{a_1 - a}{p\,sin.\,\theta}.$$

Nun ist aber die Geschwindigkeit beim ersten Wasserstande, $c = 90{,}9\sqrt{\frac{Fh}{pl}}$, und beim zweiten $c_1 = 90{,}9\sqrt{\frac{F_1}{p_1}\cdot\frac{h}{l}}$, es läßt sich daher:

$$\frac{c_1}{c} = \sqrt{\frac{F_1}{F}}\cdot\sqrt{\frac{p}{p_1}} = \left(1 + \frac{b\,(a_1 - a)}{2\,F}\right)\left(1 - \frac{a_1 - a}{p\,sin.\,\theta}\right)$$

$$= 1 + (a_1 - a)\left(\frac{b}{2\,F} - \frac{1}{p\,sin.\,\theta}\right),$$

also die relative Geschwindigkeitsveränderung:

$$1)\ \frac{c_1 - c}{c} = (a_1 - a)\left(\frac{b}{2\,F} - \frac{1}{p\,sin.\,\theta}\right)\text{ setzen.}$$

Dagegen folgt das Verhältniß der Wassermengen:

$$\frac{Q_1}{Q} = \frac{F_1 c_1}{Fc} = \left(1 + \frac{b\,(a_1 - a)}{F}\right)\left[1 + (a_1 - a)\left(\frac{b}{2\,F} - \frac{1}{p\,sin.\,\theta}\right)\right]$$

$$= 1 + (a_1 - a)\left(\frac{3b}{2\,F} - \frac{1}{p\,sin.\,\theta}\right),$$

und der relative Wassermengenzuwachs:

$$2)\ \frac{Q_1 - Q}{Q} = (a_1 - a)\left(\frac{3\,b}{2\,F} - \frac{1}{p\,sin.\,\theta}\right).$$

Weniger genau, aber in vielen Fällen, namentlich bei breiten Canälen mit wenig Böschung genügend, ist es, $F = ab$ zu setzen und $\frac{1}{p\,sin.\,\theta}$ zu vernachlässigen, weswegen dann einfacher

$$\frac{c_1 - c}{c} = {}^1/_2\,\frac{a_1 - a}{a}\quad\text{und}\quad\frac{Q_1 - Q}{Q} = {}^3/_2\cdot\frac{a_1 - a}{a}$$

folgt.

Hiernach ist also die relative Geschwindigkeitsveränderung halb so groß, und die relative Veränderung im Wasserquantum gleich $^3/_2$mal so groß, als die relative Veränderung im Wasserstande.

Die vorstehenden Formeln gelten nur für die permanente Bewegung

des Wassers **in Flußbetten**, wo die Wasserstände constant sind, nicht aber in den Fällen, wo die Höhe des fließenden Wassers veränderlich ist. Die mittlere Geschwindigkeit in einem und demselben Querprofile ist während des **Steigens** der Wasserhöhe **größer** und während des **Fallens kleiner** als bei constantem Wasserstande, es fließt also auch im ersten Falle mehr und im zweiten Falle weniger Wasser durch als bei der permanenten Bewegung des Wassers.

Beispiele. 1) Wenn der Wasserstand um $\frac{1}{10}$ seiner anfänglichen Größe zunimmt, so wird die Geschwindigkeit um $\frac{1}{20}$ und das Wasserquantum um $\frac{3}{20}$ seines anfänglichen Werthes größer.

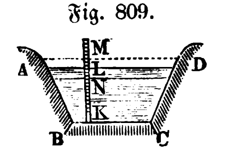
2) Wenn die Tiefe um 8 Procent abnimmt, so vermindert sich die Geschwindigkeit um 4 Procent, und das Wasserquantum um 12 Procent.

3) Mit Hülfe der genaueren Formel

$$\frac{Q_1 - Q}{Q} = (a_1 - a)\left(\frac{3\,b}{2\,F} - \frac{1}{p\ sin.\,\theta}\right)$$

läßt sich eine Wasserstandsscala KM, Fig. 809, construiren, woran man die jeder Wassertiefe KL entsprechende Wassermenge eines Canales ablesen kann, wenn man nur einmal das Wasserquantum für eine gewisse mittlere Tiefe kennt. Ist $b = 9$ Fuß, $b_1 = 3$, $a = 3$ und $\theta = 45^0$, so hat man:

Fig. 809.



$$F = \frac{(9 + 3)\,3}{2} = 18 \text{ Quadratfuß},$$

$$p = 3 + 2 . 3\sqrt{2} = 11{,}485, \text{ und}$$

$$sin.\,\theta = \sqrt{\tfrac{1}{2}} = 0{,}707,$$

daher:

$$\frac{Q_1 - Q}{Q} = \left(\frac{3 . 9}{2 . 18} - \frac{1}{11{,}485 . 0{,}707}\right)(a_1 - a) = (0{,}750 - 0{,}123)\,(a_1 - a)$$
$$= 0{,}627\,(a_1 - a).$$

Beträgt das dem mittleren Wasserstande entsprechende Wasserquantum $Q = 40$ Cubikfuß, so hat man:

$$Q_1 = 40 + 40 . 0{,}627\,(a_1 - a) = 40 + 25\,(a_1 - a).$$

Ist $a_1 - a = 0{,}04$ Fuß $= 5{,}76$ Linien, so folgt $Q_1 = 41$; ist $a_1 - a = 0{,}08$ Fuß $= 11{,}52$ Linien, so hat man $Q_1 = 42$ Cubikfuß; ist ferner $a_1 - a = -0{,}04$, so folgt $Q_1 = 39$ Cubikfuß u. s. w. Es giebt also eine Scala, deren Intervalle $LM = LN = 5{,}76$ Linien betragen, die Wassermenge bis auf einen Cubikfuß genau an. Natürlich wird die Genauigkeit um so kleiner, je mehr sich der Wasserstand von dem mittleren entfernt.

Anmerkung. Ueber die Zu- und Abführung des Wassers in Canälen, sowie über die Anlage der Wehre und Teiche wird im zweiten Theile gehandelt.

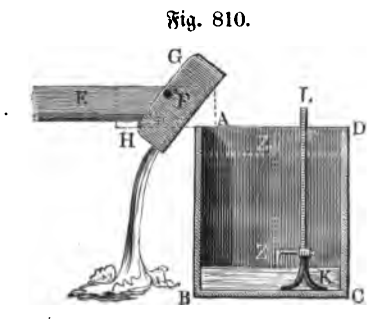
Schlußanmerkung. Ausführlich über die Bewegung des Wassers in Canälen und Flüssen handelt der Verfasser in der allgemeinen Encyklopädie, Bd. II., Artikel „Bewegung des Wassers in Canälen und Flüssen“; auch wird daselbst eine vollständige Literatur (bis 1844) über diesen Gegenstand mitgetheilt. **Rittinger's** tabellarische Zusammenstellung der Versuche über die Bewegung des Wassers in Canälen ist in der Zeitschrift des österreichischen Ingenieurvereins 7. Jahrgang 1855, enthalten.

Achtes Capitel.

Hydrometrie oder Lehre vom Wassermessen.

§. 480 **Aichen.** Das Wasserquantum, welches ein fließendes Wasser innerhalb einer gewissen Zeit liefert, wird entweder durch Aichmaße, oder durch Ausflußapparate oder durch Hydrometer gefunden. Das einfachste Wassermessen besteht allerdings in dem Aichen (franz. jaugeage; engl. gauging), d. i. in der Anwendung eines Aichgefäßes, doch ist dieses nur bei kleineren Wassermengen, wie sie etwa in Röhren oder kleinen Bächen und Gräben zugeführt werden, anwendbar. Das Aichgefäß wird meist aus Brettern zusammengesetzt, und bekommt deshalb eine parallelepipedische Form; um seine Haltbarkeit zu erhöhen, wird es wohl noch mit eisernen Reifen umgeben. Wie der genaue Inhalt dieses Gefäßes zu ermitteln ist, wird im „Ingenieur", S. 208, angezeigt. Das Wasser wird diesem Gefäße durch ein Gerinne EF, Fig. 810, zugeführt, an dessen Ende sich eine Doppelklappe GH befindet, durch welche man das Wasser nach Belieben neben dem Gefäße AC oder in dasselbe ausfließen lassen kann. Um die Höhe des Wasserkörpers im Gefäße recht genau zu erhalten, wendet man wohl noch eine Wasserstandsscala KL an. Wenn man vor der Messung die Zeigerspitze Z bis auf die Oberfläche des schon im Gefäße befindlichen und wenn auch vielleicht nur den Boden bedeckenden Wassers herabgelassen und den Wasserstand an der Scala abgelesen hat, so erhält man die Höhe ZZ_1 des geaichten Wassers durch Subtraction dieses Wasserstandes von demjenigen Stande, welchen die Scala anzeigt, wenn man die Zeigerspitze Z_1 am Ende der Beobachtung mit dem Wasserspiegel in Berührung gebracht hat. Vor der Messung ist natürlich die Klappe so zu stellen, daß das Wasser neben dem Kasten ausfließt. Hat man sich überzeugt, daß der Zufluß im Gerinne in Beharrung übergegangen ist, und hat man an der in der Hand befindlichen Uhr einen Zeitpunkt beobachtet, so dreht man die Klappe um, damit das Wasser in das Aichgefäß fließt; und ist nachher das Gefäß ganz oder zum Theil gefüllt, so liest man auf der Uhr einen zweiten Zeitpunkt ab und bringt

Fig. 810.

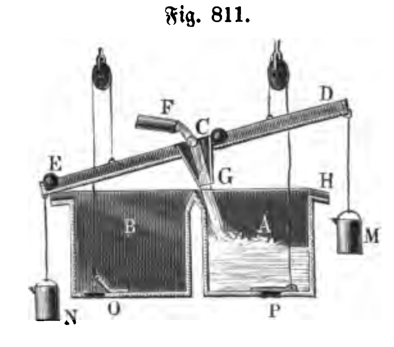


die Klappe wieder in die erste Stellung. Aus dem mittleren Querschnitte F des Gefäßes und der Höhe $ZZ_1 = s$ des Wasserkörpers ergiebt sich das ganze Wasserquantum $V = Fs$, und hieraus wieder mittels der durch die Differenz der beobachteten Zeiten gegebenen Füllungszeit t das Wasserquantum pr. Secunde:

$$Q = \frac{Fs}{t}.$$

Anmerkung. Um ein veränderliches Zuflußwasserquantum zu jeder Tageszeit angeben zu können, kann man den in Fig. 811 abgebildeten Cubir-Apparat, wie er vorzüglich auf Salinen vorkommt, anwenden. Hier giebt es zwei Aichgefäße A und B, die sich abwechselnd füllen und leeren, und das durch eine Röhre F zugeführte Wasser geht durch eine kurze Röhre CG, welche mit einem um C drehbaren Hebel DE fest verbunden ist. Hat sich das eine Gefäß, z. B. A, gefüllt, so fließt das Wasser durch ein kleines Gerinne H in das Eimerchen M, dieses zieht nun den Hebel auf der einen Seite nieder, und es kommt die Röhre CG in eine Lage, wodurch das Wasser nach B geleitet wird. Das Aufziehen der Klappen O und P erfolgt durch über Rollen weggehende Schnüre, deren Enden mit dem Hebel verbunden sind, und wird vorzüglich durch eiserne Kugeln unterstützt, die dem Niedergehen des Hebels den letzten Impuls ertheilen. Die Eimer M und N enthalten noch kleine Ausflußöffnungen, damit sie sich nach jedesmaligem Kippen leeren können. Uebrigens ist noch ein Zählapparat angebracht, an welchem die Zahl der Spiele zu jeder Zeit abgelesen werden kann. Andere Apparate dieser Art von Brown beschreibt Dingler's polyt. Journal Bd. 115. Ueber einen neuen Wassermeßapparat von Noeggerath siehe „Polyt. Centralblatt 1856. Heft 5." Vergleiche ferner die angeführten Werke von Francis, Lesbros u. s. w. Siehe auch weiter unten §. 506.

Fig. 811.



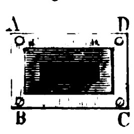
Ausflussregulatoren. Sehr häufig werden kleinere und mittlere Wassermengen mit Hülfe ihres Ausflusses durch eine bestimmte Mündung und unter einem bekannten Drucke gefunden. Aus dem Inhalte F der Mündung, aus der Druckhöhe h und mit Hülfe eines Ausflußcoefficienten μ ergiebt sich die Wassermenge pr. Secunde: §. 481

$$Q = \mu F \sqrt{2gh}.$$

Am besten eignen sich hierzu die Poncelet'schen Mündungen, weil für diese bei sehr verschiedenen Druckhöhen die Ausflußcoefficienten mit großer Genauigkeit bekannt sind (§. 410); jedoch sind dieselben nur bei gewissen mittleren Wassermengen anwendbar. Der Verfasser bedient sich bei seinen Wassermessungen vier solcher Mündungen, eine von 5, eine von 10, eine von 15

und eine von 20 Centimeter Höhe, alle aber von 20 Centimeter Weite. Diese Mündungen sind in Messingtafeln ausgeschnitten, welche auf hölzernen Rahmen AC, Fig. 812, aufsitzen, die man mittels vier starker eiserner Schrauben an jeder Wand befestigen kann. In vielen Fällen muß man sich freilich größerer Mündungen bedienen, für welche die Ausflußcoefficienten nicht so sicher bestimmt sind, ja oft lassen sich nur Ueberfälle anbringen, welche meist noch weniger Genauigkeit gewähren. Jedenfalls gilt aber die Regel, daß man bei dem Ausflusse so viel wie möglich vollständige und vollkommene Contraction zu erzielen suchen und deshalb der Mündung, wenn sie in einer dickeren Wand befindlich ist, nach außen eine Abschrägung ertheilen muß. Welche Correctionen bei unvollkommener und partieller Contraction anzubringen sind, ist in den §§. 416, 417 u. s. w. hinreichend auseinandergesetzt worden.

Fig. 812.



Um das Wasser eines Gerinnes zu messen, hat man das Mündungsstück einzusetzen und den Moment abzuwarten, wann der Wasserstand in Beharrung gekommen ist. Zur Messung der Druckhöhe kann man sich der festen Wasserstandsscala KL mit Zeiger, Fig. 813, oder der beweglichen Wasserstandsscala EF, Fig. 814, bedienen. Will man den Ausfluß unmittelbar an Schutzöffnungen beobachten, so ist es gut, vorher ein Paar messingene Schützenstandsscalen BC und DE, Fig. 815, nebst ihren Zeigern F und G auf die Führung und auf das Schutzbrett A zu befestigen, um die Oeffnungshöhe sicherer ablesen zu können. Uebrigens ist es meist besser, zu dem Zwecke der Wassermessung gleich ein neues Schutzbrett nebst einer Führung mit der erforderlichen Abschrägung nach außen einzusetzen.

Fig. 813.

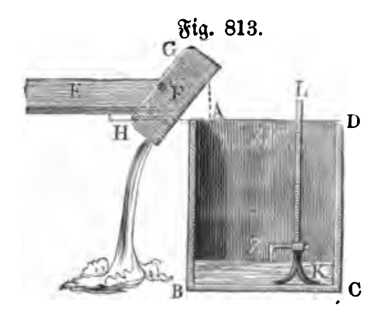


Fig. 814.

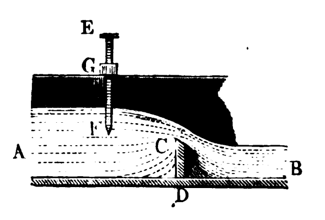
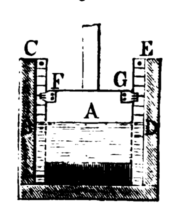


Fig. 815.



Das einfachste Mittel, das Wasser in einem Gerinne zu messen, besteht allerdings in dem Einsetzen eines an der oberen Kante abgeschrägten Brettes CF, Fig. 701, und in der Ausmessung des dadurch gebildeten Ueberfalles. Ist

der Graben oder das Gerinne lang und wenig ansteigend, so dauert es allerdings ziemlich lange, ehe der Beharrungszustand eintritt, und es ist deshalb gut, hier vor der Messung noch ein zweites Brett einzusetzen, welches den Ausfluß des Wassers auf eine längere Zeit verhindert, um das Steigen des Wassers auf die dem Beharrungszustande entsprechende Höhe zu beschleunigen.

Um das Wasserquantum eines Baches zu messen, kann man denselben durch einen aus Pfählen und Brettern bestehenden Einbau AB, Fig. 816, eindämmen und das Wasser durch eine in demselben angebrachte Oeffnung C abfließen lassen, oder man kann sich auch eines einfachen Ueberfalles oder Ueberfallwehres (hiervon im zweiten Theile) bedienen.

Fig. 816.



Anmerkung. Das einfachste Mittel, um die Druckhöhe zu bestimmen, ist, den Stand des Zeigers zu beobachten, wenn dessen Spitze erstens die Oberfläche des im Beharrungszustande abfließenden Wassers und zweitens den Spiegel des stillstehenden und nur bis Schwelle C aufgestauten Wassers berührt. Die Differenz dieser beiden Scalenstände ist die Druckhöhe oder der Stand des Wassers über der Schwelle. Bei Beobachtung des letzten Zeigerstandes ist die Capillarität nicht außer Acht zu lassen, vermöge welcher der Wasserspiegel noch um 1,37 Linien über oder unter der Schwelle stehen kann, ehe der Abfluß des Wassers über derselben beginnt oder aufhört. (Siehe §. 380.)

§. 482 Sehr einfach wird auch das Wasser in einem rectangulären Canale oder Gerinne AB, Fig. 817 und 818, gemessen, wenn man ein unten abgeschrägtes Brett CD so einsetzt, daß unter demselben eine Ausflußöffnung CE übrig bleibt, durch welche das Wasser abfließen kann. Diese Methode hat vor der Anwendung eines Ueberfalles den Vorzug, daß bei ihr das gespannte Wasser mehr zur Ruhe kommt, und deshalb die Messung der Druckhöhe schärfer zu vollziehen ist. Wenn es möglich ist, suche man einen freien Ausfluß, wie Fig. 817, herbeizuführen, weil hierbei eine größere Ge-

Fig. 817.

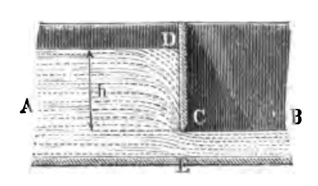
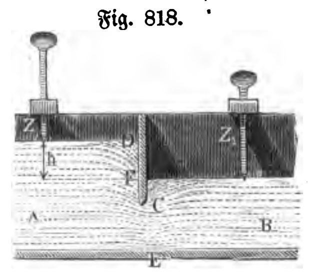


Fig. 818.



nauigkeit zu erlangen ist; bei einer großen Wassermenge ist es jedoch nicht möglich, das Zurückstauen des Unterwassers zu verhindern, und man muß sich daher mit einem Ausflusse unter Wasser, Fig. 818, begnügen. Endigt sich das Gerinne kurz hinter der Mündung, bildet es also ein sogenanntes kurzes Ansatzgerinne, so fließt das Wasser durch dasselbe fast frei ab, und man hat es dann mit einem Falle der Lesbros'schen Versuche (§. 418) zu thun. Bezeichnet a die Mündungshöhe, b die Mündungsbreite, ferner h die Druckhöhe, bis Mitte der Mündung gemessen, und μ den aus Tab. II., §. 418, zu nehmenden Ausflußcoefficienten, so hat man das Ausflußquantum

$$Q = \mu a b \sqrt{2 g h}.$$

Ist hingegen das Gerinne lang, oder das abfließende Wasser gestaut, so daß es eine horizontale Oberfläche hat, so fließt das Wasser in allen Stellen des Mündungsquerschnittes mit einer und derselben, dem Niveauabstande zwischen der Oberfläche A des Oberwassers und der Oberfläche B des Unterwassers entsprechenden Geschwindigkeit ab, es ist daher dann in der letzten Formel für Q, statt h dieser Niveauabstand einzuführen.

Fließt das Wasser in die freie Luft, oder steht der Unterwasserspiegel nicht über der oberen Mündungskante, wie Fig. 817 vor Augen führt, so hat man sowohl für eine scharfe als auch für eine abgerundete Mündungskante,

$$\mu = 0{,}965$$

einzusetzen, und folglich bei der Strahldicke a und Breite b,

$$Q = 0{,}965\, a b \sqrt{2 g h},$$

oder genauer, wenn a_1 die Tiefe des zu- und a die des abfließenden Wassers bezeichnet, nach §. 398:

$$Q = 0{,}965\, a b \sqrt{\frac{2 g h}{1 - \left(\frac{a}{a_1}\right)^2}}.$$

Bei dem Ausfluß unter Wasser, wobei der Unterwasserspiegel über der oberen Mündungskante steht (s. Fig. 818), bildet sich hinter der Mündungswand ein Wasserwirbel, wobei der Ausfluß wesentlich gestört wird, und es ist hier, einigen Versuchen des Verfassers zufolge, für eine Mündung mit scharfer Mündungskante im Mittel,

$$\mu = 0{,}462,$$

und dagegen für eine solche mit nach einem Quadranten abgerundeter Kante,

$$\mu = 0{,}717$$

zu setzen.

Beispiel. Um die Wassermenge zu finden, welche ein Gerinne AB, Fig. 818, fortführt, hat man ein scharfkantiges Brett CD in dasselbe eingesetzt, und dadurch einen Ausfluß unter Wasser hergestellt, übrigens aber Folgendes gefunden. Weite der Mündung oder des Gerinnes, $b = 3$ Fuß, Oeffnungshöhe oder Abstand CE

der Brettkante C vom Gerinnboden, $a = 6$ Zoll, Stand des Zeigers Z auf der Seite des Oberwassers, $h_1 = 0{,}445$ Fuß, und Stand des Zeigers Z_1 über dem Unterwasser, $h_2 = 1{,}073$. Es ist hiernach der Niveauabstand
$h = h_2 - h_1 = 1{,}073 - 0{,}445 = 0{,}628$ Fuß und die gesuchte Wassermenge:

$$Q = 0{,}462 \,.\, 7{,}906 \,.\, 3 \,.\, 0{,}5 \sqrt{h_2 - h_1} = 5{,}48 \sqrt{0{,}628} = 4{,}34 \text{ Cubikfuß}.$$

§. 483 Wäre der Ausflußcoefficient bei ähnlichen Mündungsquerschnitten immer derselbe, so würde der trianguläre Ueberfall oder zweiseitige Wandeinschnitt ABC, Fig. 819, einen besonderen Vorzug vor dem Ueberfall mit horizontaler Schwelle haben, dies ist jedoch, wie schon an Kreismündungen wahrgenommen werden kann, bei kleinen Mündungen nicht, und bei großen Mündungen nur annähernd richtig. Solche Wandeinschnitte empfiehlt Herr Professor Thomson in Belfast als Hülfsmittel zum Wassermessen. Aus der Breite $AB = b$, und der Höhe $CD = h$, folgt hier das Wasserquantum

Fig. 819.

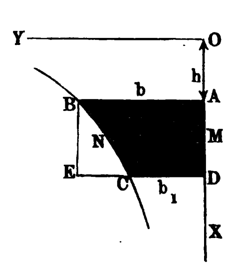
$$Q = {}^8/_{15}\, \frac{\mu b h}{2} \sqrt{2gh} \quad (\text{s. §. 402}),$$

und wenn man nach Thomson, den Ausflußcoefficienten $\mu = 0{,}619$ setzt,

$$Q = 0{,}33\, \frac{b\,h}{2} \sqrt{2gh} = 0{,}13\, b h^{3/2} \text{ Cubikfuß}.$$

Zum Wassermessen eignen sich auch solche Mündungen, bei welchen die Wassermenge der Mündungshöhe proportional ist. Ist dieselbe mit einem Schutzbrete versehen, so giebt dann die Größe des Schützenzuges das Maß der Ausflußmenge an. Es sei die Druckhöhe über der oberen Kante einer solchen Mündung $ABCD$, Fig. 820, $OA = h$, die Länge dieser Kante, $AB = b$, die der unteren Kante, $CD = b_1$, und die Höhe der Mündung, $AD = a$. Horizontale Linien im Abstande $\frac{a}{n}$ von einander theilen die Mündung in gleichhohe Streifen, wovon jeder eine und dieselbe Wassermenge $\frac{Q}{n}$ geben soll. Für den oberen Spalt oder Streifen, welcher die Breite b und Druckhöhe h hat, ist

Fig. 820.



$$\frac{Q}{n} = \frac{b\,a}{n} \sqrt{2gh},$$

und dagegen für einen Streifen, welcher um $OM = x$ unter dem Wasserspiegel liegt, und die Breite $MN = y$ hat, ist

$$\frac{Q}{n} = \frac{y\,a}{n}\sqrt{2gx};$$

folglich hat man, wenn man diese beiden Ausdrücke für $\frac{Q}{n}$ einander gleich setzt,

$$y\sqrt{x} = b\sqrt{h}, \text{ oder}$$

$$\frac{y}{b} = \sqrt{\frac{h}{x}}.$$

Die Curve BNC, welche die Mündung an der Seite begrenzt, gehört einem aus Artikel 9 der analytischen Hülfslehren bekannten Curvensysteme an, welches die Horizontale OY und die Verticale OX zu Asymptoten hat:

Aus Q, h und a folgt:

1) die obere Mündungsbreite $b = \frac{Q}{a\sqrt{2gh}}$,

2) Mündungsbreite in der Tiefe x, $y = b\sqrt{\frac{h}{x}}$, und

3) die untere Mündungsbreite $b_1 = b\sqrt{\frac{h}{h+a}}$.

Ferner ist der Inhalt der Mündung:

$$F = 2b\left(\sqrt{h(h+a)} - h\right),$$

und daher die mittlere Druckhöhe:

$$z = \frac{1}{2g}\left(\frac{Q}{F}\right)^2 = \left(\frac{a}{\sqrt{h(h+a)} - h}\right)^2 \cdot \frac{h}{2}.$$

Ist diese Mündung mit einer Schütze AE versehen, so giebt der Schützenzug $DM = a_1$ eine Ausflußöffnung MC, durch welche die Wassermenge $Q_1 = \frac{a_1}{a} Q$ fließt.

§. 484 **Prony's Methode.** Da es oft lange dauert, ehe der Beharrungszustand von dem durch einen Einbau aufgestauten Wasser eintritt, so kann man folgendes von Prony vorgeschlagene Verfahren mit Vortheil anwenden. Zuerst verschließe man die Mündung durch ein Schutzbrett ganz und lasse dadurch das Wasser ziemlich hoch, oder so weit es die Umstände erlauben, aufstauen; jetzt ziehe man das Schutzbrett so weit auf, daß mehr Wasser ab- als zufließt, und messe nun die Wasserstände in gleichen und möglichst kleinen Zeitabständen; endlich verschließe man die Schutzöffnung wieder völlig und beobachte noch die Zeit t_1, innerhalb welcher das Wasser auf die erste Höhe steigt. Jedenfalls ist dann im Laufe der ganzen Beobachtungszeit $t + t_1$ ebenso viel Wasser zu- als abgeflossen, und es läßt sich daher durch das Ausflußquantum in der Zeit t das Zuflußquantum in der Zeit $t + t_1$ aus-

drücken. Sind die Druckhöhen während des Sinkens h_0, h_1, h_2, h_3 und h_4, so hat man die mittlere Ausflußgeschwindigkeit:

$$v = \frac{\sqrt{2g}}{12}\left(\sqrt{h_0} + 4\sqrt{h_1} + 2\sqrt{h_2} + 4\sqrt{h_3} + \sqrt{h_4}\right) \text{ (s. §. 453)},$$

und ist nun der Inhalt der Schutzöffnung, $= F$, so hat man das Ausflußquantum in der Zeit t:

$$V = \frac{\mu F t \sqrt{2g}}{12}\left(\sqrt{h_0} + 4\sqrt{h_1} + 2\sqrt{h_2} + 4\sqrt{h_3} + \sqrt{h_4}\right),$$

und daher das Zuflußquantum pr. Secunde:

$$Q = \frac{V}{t + t_1} = \frac{\mu F t \sqrt{2g}}{12(t + t_1)}\left(\sqrt{h_0} + 4\sqrt{h_1} + 2\sqrt{h_2} + 4\sqrt{h_3} + \sqrt{h_4}\right).$$

Beispiel. Um das zum Umtriebe eines Wasserrades zu benutzende Wasser eines Baches zu messen, hat man dasselbe durch eine Spundwand, Fig. 816, eingedämmt und nach Eröffnung der rectangulären Mündung in derselben Folgendes beobachtet: anfängliche Druckhöhe, 2 Fuß, nach 30″, 1,8 Fuß, nach 60″, 1,55 Fuß, nach 90″, 1,3 Fuß, nach 120″, 1,15 Fuß, nach 150″, 1,05 Fuß, und nach 180″, 0,9 Fuß; Breite der Oeffnung, = 2 Fuß, Höhe der Oeffnung, = ½ Fuß, Zeit zum Zurücksteigen auf die erste Höhe bei verschlossener Oeffnung, = 110″. Zunächst beträgt die mittlere Ausflußgeschwindigkeit

$$v = \frac{7{,}906}{18}\left(\sqrt{2} + 4\sqrt{1{,}8} + 2\sqrt{1{,}55} + 4\sqrt{1{,}3} + 2\sqrt{1{,}15} + 4\sqrt{1{,}05} + \sqrt{0{,}9}\right)$$
$$= 0{,}4392\,(1{,}414 + 5{,}364 + 2{,}490 + 4{,}561 + 2{,}145 + 4{,}099 + 0{,}949)$$
$$= 0{,}4392 \,.\, 21{,}022 = 9{,}233 \text{ Fuß};$$

nun ist aber $F = 2 \,.\, \frac{1}{2} = 1$ Quadratfuß, daher folgt die theoretische Ausflußmenge = 9,233 Cubikfuß. Nimmt man den Ausflußcoefficienten = 0,61 an, so erhält man endlich das gesuchte Wasserquantum:

$$Q = \frac{0{,}61 \,.\, 180}{180 + 110} \cdot 9{,}233 = 3{,}495 \text{ Cubikfuß}.$$

§. 485 **Wasserzoll.** Um kleine Wassermengen zu messen, bedient man sich auch wohl des Ausflusses durch kreisrunde, 1 Zoll weite Mündungen in einer dünnen Wand unter einem gegebenen Drucke. Man nennt die Wassermenge, welche eine solche Oeffnung unter dem kleinsten Drucke, oder dann, wenn der Wasserspiegel nur eine Linie über der obersten Stelle der Mündung steht, einen Wasser- oder Brunnenzoll (franz. pouce d'eau; engl. water-inch). Die Franzosen nehmen an, daß einem Wasserzolle (alt Parif. Maß) in 24 Stunden 15 Pinten oder 19,1953 Cubikmeter Wasser, also

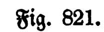
in 1 Stunde 0,7998 Cubikmeter und
in 1 Minute 0,01333 „

entspricht, doch weichen ältere Angaben von Mariotte, Couplet und Bossut hiervon nicht unbedeutend ab. Nach Hagen liefert ein Wasserzoll (für das preuß. Maß) in 24 Stunden 520 Cubikfuß, also in der Minute 0,3611 Cubikfuß. Der Prony'sche doppelte Wassermodul, welcher einer

Mündung von 2 Centimeter Durchmesser bei 5 Centimeter Druck entspricht und in 24 Stunden 20 Cubikmeter Wasser liefert, hat keine allgemeine Aufnahme gefunden.

Die Beobachtungen lassen sich sicherer anstellen, wenn man eine größere Druckhöhe hat; am einfachsten ist es, wenn man diese Höhe, wie den Durchmesser der Mündung, 1 Zoll annimmt. Nach den Herren Bornemann und Röting giebt ein solcher Wasserzoll täglich 642,8 Cubikfuß Wasser (s. den Ingenieur Seite 463).

Der Apparat, an dem man mit Hülfe von Wasserzollen das Wasser mißt, ist in Fig. 821 abgebildet. Das zu messende Wasser fließt durch die Röhre A in einen Kasten B, aus diesem tritt es durch unten in der Scheidewand CD angebrachte Löcher in den Kasten E, und aus diesem fließt es durch eine horizontale Reihe von genau 1 Zoll weiten und in Blech ausgeschnittenen kreisrunden Mündungen F in das Reservoir G. Damit sich aber der Wasserspiegel nur eine Linie über den Köpfen dieser Mündungen stellt, ist es nöthig, daß diese in hinreichender Zahl vorhanden seien, und daß man einen Theil derselben durch Stöpsel verschließe. Zur genaueren Angabe bringt man noch Mündungen F_1 an, welche $^1/_2$, $^1/_4$ Wasserzoll durchlassen. Bei großen Wassermengen theilt man wohl erst das ganze Wasser, und mißt auf diese Weise nur einen Theil, z. B. den zehnten. Dieses Theilen ist leicht dadurch zu bewirken, daß man das Wasser erst in ein Reservoir mit einer gewissen Anzahl, in gleichem Niveau befindlicher Mündungen leitet, und nur das von der einen Mündung gelieferte Wasser in dem oben abgebildeten Apparate auffängt.


Fig. 821.



Anmerkung. Man kann auch die Hähne und andere Regulirungsapparate zur Wassermessung anwenden, wenn man den jeder Stellung entsprechenden Widerstandscoefficienten kennt. Ist h die Druckhöhe, F der Querschnitt des Rohres, und μ der Ausflußcoefficient bei völlig geöffnetem Hahne, so hat man die Ausflußmenge:

$$Q = \mu F \sqrt{2gh},$$

sowie umgekehrt:

$$\mu = \frac{Q}{F\sqrt{2gh}} \text{ und } \frac{1}{\mu^2} = \left(\frac{F}{Q}\right)^2 \cdot 2gh.$$

Setzt man nun den einer bestimmten Hahnstellung entsprechenden und aus den oben

mitgetheilten Tabellen zu entnehmenden Widerstandscoefficienten, $= \zeta$, so hat man die entsprechende Ausflußmenge:

$$Q_1 = F \sqrt{\frac{2gh}{\frac{1}{\mu^2} + \zeta}} = \frac{\mu F \sqrt{2gh}}{\sqrt{1 + \mu^2 \zeta}} = \frac{Q}{\sqrt{1 + \mu^2 \zeta}}$$

$$= \frac{Q}{\sqrt{1 + \zeta \left(\frac{Q}{F}\right)^2 \cdot \frac{1}{2gh}}}.$$

Zur Bequemlichkeit kann man sich hiernach eine Tabelle construiren, so daß es nur eines Blickes auf diese bedarf, um die einer gewissen Hahnstellung entsprechende Ausflußmenge, oder um die einem gegebenen Ausflußquantum entsprechende Stellung des Hahnes zu finden. Ist z. B. $\mu = 0{,}7$ und $F = 4$ Quadratzoll, so hat man:

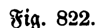
$$Q_1 = \frac{0{,}7 \,.\, 4 \,.\, 12 \,.\, 7{,}906 \sqrt{h}}{\sqrt{1 + 0{,}49 \,.\, \zeta}} = 265{,}6 \sqrt{\frac{h}{1 + 0{,}49\, \zeta}} \text{ Cubikzoll,}$$

oder, wenn h constant 1 Fuß mißt:

$$Q_1 = \frac{265{,}6}{\sqrt{1 + 0{,}49\, \zeta}}.$$

Wenn nun den Hahnstellungen 5°, 10°, 15°, 20°, 25° u. s. w. die Widerstandscoefficienten 0,057; 0,293; 0,758; 1,559; 3,095 zukommen, so entsprechen denselben die Ausflußmengen: 262,1; 248,4; 226,8; 200,0; 166,4 Cubikzoll.

§. 486 Um den Ausfluß durch eine Mündung F, Fig. 822, zu reguliren, wendet man auch einen Hahn oder eine Klappe A, Fig. 822 an, welche durch einen


Fig. 822.

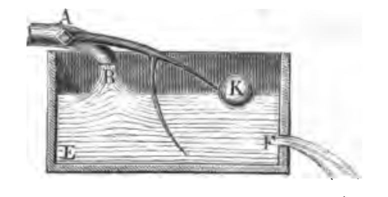
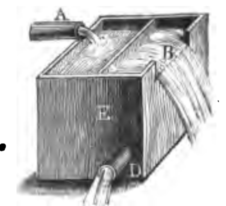


Fig. 823.



Schwimmer K mittels eines Hebels regulirt wird, so daß durch B immer nur so viel Wasser zu-, als durch F abfließt.

Sehr einfach läßt sich auch der Abfluß des Wassers aus einem Reservoir BDE, Fig. 823, durch eine tiefere Mündung oder Röhre D, mittels eines breiten Ueberfalles B reguliren, da hier eine mäßige Veränderung des Wasserzuflusses durch A, eine mäßige Vergrößerung des Wasserstandes über der Schwelle B, und eine verhältnißmäßig unbedeutende Vergrößerung der Druckhöhe der Ausflußmündung zur Folge hat.

Bezeichnet F die Größe der Ausmündung D, h die Höhe der Ueberfallschwelle über der Mitte dieser Mündung, h_1 die Höhe des Wasserspiegels

über der gedachten Schwelle, so hat man bei dem Ausflußcoefficienten μ das Abflußquantum durch D:

$$Q = \mu F \sqrt{2g(h + h_1)}.$$

Setzt man die Druckhöhe h_1 des Ueberfalles, welche sich aus dem Abflußquantum Q_1 der Breite b_1 und dem Ausflußcoefficienten μ_1, mittels der Gleichung

$$Q_1 = {}^2/_3\, \mu_1 b_1 \sqrt{2gh_1^3}, \text{ oder durch die Formel}$$

$$h_1 = \left[\frac{1}{2g}\left(\frac{{}^3/_2\, Q_1}{\mu_1 b_1}\right)^2\right]^{1/3},$$

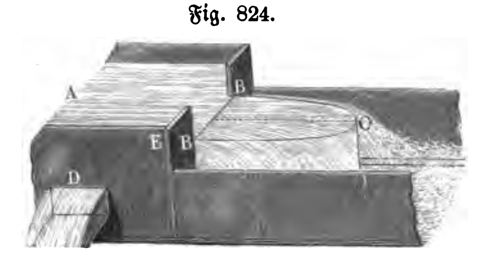
bestimmen läßt, in diesen Ausdruck ein, so erhält man die Formel

$$Q = \mu F \sqrt{2gh + \left(\frac{3gQ_1}{\mu_1 b_1}\right)^{2/3}},$$

woraus zu ersehen ist, daß sich Q mit Q_1 um so weniger verändert, je größer die Schwellenhöhe h und je größer die Breite b_1 des Ueberfalles ist.

Die Ueberfallbreite b_1 läßt sich dadurch leicht vergrößern, daß man den Ueberfall einer Bogenform, wie BOB, Fig. 824, giebt. Die Ausmündung D giebt dann ein ziemlich constantes Wasserquantum, obgleich der Zufluß bei A sehr variabel ist, weil die Höhe des Wassers über der langen bogenförmigen Schwelle immer klein bleibt gegen die Höhe dieser Schwelle über der Mitte der Ausflußöffnung.

Fig. 824.

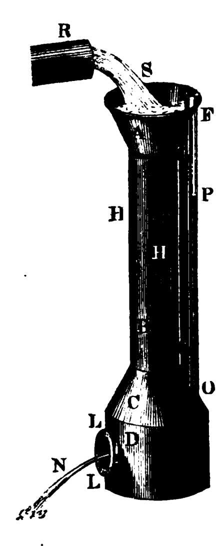


Anmerkung. Einen solchen Wassertheiler aus Eisenblech hat der Herr Oberkunstmeister Schwamkrug für den Wernergraben bei Freiberg construirt. Derselbe führt durch die rectanguläre Mündung D von 5 Fuß Breite und 1 Fuß Höhe fast constant 40 Cubikfuß Wasser pr. Secunde ab, während das übrige Wasser durch den Ueberfall, dessen Schwelle 2 Fuß über der oberen Mündungskante liegt, in den Graben fließt, welcher es nach dem Punkte des Bedarfs fortführt.

§. 487 **Hydrometrischer Becher.** Zur Ausmessung kleiner fließenden Wassermengen kann man sich eines kleinen in Fig. 825 abgebildeten Gefäßes bedienen, welchem ich den Namen hydrometrischer Becher gegeben habe. Dieses Instrument besteht aus einer 3 Zoll weiten und 12 Zoll langen Röhre B mit einem trichterförmigen Einmündungsstücke A und einem 6 Zoll weiten und ebenso hohen Gefäße D, welches durch ein conisches Zwischenstück C mit B fest verbunden ist. Dieses Gefäß ist mit einem Seitenloch LL versehen, in welches verschiedene, kreisförmige Mündungen in der dünnen

Wand bildende Mundstücke eingesetzt werden können. Man hält dieses Instrument mittels der Henkel H, H unter das z. B. durch eine Röhre R ausfließende Wasser S und läßt das auf diese Weise abgefangene Wasser wieder durch das Mundstück LL abfließen. Um das eingeflossene Wasser zu beruhigen, ist noch in dem Reservoir D ein feines Sieb angebracht, und um die Druckhöhe des Wassers beobachten zu können, ist eine Glasröhre OP angesetzt, welche an einer Messingscala aufsteigt und sich unten, $^1/_2$ Zoll über dem Boden des Gefäßes D endigt. Aus der beobachteten Druckhöhe h, dem bekannten Querschnitt des Mundstückes und dem entsprechenden Ausflußcoefficienten läßt sich dann die Ausflußmenge mittels der Formel

Fig. 825.



$$Q = \mu F \sqrt{2gh}$$

berechnen.

Wenn man sich eine kleine Tabelle anfertigt, so kann man natürlich die Berechnung nach dieser Formel ganz ersparen, und es ist höchstens nur eine einfache Interpolation zu den Tabellenwerthen erforderlich. Ist d der Durchmesser der Mündung, so hat man

$$F = \frac{\pi d^2}{4}, \text{ und daher:}$$

$$Q = \frac{\mu \pi}{4} d^2 \sqrt{2gh} = \frac{\mu \pi}{4} \sqrt{2g} . d^2 \sqrt{h}.$$

Die Ausflußmenge Q wird sowohl das Doppelte bei dem doppelten Querschnitte oder doppelten d^2 als auch bei der vierfachen Druckhöhe. Richtet man daher das Instrument so ein, daß die Maximaldruckhöhe das Vierfache der Minimaldruckhöhe, z. B. jene 12 und diese 3 Zoll beträgt, und bedient man sich einer Sammlung von Mundstücken, deren Durchmesser die geometrische Reihe

$$d, \sqrt{2}\, d, 2\, d, 2\sqrt{2}\, d, 4\, d \text{ u. s. w.}$$

$$\text{d. i. } d;\ 1{,}414\, d;\ 2\, d;\ 2{,}828\, d,\ 4\, d \text{ u. s. w.}$$

bilden, so erhält man dadurch ein Mittel, zur Bestimmung aller Wassermengen innerhalb des Minimums, welches die kleinste Mündung mit dem Durchmesser d bei der kleinsten Druckhöhe giebt, und des Maximums, welches der größten Mündung mit dem Durchmesser $\sqrt{n} . d$ und der größten Druckhöhe $4\,h$ entspricht.

Nimmt man für

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.
$d =$	$1/8$ $= 0{,}1250$	$1/8 \sqrt{2}$ $= 0{,}1768$	$1/4$ $= 0{,}2500$	$1/4 \sqrt{2}$ $= 0{,}3535$	$1/2$ $= 0{,}5000$	$1/2 \sqrt{2}$ $= 0{,}7071$	1 Zoll $= 1{,}0000$
$\mu =$	0,690	0,675	0,660	0,647	0,635	0,627	0,620

an, so läßt sich folgende zum Gebrauch nützliche Tabelle zusammenstellen.

Tabelle

über die stündliche Wassermenge in Cubikfußen für folgende Mündungen:

Druckhöhe h in Zollen.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.
3	0,84	1,64	3,20	6,28	12,32	24,35	48,12
4	0.97	1,90	3,70	7,26	14,23	28,12	55,56
5	1,08	2,11	4,13	8,11	15,91	31,44	62,12
6	1,18	2,31	4,53	8,88	17,42	34,43	68,05
7	1,28	2,50	4,89	9,59	18,82	37,21	73,57
8	1,37	2,68	5,23	10,26	20,12	39,76	78,58
9	1,45	2,84	5,55	10,88	21,34	42,18	83,35
10	1,53	2,99	5,85	11,48	22,50	44,46	87,86
11	1,60	3,13	6,13	12,03	23,59	46,62	92,14
12	1,67	3.27	6,40	12,56	24,64	48,70	96,24
13	1,74	3,40	6,66	13,07	25,65	50,69	100,17

Der Gebrauch dieser Tabelle ist aus folgendem Beispiele zu ersehen.

Beispiel. Um die Ergiebigkeit eines Brunnens zu ermitteln, hat man das Wasser desselben durch einen hydrometrischen Becher fließen lassen, und gefunden, daß beim Ausflusse durch die Mündung V. (von $1/2$ Zoll Durchmesser) der Beharrungszustand dann eintrat, als die Druckhöhe 10,4 Zoll war. Der Tabelle zufolge ist für $h = 10$ Zoll:

$Q = 22{,}50$ Cubikfuß stündlich,

und für $h = 11$ Zoll:

$Q = 23{,}59$ Cubikfuß,

folglich die Differenz für 1 Zoll, 1,09 Cubikfuß, und für 0,4 Zoll, $0{,}4 \cdot 1{,}09 = 0{,}436$ Cubikfuß. Hieraus ergiebt sich das Wasserquantum für $h = 10{,}4$ Zoll Druckhöhe:

$Q = 22{,}50 + 0{,}436 = 22{,}94$ Cubikfuß.

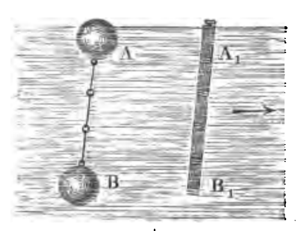
§. 488

Schwimmer. Die Wassermengen von größeren Bächen, Canälen und von Flüssen lassen sich nur mittels die Geschwindigkeit angebender Hydrometer bestimmen. Unter diesen Instrumenten sind aber die Schwimmer (franz. flotteurs; engl. floating-bodies) die einfachsten. Man kann zwar hierzu jeden schwimmenden Körper gebrauchen, doch ist es sicherer, Körper von mittlerer Größe, welche nur wenig specifisch leichter als Wasser sind, hierzu zu verwenden. Körper von ungefähr $^1/_{10}$ Cubikfuß Inhalt sind hinreichend groß. Sehr große Körper nehmen nicht leicht die Geschwindigkeit des Wassers an, und sehr kleine Körper lassen sich wieder, namentlich wenn sie viel aus dem Wasser hervorragen, leicht durch zufällige Umstände, zumal durch die Luft über dem Wasserspiegel, in ihrer Bewegung stören. Oft wendet man einfache Holzstücke an, gut ist es aber, wenn dieselben mit einer hellen Firnißfarbe überstrichen sind, und noch besser sind die hohlen Schwimmer, wie Glasflaschen, Blechkugeln u. s. w., weil man diese nach Belieben mit Wasser füllen kann. Am häufigsten wendet man aber die Schwimmkugeln an. Dieselben werden von 4 bis 12 Zoll Durchmesser aus Messingblech verfertigt, sie bekommen, um sie nicht leicht aus dem Auge zu verlieren, einen Anstrich von lichter Oelfarbe, und erhalten auch noch eine Oeffnung mit einem Halse, um sie mit Wasser anfüllen und verstöpseln zu können. Eine solche Schwimmkugel A, Fig. 826, giebt allerdings nur die Geschwindigkeit an der Oberfläche und sogar oft nur die im Stromstriche an, allein man kann durch das Aneinanderhängen zweier Kugeln A und B, Fig. 827, auch die Geschwindigkeiten in verschiedenen Tiefen bestimmen. In diesem Falle wird die eine Kugel B, welche unter Wasser schwimmen soll, ganz mit Wasser, die andere aber, welche im Wasserspiegel zu schwimmen bestimmt ist, nur so viel mit Wasser angefüllt, daß sie nur wenig aus dem Wasser hervorragt. Beide Kugeln werden durch einen Faden oder durch einen Draht oder durch eine dünne Drahtkette mit einander verbunden. Zuerst bestimmt man durch die einfache Kugel die Oberflächengeschwindigkeit c_0, und dann beobachtet man durch die Kugelverbindung die mittlere Geschwindigkeit c beider; bezeichnet man nun die Geschwindigkeit in der Tiefe der zweiten Kugel durch c_1, so läßt sich setzen:

Fig. 826.



Fig. 827.



$$c = \frac{c_0 + c_1}{2}, \text{ und daher umgekehrt: } c_1 = 2\,c - c_0.$$

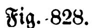
Wenn man nun beide Kugeln durch längere und längere Drähte mit ein-

ander verbindet, so kann man auf diese Weise nach und nach die Geschwindigkeiten in größeren und größeren Tiefen finden. Uebrigens ergiebt sich auch die mittlere Geschwindigkeit c eines Perpendikels, wenn man die zweite Kugel nahe über dem Boden schwimmen läßt und ebenfalls

$$c = \frac{c_0 + c_1}{2}$$

setzt; genauer aber noch, wenn man das Mittel aus allen beobachteten Geschwindigkeiten in einem Perpendikel nimmt.

Um die mittlere Geschwindigkeit in einem Perpendikel anzugeben, wendet man auch oft den in Fig. 828 abgebildeten Schwimmstab $A_1 B_1$ an, namentlich ist dieser bei Messungen in Canälen und Gräben bequem, zumal wenn er aus kurzen Stücken zusammengeschraubt werden kann. Der Schwimmstab, welchen der Verfasser anwendet, ist aus 15 ausgehöhlten Theilen, jeder von 1 Decimeter Länge, zusammengesetzt. Damit derselbe ziemlich aufrecht schwimme, wird stets das unterste Stück so stark mit Schrot angefüllt, daß der Kopf beim Schwimmen nur wenig aus dem Wasser hervorragt. Die Anzahl der zusammenzuschraubenden Stücke hängt natürlich von der Tiefe des Canales ab.



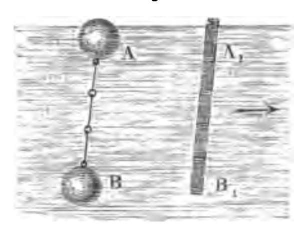


Fig. 828.

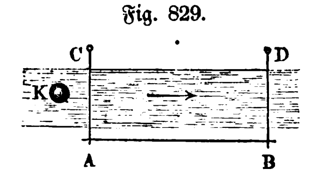
An dem Schwimmstabe, sowie an der Schwimmkugelverbindung läßt sich auch wahrnehmen, daß bei ungehinderter Bewegung des Wassers in Betten die Geschwindigkeit am Wasserspiegel größer ist als am Boden, weil der Kopf des Stabes dem Fuße und die obere Kugel der unteren etwas vorausschwimmt. Nur bei durch Verengungen, z. B. durch Brückenpfeiler gebildeten Aufstauungen, findet das Gegentheil statt.

Anmerkung. In der Regel ist, namentlich bei großen Schwimmern, wie Schiffen u. s. w., die Geschwindigkeit der schwimmenden Körper etwas größer als die des Wassers, weniger deshalb, weil diese Körper beim Schwimmen von einer durch die Oberfläche des Wassers gebildeten schiefen Ebene herabgleiten, als deshalb, weil sie nicht oder nur zum Theil an der unregelmäßigen inneren Bewegung des Wassers Theil nehmen; doch ist die Abweichung bei kleinen Schwimmern klein genug, um sie vernachlässigen zu können.

§. 489 **Geschwindigkeits- und Querschnittsbestimmung.** Die Geschwindigkeit einer Schwimmkugel findet man, indem man mit einer guten Secundenuhr oder an einem halbe Secunden schlagenden Lothe oder Pendel (§. 327) die Zeit t beobachtet, welche diese auf dem Wasser schwimmend braucht, um eine an einem Ufer abgesteckte und ausgemessene Strecke $AB = s$, Fig. 829, zurückzulegen. Es ist dann die gesuchte Geschwindigkeit der Kugel, $c = \frac{s}{t}\cdot$ Damit die

Zeit t genau dem am Ufer abgemessenen Wege entsprechend gefunden werde, ist es nöthig, mit Hülfe eines Winkelkreuzes oder Winkelspiegels am jenseitigen Ufer zwei, Perpendikel auf AB bezeichnende Signalstangen C und D einzustecken. Stellt man sich hinter A, so kann man den Zeitpunkt beobachten, wenn der etwas oberhalb A eingesetzte Schwimmer K in das Alignement AC kommt, und begiebt man sich hinter B, so kann man ebenfalls an der in der Hand gehaltenen Uhr beobachten, wann der Schwimmer in das Alignement BD gelangt, und man findet dann durch Subtraction der Beobachtungszeiten die gesuchte und der Durchlaufung von s entsprechende Zeit t.

Fig. 829.



Außer der mittleren Geschwindigkeit c des Wassers ist auch noch der Inhalt F des Querprofiles erforderlich, um das Wasserquantum $Q = Fc$ zu bestimmen. Um diesen Inhalt angeben zu können, ist es aber nöthig, daß man die Breite und mittlere Tiefe des Wassers kenne. Die Tiefe mißt man mit einer eingetheilten Sondirstange AB, Fig. 830, mit länglichem Querschnitte und einem Brettchen B am Fuße; bei größeren Tiefen kann man sich auch einer Sondirkette bedienen, an deren Ende eine eiserne Platte hängt, die sich beim Einsenken auf das Grundbette aufsetzt. Die Breite und die den gemessenen Tiefen entsprechenden Abscissen oder Abstände von den Ufern ergeben sich bei Canälen und schmalen Bächen EFG, Fig. 831, durch Ausspannen einer Meßkette AB oder Legen einer Stange u. s. w. quer über das fließende Wasser. Bei breiten Flüssen bestimmt man sie mit Hülfe eines Meßtisches M, den man in schicklicher Entfernung AO vom zu messenden Querprofile EF, Fig. 832 (a. f. S), aufstellt. Ist ao auf der Mensel die verjüngte Entfernung AO der Standpunkte A und O von einander, und hat man ao in der Richtung von AO und dadurch auch die vorher beim Aufstellen des Meßtisches aufgetragene Breitenrichtung af mit der abgesteckten Breitenlinie AF parallel gestellt, so schneidet jede Visirlinie nach den Punkten E, F, G u. s. w. im Querprofile, entsprechende Punkte e, f, g auf der Mensel ab, und es sind ae, af, ag u. s. w. die Entfernungen AE, AF, AG u. s. w. im verjüngten Maße.

Fig. 830.

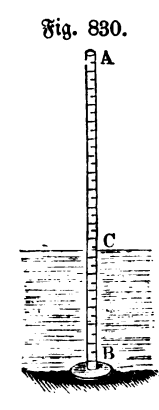
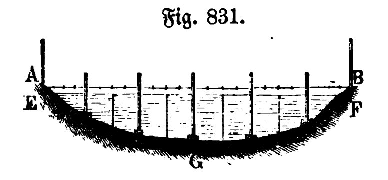


Fig. 831.



Man hat also beim Einsetzen der Sondirstange und dem dadurch bewirkten Tiefenmessen nicht erst nöthig, die Entfernungen der entsprechenden Punkte von den Ufern zu messen, wenn der am Meßtische stehende Ingenieur die Sondirstange beim Einsetzen in der Linie EF anvisirt.

Fig. 832.

Besteht nun die Breite EF, Fig. 831, eines Querprofiles aus den Theilen b_1, b_2, b_3 u. s. w. und sind die mittleren Tiefen innerhalb dieser Theile a_1, a_2, a_3, sowie die mittleren Geschwindigkeiten c_1, c_2, c_3 u. s. w., so hat man den Inhalt des Querprofiles:

$$F = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \cdots,$$

die Wassermenge:

$$Q = a_1 b_1 c_1 + a_2 b_2 c_2 + a_3 b_3 c_3 + \cdots,$$

und endlich die mittlere Geschwindigkeit:

$$c = \frac{Q}{F} = \frac{a_1 b_1 c_1 + a_2 b_2 c_2 + \cdots}{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots}.$$

Beispiel. An einer ziemlich geraden und unveränderlichen Flußstrecke hat man Folgendes gefunden:

	Fuß.	Fuß.	Fuß.	Fuß.	Fuß.
In den Mittelpunkten der Breitentheile:	5	12	20	15	7
die Tiefen	3	6	11	8	4
die mittleren Geschwindigkeiten . .	1,9	2,3	2,8	2,4	2,1

Es läßt sich daher setzen, der Inhalt des Querprofiles:

$F = 5 . 3 + 12 . 6 + 20 . 11 + 15 . 8 + 7 . 4 = 455$ Quadratfuß,

das Wasserquantum:

$Q = 15 . 1,9 + 72 . 2,3 + 220 . 2,8 + 120 . 2,4 + 28 . 2,1 = 1156,9$ Cbfß.

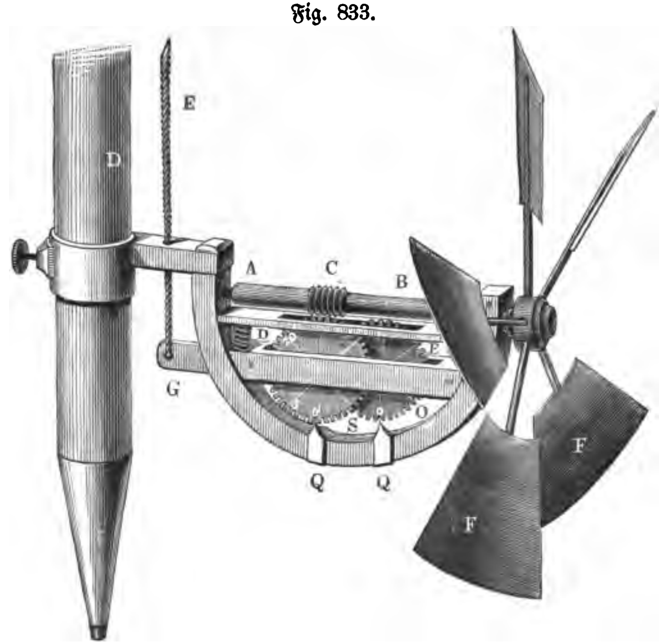
Die mittlere Geschwindigkeit ist:

$$c = \frac{1156,9}{455} = 2,54 \text{ Fuß}.$$

§. 490 **Hydrometrischer Flügel.** Das vorzüglichste Hydrometer ist das hydrometrische Flügelrad von Woltmann (franz. Moulinet de Woltmann; engl. Tachometer of Woltmann), Fig. 833. Es besteht aus einer

horizontalen Welle AB mit 2 bis 5 schief gegen die Axenrichtung stehenden Flächen oder Flügeln F, und giebt, unter das Wasser getaucht und der

Fig. 833.



Bewegungsrichtung desselben entgegengehalten, durch die Anzahl seiner Umdrehungen innerhalb einer gewissen Zeit die Geschwindigkeit des fließenden Wassers an. Um die Anzahl dieser Umdrehungen ablesen zu können, erhält die Welle ein paar Schraubengänge C, und läßt man diese zwischen die Zähne eines Rades D greifen, auf dessen Seitenflächen Ziffern eingravirt sind, welche an einem festen Zeiger die Anzahl der Umdrehungen der Flügelwelle angeben. Um aber eine große Anzahl von Umdrehungen beobachten zu können, wird auf die Welle dieses Zahnrades noch ein Getriebe aufgesetzt, das in ein zweites Zahnrad E eingreift, an dem sich, gleichsam wie am Stundenweiser einer Uhr, vielfache, z. B. fünf- oder zehnfache der Flügelumdrehungen ablesen lassen. Hat z. B. jedes der beiden Zahnräder 50 Zähne, und das Getriebe deren 10, so dreht sich das zweite Rad um einen Zahn, während das erste um fünf Zähne fortrückt, oder das Flügelrad fünf Umdrehungen macht. Wenn der Zeiger des ersten Rades auf $27 = 25 + 2$ und der des zweiten auf 32 steht, so ist hiernach die entsprechende Umdrehungszahl des Flügels:

$$= 32.5 + 2 = 162.$$

Das ganze Instrument wird mit einer Blechfahne an einen Stab geschraubt,

um es bequem ins Wasser eintauchen und dem Strome entgegenhalten zu können. Damit aber das Räderwerk nur während der Beobachtungszeit umlaufe, läßt man seine Axen in Pfannen umgehen, welche auf einem Hebel GO sitzen, der durch eine Feder niedergedrückt wird, so daß ein Eingreifen der Zähne des ersten Rades in die Schraubengänge nur so lange statt hat, als man den Hebel mittels einer Schnur GE emporzieht.

Die Umdrehungszahl eines Flügels in einer gewissen Zeit, z. B. in einer Secunde, ist nicht genau der Geschwindigkeit des Wassers proportional, es läßt sich daher auch nicht $v = \alpha . u$, wo u die Umdrehungszahl, v die Geschwindigkeit und α die Erfahrungszahl bezeichnen, setzen; es ist vielmehr zu setzen:

$$v = v_0 + \alpha u,$$

oder genauer:

$$v = v_0 + \alpha u + \beta u^2 \cdots,$$

oder noch genauer:

$$v = \alpha u + \sqrt{v_0^2 + \beta u^2},$$

wo v_0 diejenige Geschwindigkeit bezeichnet, bei welcher das Wasser nicht mehr im Stande ist, den Flügel in Umdrehung zu setzen, α und β aber Erfahrungscoefficienten ausdrücken. Die Constanten v_0, α, β sind für jedes Instrument besonders zu ermitteln. Mit Hülfe derselben ergiebt sich durch eine einzige Beobachtung die Geschwindigkeit, doch ist es sicherer, deren immer wenigstens zwei anzustellen, und den mittleren Werth als den richtigen einzuführen.

Beispiel. Wenn bei einem Flügelrade $v_0 = 0{,}110$ Fuß, $\alpha = 0{,}480$, und $\beta = 0$, also $v = 0{,}11 + 0{,}48\, u$ ist, und man hat bei einer Beobachtung mit diesem Instrumente in einer Zeit von 80 Secunden eine Umdrehungszahl von 210 gefunden, so ist die entsprechende Geschwindigkeit des Wassers:

$$v = 0{,}11 + 0{,}48 \cdot \frac{210}{80} = 0{,}11 + 1{,}26 = 1{,}37 \text{ Fuß}.$$

Anmerkung 1. Die Constanten v_0, α und β hängen vorzüglich von der Größe des Stoßwinkels, d. i. von dem Winkel ab, welchen die Flügelfläche mit der Bewegungsrichtung des Wassers und also auch mit der Axenrichtung des Flügels einschließt. Um bei kleinen Geschwindigkeiten noch ziemlich genau beobachten zu können, ist es gut, den Stoßwinkel groß, d. i. gegen 70° zu machen. Uebrigens ist es zweckmäßig, Flügel von verschiedener Größe und verschiedenen Stoßwinkeln zu haben, um, je nachdem die Tiefe oder die Geschwindigkeit des fließenden Wassers größer oder kleiner ist, den einen oder den anderen anwenden zu können.

Anmerkung 2. Hätte der hydrometrische Flügel bei seiner Umdrehung keine Hindernisse zu überwinden, so würde der Flügel AB, Fig. 934, den Weg $CC_1 = CD . tang. CDC_1$ zurücklegen, während das Wasser um CD fortläuft, bezeichnet daher v die Geschwindigkeit des Wassers und δ den Stoßwinkel

$OCB = CDC_1$ desselben, so hat man unter dieser Voraussetzung, die mittlere Umdrehungsgeschwindigkeit des Flügels:

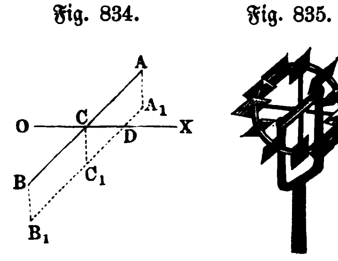


Fig. 834. Fig. 835.

$$v_1 = v\ tang.\ \delta;$$

es ist hiernach zu ermessen, daß bei dem mittleren Flügelradius r die Umdrehungszahl des Flügelrades

$$u = \frac{v_1}{2\pi r} = \frac{v\ tang.\ \delta}{2\pi r}$$

ausfällt, und folglich direct wie die Geschwindigkeit v des Wassers und wie die Tangente des Stoßwinkels der Flügel, sowie umgekehrt wie der mittlere Flügelhalbmesser wächst.

Anmerkung 3. Um die Oberflächengeschwindigkeit des Wassers zu finden, wendet man auch wohl ein kleines Blechrädchen, wie Fig. 835 repräsentirt, an, indem man nur dessen Untertheil ins Wasser eintaucht. Die Anzahl der Umdrehungen desselben läßt sich durch ein Räderwerk genau wie beim hydraulischen Flügel angeben.

§. 491 Um die Constanten oder Coefficienten eines hydrometrischen Flügelrades zu finden, ist es nöthig, dieses Instrument in fließende Wasser einzuhalten, deren Geschwindigkeiten bekannt sind, und die entsprechenden Umdrehungszahlen zu beobachten. Wiewohl man eigentlich nur so viel Beobachtungen braucht, als Constanten vorhanden sind, so ist es doch viel sicherer, so viel Beobachtungen wie möglich, und namentlich auch bei sehr verschiedenen Geschwindigkeiten anzustellen, weil man dann die Methode der kleinsten Quadrate (s. analyt. Hülfslehren Art. 36) anwenden und dadurch den Einfluß der zufälligen Beobachtungsfehler herabziehen kann. Uebrigens läßt sich die Geschwindigkeit des Wassers entweder durch eine Schwimmkugel oder auch dadurch finden, daß man das Wasser in einem Aichgefäße auffängt, und die darin gemessene Wassermenge durch das Querprofil dividirt. Bei Anwendung der Schwimmkugeln ist ruhige Luft und eine gerade und gleichförmig fließende Wasserstrecke nöthig. Der Flügel ist an mehreren Stellen des von dem Schwimmer durchlaufenen Weges einzuhalten, und es ist auch die Genauigkeit befördernd, wenn der Durchmesser der Schwimmkugel ungefähr gleich ist dem Durchmesser des Flügelrades.

Viele Vortheile gewährt die zweite Bestimmungsweise, wo man das Wasser, in welches der Flügel eingetaucht wird, in einem Aichkasten auffängt. Zu diesem Zwecke, und zum Justiren der Hydrometer überhaupt, ist es sehr gut, wenn der Hydrauliker über ein besonderes, aus einem Ausflußkasten, einem Aichreservoir und einem zwischen beiden befindlichen Gerinne bestehendes hydraulisches Observatorium verfügen kann. Bei einem solchen ist ohne Umstände dem Wasser jede beliebige Geschwindigkeit zu ertheilen, indem man nicht nur den Eintritt in das Gerinne, sondern auch die Bewegung

in demselben durch Einsatzbretter nach Willkür reguliren kann. Bei den Beobachtungen hat man den Flügel an verschiedenen Stellen eines Querprofiles im Gerinne einzuhalten, die Tiefe dieses Profiles durch Wasserstandsscalen zu messen, und endlich das in irgend einer Zeit durchgelaufene Wasser im unteren Reservoir zu aichen (§. 480). Den Inhalt F des Querprofiles erhält man durch Multiplication der mittleren Wassertiefe mit der mittleren Breite, und das Wasserquantum Q erhält man aus dem mittleren Querschnitte G des Aichmaßes und der Höhe s des in der Zeit zugeflossenen Wasserquantums durch die Formel

$$Q = \frac{Gs}{t};$$

aus Q und F folgt zuletzt die mittlere Wassergeschwindigkeit:

$$v = \frac{Q}{F} = \frac{Gs}{Ft}.$$

Die entsprechende Umdrehungszahl u des Flügels ist das Mittel aus allen Umdrehungen, welche man erhält, wenn man das Instrument in verschiedenen Breiten und Tiefen des ausgemessenen Querprofiles einhält.

Hat man nun bei einer Versuchsreihe die mittleren Geschwindigkeiten v_1, v_2, v_3 u. s. w. und die entsprechenden Umdrehungszahlen gefunden, so erhält man durch Substitution in der Formel:

$$v = v_0 + \alpha u,$$

oder in der genaueren:

$$v = \alpha u + \sqrt{v_0^2 + \beta u^2}$$

so viel Bestimmungsgleichungen für die Constanten v_0, α, β, als Beobachtungen angestellt worden sind, und man kann nun hieraus die Constanten selbst finden, indem man entweder das Art. 36 der analyt. Hülfslehren angegebene Verfahren anwendet, oder indem man diese Gleichungen in so viel Gruppen theilt, als unbekannte Constanten vorhanden sind, und diese durch Addition zu so viel Bestimmungsgleichungen vereinigt, als zur Ermittelung von v_0, α und nach Befinden β, nöthig sind.

Unter der Voraussetzung, daß die passiven Widerstände des Instrumentes klein genug sind, um sie außer Acht lassen zu können, läßt sich $v = \alpha u$ setzen und α dadurch finden, daß man das Flügelrad im stillstehenden Wasser fortbewegt und hierbei die Anzahl $n = ut$ der Umdrehungen beobachtet, welche es bei Durchlaufung eines Weges $s = vt$ macht. Es ist dann:

$$\alpha = \frac{v}{u} = \frac{vt}{ut} = \frac{s}{n}.$$

Anmerkung 1. Wenn man die einfachere Formel mit zwei Constanten zu Grunde legt, so kann man nach der Methode der kleinsten Quadrate setzen:

$$v_0 = \frac{\Sigma(y^2)\,\Sigma(x) - \Sigma(xy)\,\Sigma(y)}{\Sigma(x^2)\,\Sigma(y^2) - [\Sigma(xy)]^2} \text{ und } \alpha = \frac{\Sigma(x^2)\,\Sigma(y) - \Sigma(xy)\,\Sigma(x)}{\Sigma(x^2)\,\Sigma(y^2) - [\Sigma(xy)]^2},$$

wobei $x = \frac{1}{v}$ und $y = \frac{u}{v}$, und das Zeichen Σ die Summe von allen ihm folgenden gleichnamigen Werthen, z. B.

$$\Sigma(x) = \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3} + \cdots,$$

$$\Sigma(x\,y) = \frac{1}{v_1}\cdot\frac{u_1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\cdot\frac{u_2}{v_2} + \frac{1}{v_3}\cdot\frac{u_3}{v_3} + \cdots$$

bezeichnet.

Beispiel. Man hat mit einem kleinen hydrometrischen Flügel bei den Geschwindigkeiten:

0,163; 0,205; 0,298; 0,366; 0,610 Meter.

die Umdrehungszahlen pr. Secunde:

0,600; 0,835; 1,467; 1,805; 3,142

beobachtet, und soll nun die diesem Flügel entsprechenden Constanten bestimmen. Mit Hülfe der in der Anmerkung gegebenen Formel folgt, da

$$\Sigma(x) = \frac{1}{0{,}163} + \frac{1}{0{,}205} + \cdots = 18{,}740,$$

$$\Sigma(y) = \frac{0{,}600}{0{,}163} + \frac{0{,}835}{0{,}205} + \cdots = 22{,}759,$$

$$\Sigma(x^2) = \left(\frac{1}{0{,}163}\right)^2 + \left(\frac{1}{0{,}205}\right)^2 + \cdots = 82{,}846,$$

$$\Sigma(y^2) = 105{,}223, \text{ und}$$

$$\Sigma(x\,y) = \frac{0{,}600}{(0{,}163)^2} + \frac{0{,}835}{(0{,}205)^2} + \cdots = 80{,}961$$

ist,

$$v_0 = \frac{105{,}223\,.\,18{,}740 - 80{,}961\,.\,22{,}759}{82{,}846\,.\,105{,}223 - (80{,}961)^2} = \frac{129{,}5}{2162} = 0{,}060 \text{ und}$$

$$\alpha = \frac{368{,}3}{2162} = 0{,}1703,$$

daher gilt für dieses Instrument die Formel:

$$v = 0{,}060 + 0{,}1703\,u.$$

Setzt man hierin $u = 0{,}6$, so bekommt man:

$$v = 0{,}060 + 0{,}102 = 0{,}162;$$

ferner $u = 0{,}835$ giebt:

$$v = 0{,}060 + 0{,}142 = 0{,}202;$$

ferner $u = 1{,}467$:

$$v = 0{,}060 + 0{,}249 = 0{,}309;$$

ferner $u = 1{,}805$:

$$v = 0{,}060 + 0{,}307 = 0{,}367;$$

endlich $u = 3{,}142$:

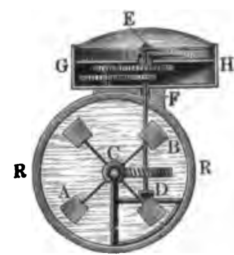
$$v = 0{,}060 + 0{,}535 = 0{,}595;$$

es findet also eine sehr gute Uebereinstimmung dieser berechneten Werthe mit den beobachteten statt.

Anmerkung 2. Man kann auch nach Lapointe das hydraulische Flügelrad in eine cylindrische Röhre einsetzen, und sich von demselben die Geschwindigkeit des durchfließenden Wassers angeben lassen. Der Zählapparat kann dann außerhalb des Wassers stehen und mit dem Rade durch eine stehende Welle in Verbindung gesetzt werden. Lapointe nennt dieses Instrument une tube jaugeur (s. Comptes

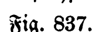
rendues T. XXV, 1848; auch Polytechn. Centralblatt 1847. Fig. 836 führt eine ideelle Darstellung des hydrometrischen Flügelrades in einer Röhre vor Augen. Das Flügelrad ACB setzt auch hier mittels Schraube ohne Ende eine Welle DE in Umdrehung; die letztere ist aber mittels einer Stopfbüchse F aus der Röhre RR, in welcher das zu messende Wasser fließt, in das Gehäuse GH des Zählapparates geführt, dessen innere Einrichtung sehr verschieden sein kann.

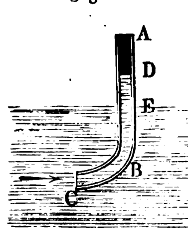
Fig. 836.



Anmerkung 3. In Frankreich fängt man erst seit Kurzem an, dem hydraulischen Flügelrade die nöthige Aufmerksamkeit zu schenken. Wir finden eine ausführliche Abhandlung über dieses Instrument in den Annales des ponts et chaussées, T. XIV, 1847, von Baumgarten; und einen Auszug hiervon im Polytechnischen Centralblatte, 1849. Herr Baumgarten empfiehlt besonders die Schraubenflügel, und macht hierzu noch manche Bemerkungen, die mit den von uns allerdings schon längst gemachten Erfahrungen ganz im Einklange stehen. Ein neues hydrometrisches Flügelrad mit einer langen Schraube und ohne Räder beschreibt Boileau in seinem Traité de la mesure des eaux courantes.

§. 492 **Pitot'sche Röhre.** Die übrigen Hydrometer sind unvollkommener als der hydraulische Flügel, denn sie gewähren entweder weniger Genauigkeit, oder sie sind umständlicher im Gebrauche. Das einfachste Instrument dieser Art ist die Pitot'sche Röhre (franz. la tube de Pitot; engl. Pitot's tube). In seiner einfachsten Gestalt besteht es in einer gläsernen Knieröhre ABC, Fig. 837, welche so ins Wasser gehalten wird, daß der untere Theil derselben horizontal und dem Wasser entgegen zu stehen kommt. Durch den Wasserstoß wird nun in dieser Röhre eine Wassersäule zurückgehalten, die über das Niveau des äußeren Wasserspiegels zu stehen kommt, und die Erhebung DE dieser Wassersäule fällt um so größer aus, je größer der Stoß oder die ihn erzeugende Geschwindigkeit des Wassers ist; es kann daher auch umgekehrt, diese Erhebung oder Niveaudifferenz als Maß der Geschwindigkeit des Wassers dienen.


Fig. 837.



Setzen wir diese Erhebung DE über den äußeren Wasserspiegel, $= h$, und die Geschwindigkeit des Wassers, $= v$, so können wir, wenn μ eine Erfahrungszahl bezeichnet,

$$h = \frac{v^2}{2 g \mu^2}$$

setzen, und daher umgekehrt

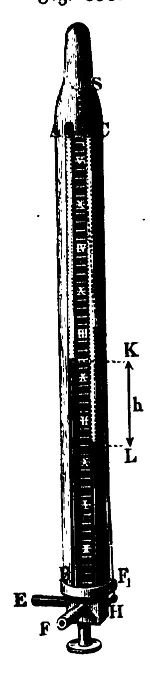
$$v = \mu \sqrt{2 g h} \text{ oder einfacher}$$

$$v = \psi \sqrt{h}.$$

Um die Constante ψ zu finden, hält man das Instrument an einer Stelle ins Wasser, wo die Geschwindigkeit v_1 bekannt ist; zeigt sich hier die Erhebung $= h_1$, so hat man für die Constante $\psi = \frac{v_1}{\sqrt{h_1}}$, welche nun in anderen Fällen, wo die Geschwindigkeit mit diesem Instrumente gesucht werden soll, zu gebrauchen ist.

Um das Ablesen der Höhe h zu erleichtern, läßt man das Instrument aus zwei Röhren AB und CD bestehen, und wie Fig. 838 zeigt, aus der einen ein Röhrchen E in der Stromrichtung, aus der anderen aber zwei Röhrchen F und F_1 rechtwinkelig gegen die Stromrichtung, durch beide Röhren aber einen einzigen Hahn H gehen, womit man die Wassersäulen in beiden Röhren absperren kann. Zieht man das Instrument aus dem Wasser heraus, so kann man bequem an einer zwischen beiden Röhren befindlichen Scala die Differenz $KL = h$ der beiden Wassersäulen ablesen. Damit das Wasser in der Röhre keine großen Schwankungen annehme, ist es nöthig, den Röhren enge Einmündungen zu geben, und damit das Absperren der Röhren schnell und sicher vor sich gehen könne, versieht man den Hahn mit einem Arme und einer in der Figur größtentheils punktirten Zugstange HS, welche oben nahe an der Handhabe des Instrumentes sich endigt.

Fig. 838.

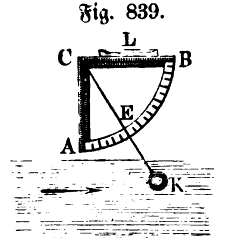


Anmerkung 1. Wenn auch die Pitot'sche Röhre nicht die Genauigkeit gewährt wie das hydrometrische Flügelrad, so ist sie doch wegen ihres einfachen Gebrauches ein sehr zu empfehlendes Instrument. Der Verfasser handelt im Polytechnischen Centralblatte, 1847, etwas specieller von diesem Instrumente, und theilt auch daselbst eine Reihe von Erfahrungszahlen und die darauf gegründete Bestimmung des Coefficienten ψ mit. Bei seinem Instrumente sind die Geschwindigkeiten zwischen 0,32 und 1,24 Meter, $v = 3{,}545 \sqrt{h}$ Meter zu setzen.

Anmerkung 2. Duchemin empfiehlt eine Pitot'sche Röhre mit Schwimmer. Da dieselbe ziemlich weit sein muß, so giebt sie eine nicht unbeträchtliche Stauung, weshalb sie in engen Canälen nicht zu gebrauchen ist (s. Duchemin: Recherches expérim. sur les lois de la résistance des fluides). Boileau beschreibt in dem oben (§. 412) citirten Werke eine neue Pitot'sche Röhre mit einem kleinen Aichgefäße, wodurch die Geschwindigkeit des fließenden Wassers mittels der Wassermenge, welche das letztere über den Wasserspiegel drückt, gemessen wird.

§. 493 **Stromquadrant.** Der Stromquadrant oder das hydrometrische Pendel (franz. pendule hydrométrique; engl. hydrometrical-pendulum) ist vorzüglich von Ximenes, Michelotti, Gerstner und Eytelwein zum Messen der Geschwindigkeit fließender Wasser angewendet worden. Dieses

Fig. 839.



Instrument besteht aus einem in Grade und feinere Theile eingetheilten Quadranten AB, Fig. 839, und aus einer im Mittelpunkte C desselben mittels eines Fadens aufgehängten Metall- oder Elfenbeinkugel K von 2 bis 3 Zoll Durchmesser; es giebt die Geschwindigkeit des Wassers durch den Winkel ACE an, um welchen der von der Kugel gespannte Faden von der Verticalen CA abweicht, wenn man die Ebene des Instrumentes in die Richtung des Stromes bringt, und die Kugel unter das Wasser tauchen läßt. Da der Winkel nicht leicht 40 und mehr Grade beträgt, so giebt man diesem Instrumente oft nur die Form eines rechtwinkeligen Dreieckes und bringt die Gradtheilung auf der horizontalen Kathete desselben an. Zum Einstellen der Index- oder Nulllinie in die Verticale wendet man am besten eine oben aufsitzende Röhrenlibelle an, oder man bedient sich dazu der Kugel selbst, indem man dieselbe außerhalb des Wassers hängen läßt und das Instrument so lange dreht, bis der Faden in die Nulllinie der Eintheilung fällt. Bei Geschwindigkeiten unter 4 Fuß kann man sich einer Elfenbeinkugel, bei größeren Geschwindigkeiten muß man sich aber schwerer Metallkugeln bedienen. Wegen der steten Schwankungen der Kugel in der Bewegungsrichtung des Wassers sowohl als auch rechtwinkelig gegen die Stromrichtung ist das Ablesen ziemlich beschwerlich und läßt viel Unsicherheit zurück; es ist daher dieses Instrument nicht zu den vollkommneren zu zählen.

Die Abhängigkeit zwischen dem Ablenkungswinkel und der Geschwindigkeit des Wassers läßt sich bei einer nicht sehr tief eingetauchten Kugel auf folgende Weise ermitteln. Aus dem Gewichte G der Kugel und aus dem mit dem Quadrate der Geschwindigkeit v und dem Querschnitte F der Kugel gleichmäßig wachsenden Wasserstoße $P = \mu F v^2$, folgt eine Mittelkraft R, deren Richtung auch der Faden annimmt, und welche bestimmt ist durch den Ablenkungswinkel δ, für den man hat:

$$tang.\,\delta = \frac{P}{G} = \frac{\mu F v^2}{G};$$

es ist daher auch umgekehrt:

$$v^2 = \frac{G\,tang.\,\delta}{\mu F}, \text{ und } v = \sqrt{\frac{G}{\mu F}} \cdot \sqrt{tang.\,\delta},$$

d. i.:

$$v = \psi \sqrt{tang.\,\delta},$$

wenn ψ einen Erfahrungscoefficienten bezeichnet, den man vor dem Gebrauche auf dem oben angegebenen Wege (§. 491) zu ermitteln hat.

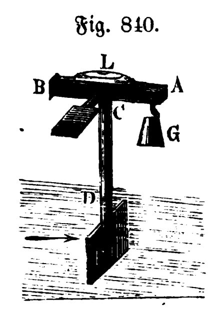
Rheometer. Die übrigen Hydrometer, als: Lorgna's Wasserhebel, Ximenes' Wasserfahne, Michelotti's hydraulische Schnellwage, Brünning's Tachometer, Poletti's Rheometer u. s. w., sind im Gebrauche umständlicher und zum Theil auch unsicher. Das Princip ist bei allen diesen Instrumenten dasselbe; diese Instrumente sind aus einer Stoßfläche und einer Wage zusammengesetzt, und es dient die letztere dazu, den Stoß P des Wassers gegen die erstere anzugeben; da dieser aber $= \mu F v^2$ ist, so hat man umgekehrt: §. 494

$$v = \sqrt{\frac{P}{\mu F}} = \psi \sqrt{P},$$

wo ψ eine von der Größe der Stoßfläche F abhängige Erfahrungsconstante bezeichnet.

Das Rheometer, welches in der neueren Zeit von Poletti vorgeschlagen wurde, und im Wesentlichen nicht von Michelotti's hydrometrischer Schnellwage abweicht, besteht aus einem um eine feste Axe C drehbaren Hebel AB, Fig. 840, und einem zweiten Arme CD, an welchen die Stoßfläche oder, nach Poletti, ein bloßer Stoßstab angeschraubt wird. Um dem Stoße des Wassers gegen diese Fläche das Gleichgewicht zu halten, werden in die am Hebelende A hängende Blechbüchse Gewichte oder Schrotkörner eingelegt, und um die leere Wage im stillstehenden Wasser ins Gleichgewicht zu setzen, ist bei B ein Gegengewicht angesetzt, welches das äußerste Ende des Armes CB ausmacht. Aus dem aufgelegten Gewichte G folgt die Stoßkraft P mittels der Hebelarme $CA = a$ und $CF = b$, durch die Formel $Pb = Ga$, weshalb nun

Fig. 840.



$$P = \frac{a}{b} G \text{ und } v = \sqrt{\frac{P}{\mu F}} = \sqrt{\frac{aG}{mbF}} = \psi \sqrt{G}$$

ist, wo ψ wieder eine Erfahrungsconstante bezeichnet.

Ein nach demselben Principe construirtes Hydrometer, wo dem Wasserstoß durch die Kraft einer Feder das Gleichgewicht gehalten wird (hydromètre dynamométrique), beschreibt Boileau in seiner Abhandlung über das Wassermessen.

Anmerkung 1. Ueber die letzteren Hydrometer wird ausführlicher gehandelt in Eytelwein's Handbuch der Mechanik fester Körper und der Hydraulik, ferner in Gerstner's Handbuch der Mechanik, Bd. II., in Brünning's Abhandlung über die Geschwindigkeit des fließenden Wassers, in Venturoli's Elementi di

Meccanica e d'Idraulica, Vol. II. Wegen Poletti's Rheometer ist in Dingler's Polytechn. Journal, Bd. XX., 1826, nachzusehen. Stevenson's Hydrometer ist der Woltmann'sche Flügel, s. Dingler's Journal, Bd. LXV., 1842. Die nach Art der Reactionsräder construirten Hydrometer und Gasuhren werden im folgenden Capitel abgehandelt.

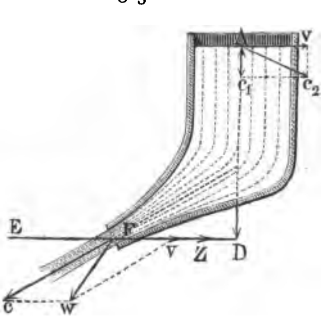
Anmerkung 2. Ein besonders auch zum praktischen Gebrauch zu empfehlendes Werk ist die Hydrometrie oder praktische Anleitung zum Wassermessen, von Bornemann, Freiberg 1849. Der Schrift von Boileau ist schon wiederholt gedacht worden (s. §. 412 u. s. w.).

Neuntes Capitel.

Von der Kraft und dem Widerstande der Flüssigkeiten.

§. 495 **Reaction des Wassers.** Der Gesammtdruck des in einem Gefäße stillstehenden Wassers reducirt sich nach §. 362 auf eine dem Gewichte dieser Wassermasse gleiche Verticalkraft; wenn aber das Gefäß AF, Fig. 841, eine Oeffnung F hat, durch welche das Wasser ausfließen kann, so erleidet diese Kraft eine Veränderung, und zwar nicht allein, weil in F ein Theil der Gefäßwand ausfällt, sondern auch deshalb, weil das der Mündung zufließende Wasser wie jeder andere Körper, der seinen Bewegungszustand ändert, vermöge seiner Trägheit reagirt. Die Bewegungsänderung eines Körpers kann sich sowohl auf eine Veränderung der Geschwindigkeit als auch auf eine Veränderung der Bewegungsrichtung erstrecken; und daher kann auch die Reaction (franz. réaction; engl. reaction) des ausfließenden Wassers sowohl aus einer Beschleunigung als auch aus einer stetigen Richtungsänderung des der Mündung zuströmenden Wassers entspringen.

Fig. 841.



Auf folgendem Wege gelangen wir sogleich zur Kenntniß der vollständigen Reaction des Wassers in einem Ausflußgefäße.

Es sei c die Geschwindigkeit des durch die Mündung F fließenden Wassers, c_1 die relative Geschwindigkeit des Wassers an der Oberfläche bei A,

G der Inhalt dieser Fläche und h die Druckhöhe AD in der Ausmündung. Dann haben wir:

$$\frac{c^2}{2g} = h + \frac{c_1^2}{2g},$$

und das Ausflußquantum:

$$Q = Fc = Gc_1.$$

Denken wir das Gefäß AF, Fig. 841, mit einer Geschwindigkeit v horizontal fortgehend, so müssen wir für die absolute Geschwindigkeit c_2 des eintretenden Wassers:

$$c_2^2 = c_1^2 + v^2,$$

und bei dem Neigungswinkel $EFc = \alpha$ der Strahlaxe gegen den Horizont, für die absolute Geschwindigkeit w des austretenden Strahles:

$$w^2 = c^2 + v^2 - 2\,cv\,cos.\,\alpha$$

setzen.

Nun ist das Arbeitsvermögen des Wassers vor dem Ausflusse:

$$L_1 = \left(\frac{c_2^2}{2g} + h\right) Q\gamma = \left(\frac{c_1^2 + v^2}{2g} + h\right) Q\gamma,$$

dagegen das Arbeitsvermögen desselben nach dem Ausflusse:

$$L_2 = \frac{w^2}{2g}\,Q\gamma = \left(\frac{c^2 + v^2 - 2\,cv\,cos.\,\alpha}{2g}\right) Q\gamma,$$

daher folgt das dem Wasser entzogene und auf das Gefäß übergetragene Arbeitsquantum:

$$L = L_1 - L_2 = \left(\frac{c_1^2 - c^2 + 2\,cv\,cos.\,\alpha}{2g} + h\right) Q\gamma,$$

oder, da $\frac{c^2}{2g} - \frac{c_1^2}{2g} = h$ ist:

$$L = \frac{cv\,cos.\,\alpha}{g}\,Q\gamma;$$

und hiernach der horizontale Component der Reaction des Wassers:

$$H = \frac{L}{v} = \frac{c\,cos.\,\alpha}{g}\,Q\gamma.$$

Da $Q = Fc$ ist, so haben wir auch:

$$H = \frac{c^2}{g}\,F\gamma\,cos.\,\alpha = 2\cdot\frac{c^2}{2g}\,F\gamma\,cos.\,\alpha = 2\,hF\gamma\,cos.\,\alpha$$

und daher bei einem horizontal gerichteten Strahle, wie Fig. 842:

$$H = 2\,hF\gamma.$$

Es ist also die Reaction eines horizontalen Strahles gleich dem Gewichte einer Wassersäule, welche den Querschnitt des Strahles zur Basis und die doppelte Geschwindigkeitshöhe ($2h$) zur Länge hat.

Anmerkung. Ein Engländer, Peter Ewart, hat in der neueren Zeit die Richtigkeit dieses Gesetzes durch Versuche zu bestätigen gesucht (s. Memoirs of the Manchester Philosophical Society, Vol. II., oder den „Ingenieur, Zeitschrift für das gesammte Ingenieurwesen", Bd. I.). Hierbei wurde das Gefäß HRF, Fig. 842, an eine horizontale Axe C aufgehangen, und die Reaction durch eine Winkelhebelwage ADB gemessen, auf welche das Gefäß mittels eines horizontalen Stabes AG wirkte, der sich genau der Mündung F gegenüber, an das Gefäß anstemmte. Beim Ausflusse durch eine Mündung in der dünnen Wand ergab sich:

Fig. 842.

$$P = 1{,}14 \cdot \frac{v^2}{2g} F\gamma.$$

Setzt man den Strahlquerschnitt

$$F_1 = 0{,}64 \,.\, F$$

und die effective Ausflußgeschwindigkeit

$$v_1 = 0{,}96\ v$$

(s. §. 405), so erhält man nach der theoretischen Formel:

$$P = 2 \cdot \frac{v_1^2}{2g} \cdot F_1 \gamma = 2 \,.\, 0{,}96^2 \,.\, 0{,}64 \,.\, \frac{v^2}{2g} F\gamma = 1{,}18\ \frac{v^2}{2g} F\gamma,$$

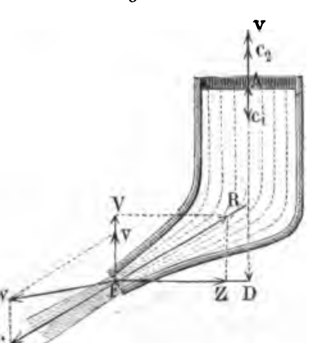
also ziemlich dasselbe, was die Versuche gegeben haben. Bei einer nach dem contrahirten Wasserstrahle geformten Mündung wurde $P = 1{,}73 \cdot \frac{v^2}{2g} F\gamma$, der Ausfluß- oder Geschwindigkeitscoefficient aber $= 0{,}94$ gefunden. Da hier $F_1 = F$ und $v_1 = 0{,}94\,v$ ist, so hat man theoretisch:

$$P = 2 \,.\, 0{,}94^2\ \frac{v^2}{2g} F\gamma = 1{,}77 \cdot \frac{v^2}{2g} F\gamma,$$

also wieder eine gute Uebereinstimmung.

§. 496 Denkt man sich das Ausflußgefäß AF, Fig. 843, mit einer Geschwindigkeit v vertical aufwärts bewegt, so hat man für die absolute Geschwindigkeit des eintretenden Wassers:

Fig. 843.



$$c_2 = v - c_1,$$

und dagegen für die des ausfließenden, bei der im vorigen Paragraphen gebrauchten Bezeichnung:

$$w^2 = c^2 + v^2 + 2cv\cos.(90^0 + \alpha)$$
$$= c^2 + v^2 - 2cv\sin.\alpha.$$

Es ist hiernach das ganze Leistungsvermögen der Wassermenge Q pr. Secunde:

$$L_1 = \left(\frac{(v - c_1)^2}{2g} + h\right) Q\gamma,$$

dagegen das des abfließenden Wassers:

$$L_2 = (c^2 + v^2 - 2cv\ sin.\alpha)\ Q\gamma,$$

und folglich die mechanische Arbeit, welche das Wasser dem Gefäße mitgetheilt hat:

$$L = L_1 - L_2 = \left(\frac{2vc_1 + c_1^2 - c^2 + 2cv\,sin.\alpha}{2g} + h\right) Q\gamma,$$

oder, da $h = \frac{c^2}{2g} - \frac{c_1^2}{2g}$ ist:

$$L = \frac{(c\,sin.\alpha - c_1)\,v}{g}\,Q\gamma,$$

und die entsprechende Verticalkraft:

$$V = \frac{L}{v} = \left(\frac{c\,sin.\alpha - c_1}{g}\right) Q\gamma = \left(sin.\alpha - \frac{F}{G}\right)\frac{c}{g}\,Q\gamma$$

$$= \left(sin.\alpha - \frac{F}{G}\right)\frac{c^2}{g}\,F\gamma = \left(sin.\alpha - \frac{F}{G}\right).2hF\gamma.$$

Ist die Ausflußmündung klein gegen die Oberfläche G, so hat man $\frac{F}{G} = 0$, und daher den verticalen Componenten der Reaction:

$$V = 2hF\gamma\,sin.\alpha.$$

Nach dem vorigen Paragraphen hat man aber den horizontalen Componenten dieser Kraft:

$$H = 2hF\gamma\,cos.\alpha,$$

daher ist die vollständige Reaction des Wassers:

$$R = \sqrt{V^2 + H^2} = 2hF\gamma,$$

und die Richtung derselben der Bewegung des ausfließenden Wassers genau entgegengesetzt.

Ist $F = G$, fließt z. B. das Wasser durch eine überall gleichweite Röhre, so hat man $\frac{F}{G} = 1$ und daher:

$$V = (sin.\alpha - 1).2hF\gamma = -(1 - sin.\alpha).2hF\gamma;$$

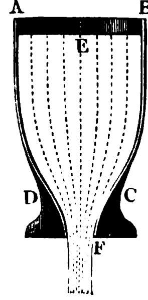
dann wirkt also V nicht nach oben, sondern nach unten, und es ist die vollständige Reaction:

$$R = \sqrt{V^2 + H^2} = \sqrt{cos.\alpha^2 + (1 - sin.\alpha)^2}.2hF\gamma$$

$$= \sqrt{2(1 - sin.\alpha)}.2hF\gamma$$

$$= 4hF\gamma\,sin.\left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Fig. 844.



Für $\alpha = -90^0$, d. i. wenn die Röhre einen Halbkreis bildet, ist $R = 4hF\gamma$.

Ist $\alpha = +90^0$, so hat man es also im Allgemeinen mit dem Ausflusse, wie Fig. 844, zu thun, und es ist $Z = 0$ und

$$V = \frac{(c - c_1)}{g}\,Q\gamma = \left(1 - \frac{F}{G}\right).2hF\gamma,$$

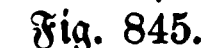
folglich für $\frac{F}{G} = 0$:

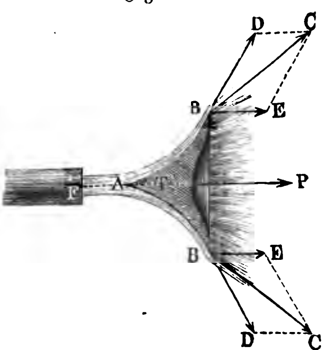
$$V = R = 2\,h F \gamma.$$

Um diese Kraft wird das ganze Gewicht des im Ausflußapparate befindlichen Wassers vermindert, wenn das letztere zum Ausfluß gelangt.

§. 497 **Stoss und Widerstand des Wassers.** Das Wasser oder eine andere Flüssigkeit übt gegen einen festen Körper einen *Stoß* aus, wenn sie mit diesem zusammentrifft, und dadurch in ihrem Bewegungszustande verändert wird. Von dem Stoße ist der *Widerstand* (franz. résistance; engl. resistence), welchen das Wasser der Bewegung eines Körpers entgegensetzt, nicht wesentlich verschieden. Die Untersuchung beider Kräfte bildet den dritten Haupttheil der Hydraulik. Man unterscheidet zunächst von einander: 1) den *Stoß isolirter Wasserstrahlen* (franz. choc d'une veine de fluide; engl. impact of an isolated stream), 2) den *Stoß im begrenzten Wasser oder Gerinne* (franz. choc d'un fluide défini; engl. impact of a bounded stream), und 3) den *Stoß im unbegrenzten Wasser* (franz. choc d'un fluide indéfini; engl. impact of an unlimited stream). Ein Stoß der ersten Art findet statt, wenn sich dem aus einem Gefäße ausfließenden Wasserstrahl ein Körper, z. B. die Schaufel eines oberschlägigen Wasserrades, entgegenstellt; ein Stoß der zweiten Art tritt ein, wenn das Wasser in einem Canale oder Gerinne gegen einen, den Querschnitt des letzteren ganz ausfüllenden Körper, z. B. gegen die Schaufel eines unterschlägigen Wasserrades trifft; die dritte Art kommt endlich vor, wenn ein fließendes Wasser gegen einen in dasselbe eingetauchten Körper trifft, dessen Querschnitt nur ein sehr kleiner Theil ist vom Querschnitte des Wasserstromes, wie z. B. wenn es gegen die Schaufeln eines Schiffmühlenrades stößt.

Uebrigens ist zu unterscheiden, der Wasserstoß gegen *ruhende* und der gegen *bewegte Körper*, ferner der Stoß gegen *krumme Flächen* und der gegen *ebene Flächen*, und bei letzterem wieder, der *senkrechte* und der *schiefe Stoß*.


Fig. 845.



Wir betrachten gleich einen allgemeineren Fall, nämlich den Stoß eines isolirten Strahles gegen eine *Rotationsfläche*, welche sich in ihrer eigenen, mit der der Bewegungsrichtung des Strahles zusammenfallenden Axe bewegt.

§. 498 **Stoss isolirter Strahlen.** Es sei BAB, Fig. 845, eine Rota-

tionsfläche, AP ihre Axe, und FA ein in der Richtung dieser Axe antreffender Wasserstrahl; setzen wir die Geschwindigkeit des Wassers, $= c$, die der Fläche, $= v$ und den Winkel BTP, welchen die Tangente DT am Ende B der Erzeugungscurve oder jeder die Fläche verlassende Wasserfaden BD mit der Axenrichtung BE einschließt, $= \alpha$, nehmen wir endlich noch an, daß das Wasser beim Hinlaufen an der Fläche durch Reibung an lebendiger Kraft nichts verliere. Das Wasser trifft die Fläche mit der relativen Geschwindigkeit $c - v$ und geht daher auch mit dieser an der Fläche hin, entfernt sich also auch mit derselben in den Tangentialrichtungen TB, TB u. s. w. von der Fläche. Aus der Tangentialgeschwindigkeit $BD = c - v$ und der Axengeschwindigkeit $BE = v$ ergiebt sich aber die absolute Geschwindigkeit $BC = c_1$ des Wassers nach dem Zusammenstoße mit der Fläche durch die bekannte Formel:

$$c_1 = \sqrt{(c - v)^2 + 2\,(c - v)\,v\,cos.\,\alpha + v^2}.$$

Nun kann aber ein Wasserquantum Q durch seine lebendige Kraft die mechanische Arbeit $\frac{c^2}{2g} \cdot Q\gamma$ verrichten, wenn es hierbei seine Geschwindigkeit c vollkommen zusetzt; es ist demnach auch das im Wasser zurückbleibende Arbeitsvermögen $= \frac{c_1^2}{2g} \cdot Q\gamma$, folglich die auf die Fläche übergetragene Arbeit:

$$Pv = \frac{c^2}{2g}\,Q\gamma - \frac{c_1^2}{2g}\,Q\gamma = \frac{c^2 - c_1^2}{2g} \cdot Q\gamma$$

$$= \frac{[c^2 - (c - v)^2 - 2\,(c - v)\,v\,cos.\,\alpha - v^2]}{2g}\,Q\gamma$$

$$= \frac{2cv - 2v^2 - 2\,(c - v)\,v\,cos.\,\alpha}{2g}\,Q\gamma, \text{ d. i.:}$$

$$Pv = (1 - cos.\,\alpha)\,\frac{(c - v)\,v}{g}\,Q\gamma,$$

und die Kraft oder der Wasserstoß in der Axenrichtung:

$$P = (1 - cos.\,\alpha)\,\frac{(c - v)}{g}\,Q\gamma.$$

Geht die Fläche dem Wasser mit der Geschwindigkeit v entgegen, so hat man:

$$P = (1 - cos.\,\alpha)\,\frac{(c + v)}{g}\,Q\gamma,$$

und ist dieselbe ohne Bewegung, also $v = 0$, so stellt sich der Stoß oder hydraulische Axendruck

$$P = (1 - cos.\,\alpha)\,\frac{c}{g} \cdot Q\gamma$$

heraus.

Es folgt hieraus, daß der Stoß einer und derselben Wassermasse unter übrigens gleichen Umständen der relativen Geschwindigkeit $c \mp v$ des Wassers proportional ist.

Aus dem Inhalte F des Querschnittes vom Wasserstrahle folgt das zum Stoße gelangende Wasserquantum $Q = F(c \mp v)$; daher:

$$P = (1 - cos. \alpha) \frac{(c \mp v)^2}{g} F\gamma;$$

und für $v = 0$:

$$P = (1 - cos. \alpha) \frac{v^2}{g} F\gamma.$$

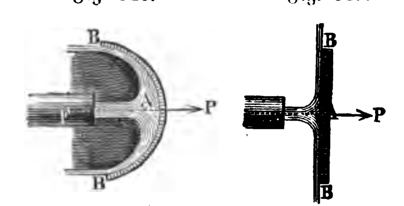
Bei gleichem Querschnitte des Strahles wächst also hiernach der Stoß gegen eine ruhende Fläche wie das Quadrat der Geschwindigkeit des Wassers.

§. 499 **Stoss gegen ebene Flächen.** Der Stoß eines und desselben Wasserstrahles hängt vorzüglich auch noch von dem Winkel α ab, unter welchem das Wasser nach dem Stoße sich von der Axe entfernt; er ist Null, wenn dieser Winkel = Null ist, und dagegen ein Maximum, nämlich

$$= 2 \frac{(c \mp v)}{g} Q\gamma,$$

wenn dieser Winkel 180°, also dessen Cosinus = — 1 ausfällt, wo das Wasser, wie Fig. 846 repräsentirt, in der entgegengesetzten Richtung die Fläche verläßt, in welcher es dieselbe trifft. Ueberhaupt ist derselbe bei concaven Flächen größer als bei convexen, weil dort der Winkel stumpf, also der Cosinus negativ ausfällt und $1 - cos. \alpha$ in $1 + cos. \alpha$ übergeht.

Fig. 846. Fig. 847.



Am häufigsten ist die Fläche, wie Fig. 847 vorstellt, eben, und daher $\alpha = 90°$, also $cos. \alpha = 0$ und der Stoß

$$P = \frac{(c \mp v)}{g} \cdot Q\gamma;$$

bei einer ruhenden Fläche:

$$P = \frac{c}{g} Q\gamma = \frac{c^2}{g} F\gamma = 2 \cdot \frac{c^2}{2g} F\gamma = 2 F h \gamma.$$

Der Normalstoß des Wassers gegen eine ebene Fläche ist also gleich dem Gewichte einer Wassersäule, welche zur Basis den Querschnitt F des Strahles und zur Höhe die zweifache Geschwindigkeitshöhe $\left(2\, h = 2 \cdot \frac{c^2}{2g}\right)$ hat.

Die hierüber angestellten Versuche von Michelotti, Vince, Langsdorf,

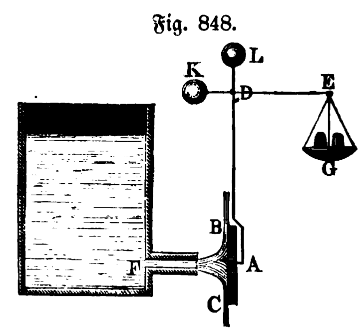


Fig. 848.

Bossut, Morosi und Bidone haben ziemlich zu dem nämlichen Ergebnisse geführt, wenn der Querschnitt der gestoßenen Fläche mindestens 6mal so groß war, als der des Strahles, und wenn diese Fläche wenigstens zweimal so weit von der Ebene der Ausflußmündung abstand, als die Strahldicke maß. Der Apparat, welcher hierbei in Anwendung gekommen ist, bestand in einem Hebel, ähnlich wie Poletti's Rheometer (§. 494), welcher auf der einen Seite den Wasserstoß aufnahm, dem durch Gewichte auf der anderen Seite das Gleichgewicht gehalten wurde. Das Instrument, welches Bidone angewendet hat, ist in Fig. 848 abgebildet. BC ist die vom Strahle FA gestoßene Fläche, G die Wagschale zur Aufnahme von Gewichten, ferner D die Drehungsaxe und K und L sind Gegengewichte.

Anmerkung. Die ausführlichsten Versuche über den Wasserstoß sind von Bidone. S. Memoire de la Reale Accademia delle Scienze di Torino. T. XL. 1838. So wurden bei einer Geschwindigkeit von mindestens 27 Fuß und an Messingplatten von 2 bis 9 Zoll Durchmesser angestellt. Im Allgemeinen fand Bidone den Normalstoß gegen eine ebene Fläche etwas größer als $2Fh\gamma$, doch ist diese Abweichung wohl einer Vergrößerung des Hebelarmes beizumessen, welche durch das zurückfallende Wasser erzeugt wurde. S. Duchemin: Recherches expérimentales sur les lois de la résistance des fluides (ins Deutsche übersetzt von Schnuse). Wenn die gestoßene Fläche der Mündung ganz nahe war, so fiel bei Bidone P nur 1,5 $Fh\gamma$ aus. Wenn ferner die Fläche mit dem Strahle gleichen Querschnitt hat, in welchem Falle das Wasser nur um einen spitzen Winkel α abgelenkt wird, so ist nach du Buat und Langsdorf, P nur $= Fh\gamma$. Endlich hat sich auch bei Bidone und Anderen ergeben, daß der Stoß im ersten Augenblicke beinahe noch einmal so groß ist, als der permanente Stoß. Vergleichende Versuche über den Stoß und die Reaction des Wassers mit Hülfe eines Reactionsrades sind von dem Verfasser angestellt worden, siehe dessen „Experimentalhydraulik", sowie den „Civilingenieur" Bd. I. 1854.

Durch neuere Versuche über den Stoß isolirter Luft- und Wasserstrahlen (siehe „Civilingenieur", Bd. VII. Heft 5, und Bd. VIII. Heft 1) hat der Verfasser gefunden, daß der effective Stoß eines isolirten Luft- oder Wasserstrahles gegen eine normale Ebene, 92 bis 96 Procent der theoretischen Kraft $P = \frac{c Q\gamma}{g}$ ist, daß dagegen der Stoß eines solchen Strahles gegen eine hohle Rotationsfläche, welche die Richtung des aufschlagenden Strahles um $\delta = 134$ Grad abändert, nur 83 bis 88 Procent der theoretischen Kraft $P = c(1 - cos. \delta)\frac{Q\gamma}{g}$ ausfällt.

§. 500 **Maximalarbeit des Stosses.** Die mechanische Arbeit

$$Pv = (1 - sin. \alpha) \frac{(c - v) v}{g} Q\gamma$$

des Stoßes hängt vorzüglich auch von der Geschwindigkeit v der gestoßenen Fläche ab; sie ist z. B. Null, nicht nur für $v = c$, sondern auch für $v = 0$; es muß daher auch eine Geschwindigkeit geben, bei welcher die Arbeit des Stoßes ein Maximum ist. Offenbar kommt es hierbei nur darauf an, daß $(c - v) v$ zu einem solchen wird. Sehen wir c als den halben Umfang eines Rechteckes und v als die Grundlinie desselben an, so haben wir für dessen Höhe $= c - v$ und für dessen Inhalt $= (c - v) v$; nun hat aber unter allen Rechtecken das Quadrat bei gegebenem Umfange $2c$ den größten Inhalt, es ist daher auch $(c - v) v$ ein Maximum, wenn $c - v = v$, d. i. $v = \frac{c}{2}$ gemacht wird, und wir erhalten so den Maximalwerth der Arbeit des Wasserstoßes, wenn die Fläche mit der halben Geschwindigkeit des Wassers ausweicht, und zwar:

$$Pv = (1 - cos. \alpha) . \tfrac{1}{2} \cdot \frac{c^2}{2g} \cdot Q\gamma = (1 - cos. \alpha) . \tfrac{1}{2}\, Qh\gamma.$$

Ist nun $\alpha = 180^0$, wird also die Bewegung des Wassers durch den Anstoß die entgegengesetzte, so hat man allerdings die Arbeit

$$= 2 . \tfrac{1}{2}\, Qh\gamma = Qh\gamma;$$

ist aber $\alpha = 90^0$, wie beim Stoße gegen eine ebene Fläche, so stellt sich diese Arbeit nur $\tfrac{1}{2}\, Qh\gamma$ heraus, es wird also im letzteren Falle von der ganzen disponiblen oder der lebendigen Kraft des Wassers entsprechenden Arbeit nur die Hälfte gewonnen oder auf die Fläche übergetragen.

Beispiele. 1) Wenn ein Wasserstrahl von 40 Quadratzoll Querschnitt eine Wassermenge von 5 Cubikfuß pr. Secunde liefert, und gegen eine ebene Fläche normal stößt, welche mit 12 Fuß Geschwindigkeit ausweicht, so ist die Stoßkraft:

$$P = \frac{(c - v)}{g} Q\gamma = \left(\frac{5.144}{40} - 12\right) . 0{,}032 . 5 . 66 = 6 . 0{,}032 . 330$$
$$= 63{,}36 \text{ Pfund},$$

und die auf die Fläche übergetragene mechanische Arbeit:

$$Pv = 63{,}36 . 12 = 760{,}32 \text{ Fußpfund}.$$

Die größte Leistung ist für

$$v = \frac{c}{2} = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{5 . 144}{40} = 9 \text{ Fuß}$$

zu erwarten und zwar:

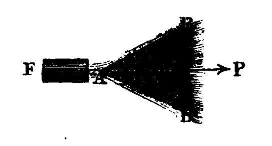
$$L = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{c^2}{2g} \cdot Q\gamma = \tfrac{1}{2} . 18^2 . 0{,}016 . 5 . 66 = 81 . 0{,}16 . 66 = 855{,}36 \text{ Fußpfd.};$$

der entsprechende Stoß oder hydraulische Druck beträgt:

$$P = \frac{855{,}36}{9} = 95{,}04 \text{ Pfund}.$$

2) Wenn ein Strahl FA, Fig. 849, von 64 Quadratzoll Querschnitt und 40 Fuß Geschwindigkeit gegen einen unbeweglichen Kegel von dem Convergenzwinkel $BAB = 100^0$ stößt, so ist der hydraulische Druck in der Richtung des Strahles:

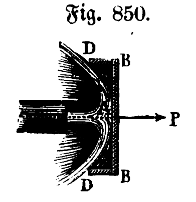
Fig. 849.



$$P = (1 - cos.\,\alpha)\,\frac{c}{g}\,Q\gamma$$
$$= (1 - cos.\,50^0)\,.\,40\,.\,0{,}032\cdot\frac{64}{144}\cdot 40\,.\,61{,}74$$
$$= (1 - 0{,}64279)\,.\,1{,}28\cdot\frac{3292{,}8}{3}$$
$$= 0{,}35721\,.\,1405 = 501{,}9 \text{ Pfund.}$$

§. 501 **Stoss des begrenzten und unbegrenzten Wassers.** Besetzt man den Umfang einer ebenen Fläche BB, Fig. 850, mit Leisten BD, BD (franz. rebords; engl. borders), welche über der vom Wasser getroffenen Seite hervorragen, so wird das Wasser, ähnlich wie bei concaven Flächen, um einen stumpfen Winkel von seiner anfänglichen Richtung abgelenkt, und es fällt daher der Stoß größer aus, als bei der einfachen ebenen Fläche. Die Wirkung dieses Stoßes hängt vorzüglich von der Höhe der Einfassung und von dem Querschnittsverhältnisse zwischen dem Strahle und dem eingefaßten Theile ab. Bei einem Versuche, wo der Strahl 1 Zoll Dicke, die cylindrische Einfassung aber 3 Zoll Weite und $3^1/_2$ Linien Höhe hatte, floß daß Wasser beinahe in umgekehrter Richtung, und es betrug der Stoß:

Fig. 850.

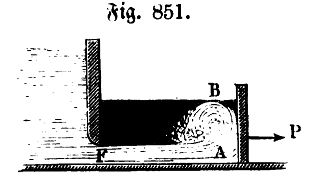


$$3{,}93\,\frac{c^2}{2g}\,F\gamma;$$

in jedem anderen Falle war diese Kraft eine kleinere. Wegen der Reibung des Wassers an der Fläche und Einfassung ist der theoretische Maximalwerth $4\,\frac{c^2}{2g}\,F\gamma$ nie ganz zu erreichen.

Auch bei dem Stoße des begrenzten Wassers FAB, Fig. 851, findet zwar auch eine Einfassung statt, es nimmt aber diese Einfassung nur einen Theil des Umfanges ein, und erstreckt sich dagegen auf die gestoßene Fläche und den Wasserstrahl zugleich. Das stoßende Wasser nimmt die Richtung nach dem uneingefaßten Theil des Umfanges hinein, wird also auch hier um den Rechtwinkel abgelenkt, weshalb hier auch die oben gefundene Formel für den isolirten Strahl

Fig. 851.



$$P = \frac{(c - v)}{g}\,Q\gamma = \left(\frac{c - v}{g}\right) c F\gamma.$$

ihre Giltigkeit hat. Weicht die Fläche BB, Fig. 847, gegen welche der Wasserstrahl normal anstößt, mit der Geschwindigkeit v in einer Richtung aus, welche um den Winkel δ von der ursprünglichen Richtung des Strahles abweicht, so ist die Geschwindigkeit der Fläche in der Richtung des Stoßes,

$$v_1 = v \cos. \delta,$$

daher die Stoßkraft

$$P = \frac{(c - v \cos. \delta)}{g} Q \gamma,$$

und die Leistung derselben pro Secunde:

$$L = P v_1 = \frac{(c - v \cos. \delta)\, v \cos. \delta}{g} Q \gamma.$$

Diese Formel findet vorzüglich ihre Anwendung beim Stoße eines unbegrenzten Stromes statt, wo

$$Q = F(c - v \cos. \delta)$$

zu setzen ist, so daß

$$P = \frac{(c - v \cos. \delta)^2}{g} F \gamma \text{ ausfällt.}$$

§. 502 **Schiefer Stoss.** Bei dem schiefen Stoße gegen ebene Flächen müssen wir unterscheiden, ob das Wasser nur nach einer oder nach zwei oder nach allen Richtungen in der Ebene abfließt. Ist wie beim Stoße des begrenzten Wassers die Fläche AB, Fig. 852, von drei Seiten eingefaßt, so daß es nur nach einer Richtung abströmen kann, so hat man den hydraulischen Druck des Wassers gegen die Fläche in der Richtung des Strahles:

$$P = (1 - \cos. \alpha) \frac{(c - v)}{g} Q \gamma.$$

Fig. 852.

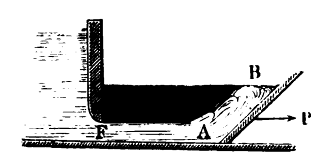
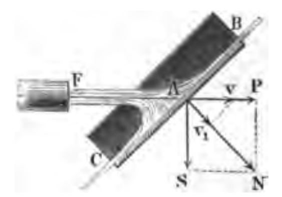


Fig. 853.



Ist aber die gestoßene Ebene BC, Fig. 853, nur auf zwei gegenüberliegenden Seiten eingefaßt, so theilt sich der Strahl in zwei ungleiche Theile, der größere Theil Q_1 nimmt die kleinere Ablenkung α und der kleinere Theil Q_2 die größere Ablenkung $= 180 - \alpha$ an, es ist daher der Gesammtstoß in der Richtung des Strahles:

$$P = (1 - \cos. \alpha) \cdot \frac{c - v}{g} Q_1 \gamma + (1 + \cos. \alpha) \cdot \frac{c - v}{g} Q_2 \gamma$$

$$= \left(\frac{c - v}{g}\right) [(1 - cos.\alpha)\ Q_1 + (1 + cos.\alpha)\ Q_2]\ \gamma.$$

Nun fordert aber das Gleichgewicht der beiden Strahltheile, daß die Drücke

$$\frac{(c - v)}{g} (1 - cos.\alpha)\ Q_1\ \gamma \text{ und } \frac{(c - v)}{g} (1 + cos.\alpha)\ Q_2\ \gamma$$

zwischen denselben einander gleich seien, es ist daher auch:

$$(1 - cos.\alpha)\ Q_1 = (1 + cos.\alpha)\ Q_2,$$

oder da $Q_1 + Q_2 = Q$,

$$(1 - cos.\alpha)\ Q_1 = (1 + cos.\alpha)\ (Q - Q_1), \text{ d. i.:}$$

$$Q_1 = \left(\frac{1 + cos.\alpha}{2}\right) Q \text{ und } Q_2 = \left(\frac{1 - cos.\alpha}{2}\right) Q$$

zu setzen, so daß endlich der gesammte Stoß in der Richtung des Strahles:

$$P = \frac{(c - v)}{g} . 2\ (1 - cos.\alpha)\ \frac{(1 + cos.\alpha)\ Q}{2} \gamma$$

$$= \frac{(c - v)}{g} (1 - cos.\alpha^2)\ Q\gamma, \text{ d. i.:}$$

$$P = \frac{c - v}{g}\ sin.\alpha^2 . Q\gamma \text{ ausfällt.}$$

Dividirt man die Stoßleistung

$$L = Pv = \frac{(c - v)}{g}\ v\, sin.\alpha^2 . Q\gamma$$

durch die Geschwindigkeit $\overline{Av_1} = v_1 = v\, sin.\alpha$, mit welcher die Fläche in normaler Richtung ausweicht, so erhält man den Normalstoß:

$$N = \frac{(c - v)\ v\, sin.\alpha^2}{g\, v\, sin.\alpha} \cdot Q\gamma = \frac{(c - v)}{g}\ sin.\alpha\ .\ Q\gamma,$$

und dieser besteht außer dem bekannten Parallelstoße

$$P = N sin.\alpha = \frac{(c - v)}{g}\ sin.\alpha^2 . Q\gamma$$

noch aus einem Seitenstoße

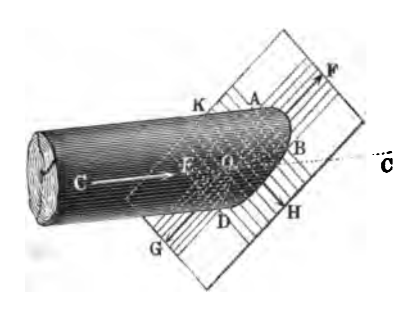
$$S = N cos.\alpha = \frac{(c - v)}{g} sin.\alpha\, cos.\alpha . Q\gamma = \frac{(c - v)}{2g} . sin.\, 2\alpha . Q\gamma.$$

Es wächst also der Normalstoß wie der Sinus, der Parallelstoß wie das Quadrat des Sinus des Einfallswinkels und der Seitenstoß wie der Sinus vom Doppelten dieses Winkels.

Hat endlich die schiefgestoßene Fläche gar keine Einfassung, so daß sich das Wasser nach allen Richtungen auf ihr ausbreiten kann, so fällt der Stoß noch größer aus, weil unter allen Winkeln, um welche die Wasserfäden abgelenkt werden, gerade α der kleinste ist, und daher jeder Faden, welcher sich nicht in der Normalebene bewegt, einen größeren Druck ausübt, als der Faden in der Normalebene. Nehmen wir an, daß ein den Sectoren AOB

und DOE, Fig. 854, entsprechender Theil Q_1 um die Winkel $COF = \alpha$ und $COG = 180 - \alpha$, und ein anderer, den Sectoren AOE und BOD entsprechender Theil Q_2 um $COK = COH = 90^0$ abgelenkt werde, und daß beide Theile einen gleichen Parallelstoß ausüben, so können wir setzen:

Fig. 854.



$$P = \frac{c - v}{g} Q_1 \gamma \, sin. \alpha^2 + \frac{c - v}{g} Q_2 \gamma,$$

ferner $Q_1 \, sin. \alpha^2 = Q_2$ und $Q_1 + Q_2 = Q$; es folgt daher:

$$Q_1 (1 + sin. \alpha^2) = Q,$$

und der gesammte Parallelstoß:

$$P = \left(\frac{c - v}{g}\right) \frac{2 \, Q \gamma \, sin. \alpha^2}{1 + sin. \alpha^2} = \frac{2 \, sin. \alpha^2}{1 + sin. \alpha^2} \cdot \frac{c - v}{g} \cdot Q \gamma.$$

Wiewohl diese Voraussetzung nur eine annähernd richtige ist, so stimmt diese Formel doch ziemlich mit den neuesten Versuchen von Bidone überein.

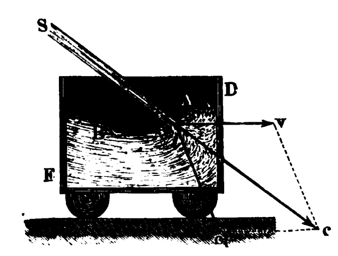
Anmerkung. Herr Prof. Broch findet in seiner Mechanik, Seite 614, für den schiefen Wasserstoß gegen eine Kreisfläche

$$P = \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) tang. \alpha \left(\frac{c - v}{g}\right) Q \gamma, \text{ und}$$

$$N = tang. \alpha \, Ln. cotg. \frac{\alpha}{2} \left(\frac{c - v}{g}\right) Q \gamma.$$

§. 503 **Stoss des Wassers ins Wasser.** Wenn das Wasserquantum Q mit einer gewissen Geschwindigkeit $\overline{Ac} = c$ in ein mit der Geschwindigkeit $\overline{Av} = v$ fortbewegtes Gefäß DE, Fig. 855, strömt, so wird von dem Arbeitsvermögen $L_0 = \frac{Q c^2}{2 g} \gamma$ desselben ein Theil $L_1 = \frac{Q c_1^2}{2 g} \gamma$ auf die Bildung und Erhaltung des Wasserwirbels AB verwendet, welcher aus dem Verluste der Geschwindigkeit c_1 hervorgeht. Bezeichnet α den Winkel vAc, um welchen die Richtung des Wasserstrahles von der Bewegungsrichtung des Gefäßes abweicht, so ist

Fig. 855.



$$c_1^2 = c^2 + v^2 - 2 c v \, cos. \alpha,$$

und daher die durch den Wasserwirbel verloren gehende mechanische Arbeit

$$L_1 = \frac{Q\,(c^2 + v^2 - 2\,c\,v\,cos.\,\alpha)}{2\,g}.$$

Nun behält aber das Wasserquantum Q noch das Arbeitsvermögen $L_2 = \frac{Q v^2}{2\,g}\gamma$ in sich, da es die Geschwindigkeit v des Gefäßes behält, daher folgt die **mechanische Arbeit**, welche auf das Gefäß übergeht, und auf die Fortbewegung desselben verwendet wird:

$$L = L_0 - L_1 - L_2$$

$$= \left(\frac{c^2 - (c^2 + v^2 - 2\,c\,v\,cos.\,\alpha) - v^2}{2\,g}\right) Q\gamma = \frac{2\,c\,v\,cos.\,\alpha - 2\,v^2}{2\,g}\,Q\,\gamma$$

$$= \frac{(c\,cos.\,\alpha - v)\,v}{g}\,Q\,\gamma,$$

und die **Kraft**, mit welcher das Gefäß in seiner Bewegungsrichtung durch das einströmende Wasser fortgetrieben wird:

$$P = \frac{L}{v} = \left(\frac{c\ cos.\,\alpha\ -\ v}{g}\right) Q\,\gamma.$$

Noch ist das stoßende Wasserquantum pr. Secunde, $Q = Fc$, wenn F den Querschnitt des Strahles bei seinem Eintritt bezeichnet, daher hat man auch

$$P = \frac{(c\ cos.\,\alpha\ -\ v)\,c}{g}\,F\,\gamma,$$

und für den Fall, daß das Gefäß still steht, also $v = 0$ ist,

$$P = \frac{c^2 cos.\alpha}{g}\,F\,\gamma = 2\,\frac{c^2}{2\,g}\,F\,\gamma\ cos.\,\alpha = 2\,F\,h\,\gamma\ cos.\,\alpha,$$

wobei h die Geschwindigkeitshöhe $\frac{c^2}{2\,g}$ bezeichnet.

Die mechanische Arbeit ist ein Maximum für $v = \frac{1}{2}\,c\ cos.\,\alpha$, und zwar

$$L_m = \frac{1}{2}\,\frac{c^2\,(cos.\,\alpha)^2}{2\,g}\,Q\,\gamma = \frac{1}{2}\,Q\,h\,\gamma\,(cos.\,\alpha)^2.$$

Führt man den Strahl in der Bewegungsrichtung des Gefäßes ein, macht man also $\alpha = 0$, so erhält man:

$$L = \frac{(c\ -\ v)\,v}{g}\,Q\,\gamma \text{ und}$$

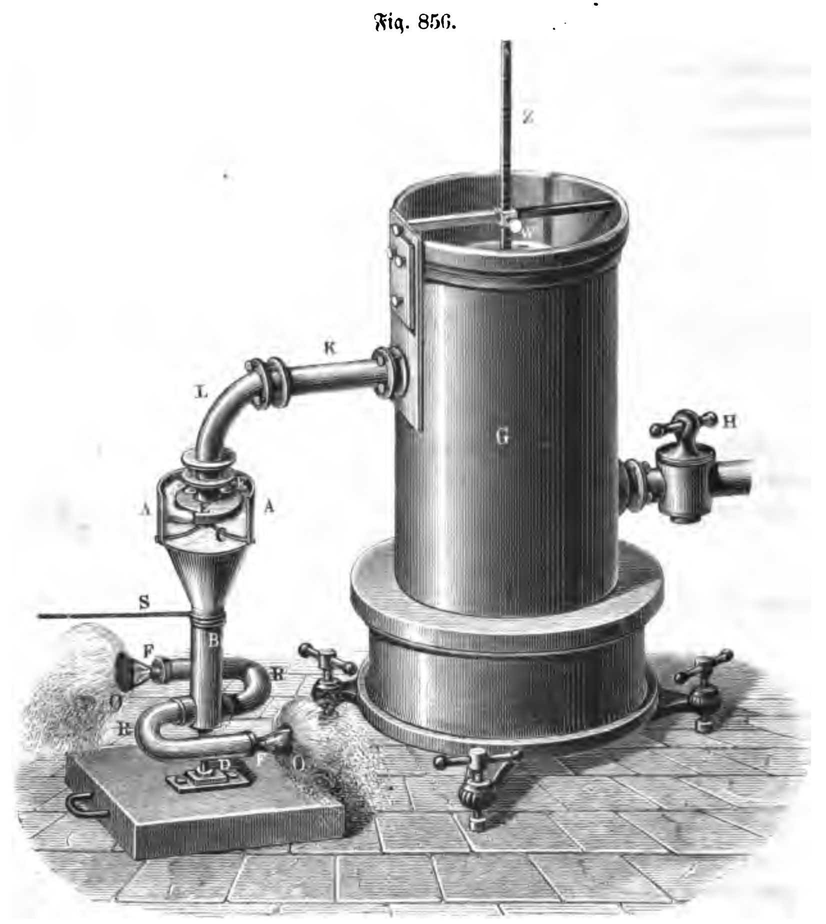
$$L_m = \frac{1}{2}\,Q\,h\,\gamma.$$

Es wird daher in diesem Falle nur die Hälfte des ganzen mechanischen Arbeitsvermögens $Q\,h\,\gamma$ des Wassers gewonnen (vergl. §. 500).

§. 504 **Reactionsrad zu Versuchen.** Zur Prüfung der vorstehenden Theorie des Stoßes und der Reaction des Wassers bedient man sich am besten eines **kleinen Reactionsrades** AAB, Fig. 856 (a. f. S.), mit verticaler Um-

drehungsaxe CD (s. des Verfassers Experimental-Hydraulik §. 48 u. s. w.). Das Wasser, welches zum Umtriebe dieses Rades dient, wird oben durch zwei Seitencanäle E, E nahe tangential in den Behälter $A\ A$ des Rades eingeführt, und

Fig. 856.



strömt unten, durch zwei Seitenmündungen F, F in den Enden der Schwungröhren R, R aus. Zur Erzielung eines constanten Wasserzuflusses und einer constanten Umtriebskraft dient der Hahn H in der Röhre, welche das Betriebswasser zunächst dem Behälter G zuführt, aus dem es wieder durch eine Röhre KL in die Kammer EE mit den Eintrittscanälen E, E geleitet wird. Während des Ganges der Maschine ist der Hahn H so zu stellen, daß die Oberfläche W des Wassers im Reservoir G immer von der Spitze des Zeigers Z berührt wird.

Um die Reaction des ausfließenden Wassers zu finden, befestigt man noch an der Mittelröhre B des Rades eine dünne Schnur S, welche das vom Rade zu hebende Gewicht trägt und mittels einer Leitrolle nach dem Rade geführt wird. Das Aufschlagwasserquantum wird in dem Reservoir, aus welchem das Wasser in die Röhre mit dem Hahne fließt, dadurch gemessen, daß man den Inhalt A und die Tiefe a der Senkung des Wasserspiegels während der Versuchszeit ausmittelt. Ist dann die Ausfluß- oder Beobachtungszeit $= t$, so hat man das Aufschlagwasserquantum pr. Secunde,

$$Q = \frac{A a}{t},$$

und ist das Gefälle, d. i. die senkrechte Tiefe der Ausmündungen des Rades unter dem Wasserspiegel im Reservoir G, $= h$, so läßt sich das ganze Arbeitsvermögen des Aufschlagwassers pr. Secunde

$$L = Q h \gamma = \frac{A a h \gamma}{t} \text{ setzen.}$$

Wird nun in der Zeit t von der Maschine das Gewicht G auf die senkrechte Höhe s gehoben, so ist dagegen die wirklich verrichtete mechanische Arbeit des Reactionsrades:

$$L_1 = \frac{G s}{t},$$

und es lassen sich nun beide Arbeitswerthe, von welchen der letztere stets der kleinere ist, mit einander vergleichen.

§. 505 **Theorie des Reactionsrades.** Das ganze Gefälle h eines solchen Wasserrades besteht aus der Höhe h_1 vom Wasserspiegel bis an die Eintrittsstelle E gemessen, und aus der Höhe h_2, von dem letzteren Punkte aus bis zu den Ausflußöffnungen des Rades gerechnet. Aus h_1 bestimmt sich die Eintrittsgeschwindigkeit c_1 des Wassers durch die Formel $c_1 = \sqrt{2 g h_1}$, und aus h_2 läßt sich die relative Ausflußgeschwindigkeit des Wassers beim Austritt aus dem Rade nach §. 304 mittels der Formel

$$c = \sqrt{2 g h_2 + v^2 - v_1^2}$$

berechnen, wenn die Umdrehungsgeschwindigkeiten v_1 und v des Rades an der Ein- und an der Austrittsstelle bekannt sind. Da die als Umdrehungskraft dienende Reaction des Wassers der Ausflußgeschwindigkeit entgegengesetzt wirkt, so ist die absolute Geschwindigkeit des Wassers, beim Austritt aus dem Rade:

$$w = c - v,$$

und deren Quadrat:

$$w^2 = c^2 - 2 c v + v^2 = 2 g h_2 - 2 c v + 2 v^2 - v_1^2,$$

und folglich das mechanische Arbeitsvermögen des fortfließenden Wassers:

$$L_2 = Q\gamma \cdot \frac{w^2}{2g} = Q\gamma\left(h_2 - \frac{(c-v)v}{g} - \frac{v_1^2}{2g}\right).$$

Das mit der relativen Geschwindigkeit $w_1 = c_1 - v_1$ in das Rad einströmende Wasser verliert außerdem durch den Stoß (nach §. 436) das Arbeitsvermögen

$$L_1 = Q\gamma\frac{(c_1-v_1)^2}{2g} = Q\gamma\left(h_1 - \frac{c_1 v_1}{g} + \frac{v_1^2}{2g}\right),$$

folglich geht von dem ganzen Arbeitsvermögen des Wassers auf das Rad

$$Qh\gamma = Q(h_1 + h_2)\gamma,$$

nur die mechanische Arbeit:

$$L = Q\gamma(h - h_1 - h_2) = Q\gamma\left(\frac{(c-v)v}{g} + \frac{c_1 v_1}{g}\right) \text{ über.}$$

Um eine möglichst große Arbeit des Rades zu erlangen, muß $w =$ Null, also $v = c$, und ebenso $w_1 =$ Null, also $v_1 = c_1$ sein, wonach dann

$$\frac{v_1^2}{2g} = h_2, \text{ oder } v_1 = \sqrt{2gh_2}, \text{ sowie}$$

$$\frac{v_1^2}{2g} = h_1, \text{ oder } v_1 = \sqrt{2gh_1} \text{ folgt.}$$

Es ist also in diesem Falle $h_1 = h_2 = \frac{1}{2}h$, und die entsprechende Maximalleistung der Maschine:

$$L_m = Q\gamma \cdot \frac{c_1 v_1}{g} = Q\gamma \cdot \frac{v_1^2}{g} = 2Qh_1\gamma = Qh\gamma,$$

d. i. gleich dem ganzen Arbeitsvermögen des Wassers.

Bezeichnet r_1 den Abstand des Eintrittspunktes und r den mittleren Abstand der Ausflußöffnungen des Rades von der Axe desselben, so hat man

$$\frac{v_1}{v} = \frac{r_1}{r}, \text{ daher } v_1 = \frac{r_1}{r}v$$

und die Radleistung überhaupt

$$L = Q\gamma\left(c - v + \frac{r_1}{r}c_1\right)\frac{v}{g};$$

so daß nun die Umdrehungskraft, im Abstande r gemessen:

$$P = \frac{L}{v} = \frac{Q\gamma}{g}\left(c - v + \frac{r_1}{r}c_1\right) \text{ folgt.}$$

Wenn die Last oder das angehangene Gewicht G am Hebelarme a wirkt, welcher z. B. im abgebildeten Apparate, sehr nahe dem Halbmesser der Mittelröhre B gleich ist, so hat man $Ga = Pr$, und daher das anzuhängende und während der Umdrehung des Rades emporzuhebende Gewicht:

$$G = \frac{r}{a}P = \frac{Q\gamma}{ga}[(c-v)r + c_1 r_1],$$

also für $c = v$ und $c_1 = v_1$,

$$G = \frac{Q\gamma}{ga} c_1 r_1 = \frac{Q\gamma}{ga} v_1 r_1.$$

Bezeichnet F den Inhalt der Ausflußmündungen, sowie F_1 den der Eintrittsöffnungen des Rades zusammengenommen, so ist

$$Q = Fc = F_1 c_1, \text{ und daher}$$

$$F_1 = \frac{Q}{c_1} = \frac{Q}{\sqrt{2gh_1}}, \text{ sowie}$$

$$F = \frac{Q}{c} = \frac{Q}{\sqrt{2gh_2 + v^2 - v_1^2}} = F_1 \sqrt{\frac{2gh_1}{2gh_2 + v^2 - v_1^2}}.$$

Für $v = c$, und $v_1 = c_1$, wo $h_1 = h_2 = \frac{1}{2} h$ ist, hat man $Q = Fv$, daher:

$$P = \frac{Qh\gamma}{v} = Fh\gamma,$$

dagegen für $v = 0$, ist $Q = F\sqrt{2gh_2}$, daher

$$P = \frac{Fc\gamma}{g}\left(c + \frac{r_1}{r} c_1\right).$$

Führt man noch das Wasser sehr langsam ins Rad ein, so läßt sich $c_1 = 0$, sowie $h_1 = 0$ setzen, und es folgt im letzteren Falle die Reactionskraft:

$$P = \frac{Fc\gamma}{g} = \frac{2Fc^2\gamma}{2g} = 2Fh_2\gamma = 2Fh\gamma,$$

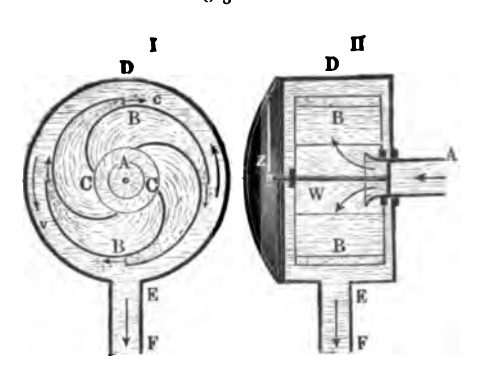
wie schon oben gefunden worden ist.

Da wir bei den vorstehenden Entwickelungen von den Nebenhindernissen abgesehen haben, so geben die Versuche an der abgebildeten Maschine nicht genau die gefundenen, sondern um einige Procent kleinere Kraftwerthe. Uebrigens stehen die Ergebnisse der Versuche an einem solchen Rade bei sorgfältiger Ausführung im besten Einklang mit der im Vorstehenden entwickelten Theorie.

Um diese Maschine zur Prüfung der Theorie des Wasserstoßes zu verwenden, befestigt man Stoßplatten, O, O, kleine Gefäße u. s. w. so an den Schwungröhren des Rades, daß dieselben den Stoß des ausfließenden Wassers aufnehmen können. Es ist dann die Umdrehungskraft gleich der Differenz zwischen der Reaction des Wassers im Rade und der Stoßkraft desselben außerhalb des Rades. Ganz der Theorie entsprechend bleibt dann das Rad stehen, wenn das ausströmende Wasser winkelrecht gegen ebene Stoßplatten oder in mit Wasser angefüllte Gefäße strömt; es behält dagegen noch eine Umdrehungsbewegung in der Richtung der Reaction, wenn es schief gegen ebene Stoßplatten oder gerade gegen convexe Stoßplatten stößt, und es dreht sich dagegen in der Richtung des ausfließenden Wassers um, wenn dasselbe von concaven Stoßplatten aufgefangen wird.

§. 506 **Wassermesser.** In neuerer Zeit bedient man sich auch zum Messen des fließenden Wassers der Wassermesser (franz. compteurs hydrauliques; engl. water-meters), welche durch die Reactionskraft des ausfließenden Wassers in Bewegung gesetzt werden, und im Wesentlichen die Einrichtung eines Reactionsrades oder einer Turbine haben. Eine ideelle Darstellung eines solchen Wassermessers führt Fig. 857 im Durchschnitt vor Augen. Das zu messende Wasser fließt durch eine Röhre A in das Innere des Rades BB, und gelangt durch 4 Canäle CB, CB ... am äußern Umfang desselben zum Ausfluß in das Gehäuse DE, aus welchem es mittels einer Röhre EF weiter geführt wird. Die Welle W dieses Rades trägt einen Zeiger Z, oder vielmehr einen ganzen Zeigermechanismus, welcher die Umdrehungszahl des Rades und dadurch auch das derselben proportionale Quantum des durchgeflossenen Wassers zu jeder Zeit angiebt. Bezeichnet h den durch die Höhe einer Wassersäule gemessenen Druckverlust beim Durchgang durch das Rad, ferner Q das durchfließende Wasserquantum pr. Secunde, c die Ausfluß- und v die in umgekehrter Richtung erfolgende Radgeschwindigkeit am Umfange, so hat man $c^2 - v^2 = 2gh$ und die Leistung des Rades:

Fig. 857.



$$L = \frac{(c - v)\,v}{g}\,Q\gamma \text{ (s. §. 505).}$$

Ist R der Widerstand des Rades, in Folge seiner Axenreibung u. s. w., so kann man $L = Rv$ setzen, und erhält die Formel

$$R = \left(\frac{c - v}{g}\right) Q\gamma,$$

oder, wenn noch F die Summe der Inhalte sämmtlicher Ausmündungen bezeichnet, so daß $Q = Fc$, oder $c = \frac{Q}{F}$ gesetzt werden kann,

$$R = \left(\frac{Q}{F} - v\right)\frac{Q\gamma}{g}; \text{ so daß}$$

$$v = \frac{Q}{F} - \frac{gR}{Q\gamma} \text{ folgt.}$$

Wäre R Null, oder wenigstens sehr klein, so ließe sich $v = \frac{Q}{F}$ setzen,

also annehmen, daß die Umdrehungsgeschwindigkeit v der Wassermenge Q proportional wäre, was allerdings auch zu fordern ist. Wenn dagegen $R = \psi v$ wäre, also der Widerstand des Rades mit v gleichmäßig wüchse, so würde

$$v + \frac{\psi g v}{Q \gamma} = \frac{Q}{F}, \text{ also}$$

$$v = \frac{Q}{F\left(1 + \frac{\psi g}{Q\gamma}\right)}, \text{ annähernd} = \frac{Q}{F}\left(1 - \frac{\psi g}{Q\gamma}\right) \text{ zu setzen sein.}$$

Wenn also der Widerstand R des Rades nicht sehr klein ist, so nimmt das Instrument eine kleinere Umdrehungsgeschwindigkeit an als wenn derselbe Null oder wenigstens unbeträchtlich ist, und es giebt auch dann das Instrument ein zu kleines Wasserquantum an.

Setzt man $v = 0$, so erhält man bei der Ausflußmenge Q_0 die entsprechende Ausflußgeschwindigkeit

$$c_0 = \frac{g R}{Q_0 \gamma},$$

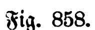
und es läßt sich dann wenigstens annähernd

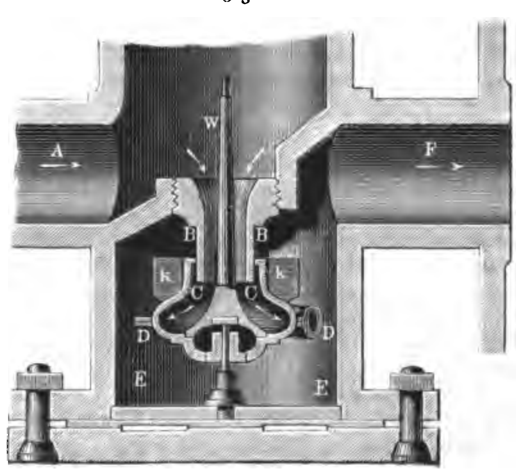
$$v = c - c_0, \text{ sowie}$$

$$Q = F(v + c_0) = \frac{\pi F r u}{30} + Q_0 = \mu u + Q_0$$

setzen, wenn r den Radhalbmesser, u die Umdrehungszahl des Rades und μ einen durch Versuche zu bestimmenden Coefficienten bezeichnen.

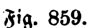
Am meisten haben in der neuesten Zeit die Wassermesser dieser Art von Siemens Anwendung gefunden, wovon Fig 858 den Haupttheil im Durch-

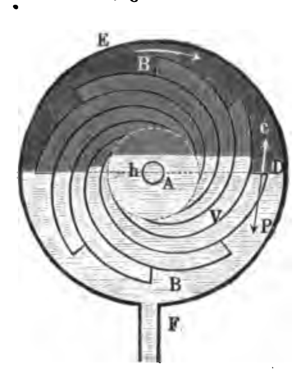

Fig. 858.



schnitt darstellt. Das aus A zufließende Wasser tritt durch die Röhre BB in das Rad CC, und wird von da durch die Schwungröhren DD in das Gehäuse EE geführt, aus dem es die Röhre F weiter leitet. Die Welle W des Rades ist oben durch eine Stopfbüchse geführt, und setzt mit ihrem schraubenförmigen Ende den Zählapparat in Bewegung. Die Flügel k, k auf dem Rade sollen durch den Widerstand, welchen sie im Wasser erleiden, zum Reguliren der Umdrehungsbewegung des Rades beitragen.

Man kann auch das Reactionsrad so einrichten, daß es bei jeder Umdrehung eine bestimmte Wassermenge durchführt. In dieser Absicht taucht man das Rad BAB, Fig. 859, nur zum Theil ins Wasser, so daß sich bei Umdrehung desselben, die Röhren oder Spiralgänge abwechselnd mit Luft und Wasser füllen. Das Wasser wird auch hier durch eine Röhre ins Innere des Rades und von da durch die Spiralgänge in den übrigen Raum des Gehäuses EF geführt, aus dem es in der Röhre F abläuft. Das Wasser steht hier im Innern des Rades um eine gewisse Höhe h über dem Wasser im Gefäße, und wenn daher bei der Umdrehung des Rades in der angedeuteten Richtung eine Ausmündung D unter den Wasserspiegel im Inneren gelangt, so fängt das Wasser an durch dieselbe auszufließen, und übt dabei eine gewisse Reactionskraft P aus, wodurch die Umdrehungsbewegung des Rades unterhalten wird. Ist V die Wassermenge, welche ein Spiralgang faßt, und n die Anzahl dieser Canäle, so fließt bei der Umdrehungszahl u des Rades pr. Minute, die Wassermenge $Q = \frac{n u V}{60}$ pr. Secunde durch das Rad.


Fig. 859.



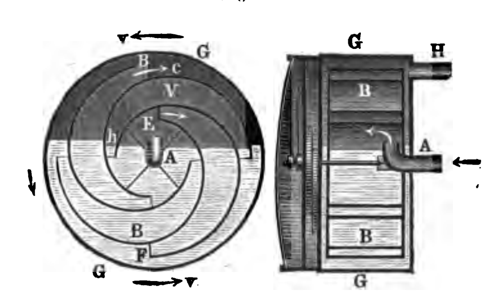
Anmerkung. Ueber den Siemen'schen Wassermesser ist nachzulesen: die Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, Bd. I., 1857, wo auch noch ein nach dem Principe des Aichens construirter Wassermesser von Jopling beschrieben wird. Siehe auch die Schrift: Siemens and Adamsons Patent-Water-Meter. Ein ganz eigenthümlich construirter Wassermesser in Form eines Reactionsrades ist im Génie industrielle Tome XXI, No. 126, 1861, unter dem Namen: Compteur hydraulique pour la mesure d'écoulement des liquides, par Guyet beschrieben. Zwei Wassermesser sind auch in der englischen Schrift Hydraulia, by W. Matthews behandelt. Ein Compteur hydraulique, welcher auf dem Bahnhofe zu Chartres gebraucht wird, ist beschrieben im Bulletin de la Société d'encouragement, 51. Jahrgang (1852). Ueber Uhler's Meßapparat für Flüssigkeit handelt Dingler's Journal, Bd. 161. Die Beschreibung eines Controlapparates zum Messen des in den Branntweinbrennereien gewonnenen Spiritus

von Perels enthalten die Mittheilungen des Gewerbevereines für Hannover, Neue Folge 1861.

Gasmesser. Die sogenannten nassen Gasmesser oder Gasuhren (franz. compteurs à gaz; engl. gas-meters) sind ebenso wie gewisse Wassermesser, kleine Räder mit Spiralgängen, welche zur größeren Hälfte ins Wasser eintauchen, und durch die Reaction des durchströmenden Gases in Umdrehung gesetzt werden, wobei jeder Spiralgang eine gewisse Gasmenge von innen nach außen führt. Die wesentliche Einrichtung eines solchen Gasmessers ist aus den beiden Durchschnitten in Fig. 860 ersichtlich. Das zuströmende Gas wird durch eine Kropfröhre A in das Innere eines Rades BB geleitet, wo es den Wasserspiegel um die Höhe h tiefer drückt, welche dem Spannungsverlust des Gases beim Durchgang durch das Instrument entspricht. Aus demselben tritt es nach und nach in die Einmündungen der Spiralgänge, füllt dieselben fast ganz aus, und strömt zuletzt durch die Mündungen am Radumfang in das Gehäuse GG, aus welchem es durch eine Röhre H nach dem Punkte des Bedarfes geführt wird. Damit durch einen Spiralgang des Rades eine bestimmte Gasmenge abgeführt werde, ist die Anordnung so zu treffen, daß sich von den beiden Mündungen einer Windung immer mindestens eine unter Wasser befindet, weil dann während des Anfüllens eines Ganges kein Abfluß statthat, und während des Abflusses nicht noch Gas von innen nachströmt. Es ist dann die Gasmenge V, welche ein Spiralgang durchläßt, eine bestimmte, und daher das Gasquantum

§. 507

Fig. 860.



$$Q = \frac{n u V}{60}$$

zu setzen, wenn das Rad mit n Spiralgängen pr. Minute u Umdrehungen macht. Bezeichnet b den Barometerstand des abströmenden Gases, so ist $b + h$ der Barometerstand des zuströmenden Gases, daher, nach dem Mariotte'schen Gesetze, das Luftquantum eines Spiralganges, gemessen unter dem Drucke außerhalb des Rades:

$$V_1 = \left(\frac{b + h}{b}\right) V,$$

und folglich die Luftmenge, welche zunächst beim Austritt einer Außenmündung aus dem Wasser, aus dem Rade in den übrigen Gefäßraum strömt,

$$V_1 - V = \frac{h}{b} V.$$

Bei diesem Ausströmen wird die mechanische Arbeit

$$A = V p \, Log. nat. \left(\frac{b + h}{b}\right)$$

frei (s. §. 388), welche, da wegen der Kleinheit von $\frac{h}{b}$ annähernd

$$Log. nat. \left(\frac{b + h}{b}\right) = Log. nat. \left(1 + \frac{h}{b}\right) = \frac{h}{b}$$

und bei der Dichtigkeit γ der Manometerfüllung, $p = (b + h)\gamma = b\gamma$ ist, auch $A = V h \gamma$ gesetzt werden kann.

Von dieser Arbeit wird ein Theil auf die Umdrehungsbewegung des Rades verwendet, und ein Theil von der Wirbelbildung aufgezehrt. Der erstere Theil ist durch den Ausdruck

$$A_1 = \frac{(c - v) v}{g} \cdot \frac{h}{b} V \gamma_1,$$

in welchem h den mittleren Manometerstand, c die mittlere Ausflußgeschwindigkeit, v die äußere Radgeschwindigkeit und γ_1 die Dichtigkeit des ausströmenden Gases bezeichnet, bestimmt. Ist R der auf den Radumfang reducirte Widerstand des Rades, sowie r der Halbmesser desselben, so hat man die von demselben beanspruchte Arbeit:

$$A_1 = R \cdot \frac{2 \pi r}{n}, \text{ und daher zu setzen:}$$

$$\frac{(c - v) v}{g} \cdot \frac{h}{b} V \gamma_1 = \frac{2 \pi r}{n} R, \text{ oder da } 2 \pi r = \frac{60 v}{u} \text{ ist,}$$

$$\frac{c - v}{g} \cdot \frac{h}{b} V \gamma_1 = \frac{60 R}{n u}$$

und es folgt daher die dem Abstande h zwischen den beiden Wasserspiegeln entsprechende Umdrehungsgeschwindigkeit

$$v = c - \frac{g b}{h V \gamma_1} \cdot \frac{60 R}{n u}$$

sowie die Umdrehungszahl der Gasuhr pro Minute:

$$u = \frac{30}{\pi r} \left(c - \frac{60 g b R}{n u V h \gamma_1}\right).$$

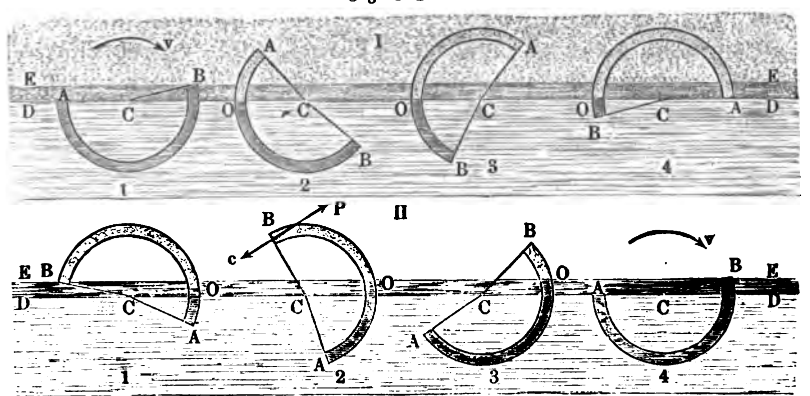
Annähernd fällt $c = \sqrt{2 g \frac{h \gamma}{\gamma_1}}$ aus, wenn γ die Dichtigkeit der Manometerfüllung bezeichnet. Das Gasquantum pro Minute ist natürlich

$$Q = \frac{n u}{60} V,$$

also der Umdrehungszahl u proportional.

Neuere Gasuhren. Anstatt die Spiralgänge einer Gasuhr in einer Ebene §. 508 um die Welle zu legen, kann man dieselben auch schraubenförmig um dieselbe herumführen. Die Art und Weise der Wirkung eines solchen Gasmessers ist aus den Durchschnitten in I. und II., Fig. 861, zu ersehen, wo DD den Wasserspiegel an der vorderen und EE den Wasserspiegel an der hinteren Stirnfläche des

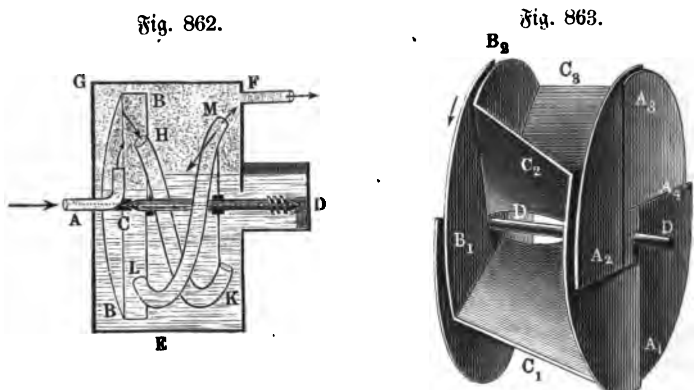
Fig. 861.



eine liegende Trommel bildenden Rades vorstellt. Die Mündung A des Spiralganges AOB mündet in der Kammer an der vorderen Fläche aus und nimmt das zuströmende Gas auf, die Mündung B hingegen führt das Gas in die Kammer an der hinteren Stirnfläche, von welcher aus es mittels einer Röhre weiter geführt wird. In Fig. 861, I. sind die verschiedenen Stellungen eines Spiralganges von der vorderen Stirnfläche aus gesehen, abgebildet. Fig. 861, II. dagegen stellt verschiedene Stellungen dieses Ganges von der hinteren Stirnfläche des Rades aus betrachtet, dar. Bei der durch einen Pfeil angedeuteten Richtung der Umdrehung des Rades um die horizontale Axe C tritt in (I., 1) die Einmündung A eben aus dem vorderen Wasser heraus, während die Ausmündung B in das hintere Wasser zu treten beginnt; ferner sind in (I., 2) und (I., 3) Gasbögen AO, AO durch die Mündung A eingetreten, und es taucht in (I., 4) die Einmündung A wieder in das Vorderwasser, wobei nach Aufnahme einer gewissen Gasmenge V das weitere Einströmen von Gas durch A aufhört. Kurz darauf gelangt aber die Ausmündung B wie (II., 1) darstellt, aus dem Hinterwasser, und es beginnt das Ausströmen des vorher eingenommenen Gases, welches bei den Stellungen (II., 2) und (II., 3) vollkommen im Gange ist. Bei einer neuen Umdrehung tritt B wieder in das Hinterwasser, wie (II., 4) darstellt, und es beginnt nun eine neue Aufnahme von Gas. Es wird also bei der einen Hälfte der Umdrehung von dem Spiralgange AOB ein Gasbogen AO (I., 4) von der größeren Pressung $b + h$ aufgenommen, und bei der zweiten

Hälften von demselben in den Raum mit der kleineren Pressung geführt. Bei dem Uebergange aus der größeren Pressung in die kleinere wird wieder das Arbeitsquantum $A = Vh\gamma$ frei, von welchem ein Theil die Umdrehung des Rades bewirkt, wie bereits im vorigen Paragraphen angegeben worden ist. Die allgemeine Einrichtung und Thätigkeit einer solchen Gasuhr ist aus einer ideellen Darstellung in Fig. 862 noch besser zu erkennen. Das Gas wird zunächst durch ein Kropfrohr A in eine Kammer BB geführt, welche nur in der Mitte, um die Umdrehungsaxe C herum, mit dem Wasser im Gehäuse EFG communicirt, am äußeren Umfange aber, wo die Spiralgänge HK und LM einmünden, luftdicht abgeschlossen ist. In der Abbildung ist dargestellt, wie der Spiralgang HK aus BB Gas aufnimmt, und wie dagegen der Spiralgang LM das kurz vorher aufgenommene Gas bei M in den oberen Raum des Gehäuses EFG führt, aus dem es durch eine Röhre F weiter geleitet wird. Bei dieser Einrichtung der Gasuhr ist das Gas in der Vorkammer durch das Wasser von dem in dem Gehäuse ganz abgesperrt, und daher eine Liderung, welche durch die Reibung viel Kraft verzehrt, nicht nöthig. Das andere Ende D der Axe CD des Rades ist mit einem Schraubengewinde versehen, wodurch der Rädermechanismus des Zählapparates in Bewegung gesetzt wird.

Fig. 862. Fig. 863.



Die Crosley'schen Gasuhren, welche eine allgemeine Verbreitung erlangt haben, sind nach dem im Vorstehenden erklärten Principe construirt; nur sind hier die Spiralgänge nicht röhrenförmig, sondern wirkliche Kammern mit spiralförmigen Scheidewänden und durch Ausbiegung der Stirnwände gebildeten triangulären Ein- und Ausmündungscanälen. Figur 863 ist eine perspectivische Ansicht eines solchen Rades bei abgenommenem Mantel, welches sich aus 4 Blechstücken, wie Fig. 864 darstellt, zusammensetzen läßt. Man sieht in A_1, A_2, A_3, A_4 die Ein- und in B_1, B_2 . . . die Ausmündungen, sowie in C_1, C_2, C_3 . . . die Scheidewände des um die Axe DD umlaufen-

den Rades der Gasuhr. In Fig. 865 ist ein Längendurchschnitt der Gasuhr mit dem Aeußeren der Trommel abgebildet; man bemerkt bei K die Kropfröhre, welche das Gas in die Vorkammer des Rades oder der Trommel einführt, und in Z die Röhre, welche das Gas aus dem oberen Raume AA des Uhrgehäuses ableitet. Das Gas strömt nicht unmittelbar aus der Gasleitung nach K, sondern die Röhre E führt erst das Gas in eine Kammer F, und von da durch die Ventilöffnung i in die Kammer G, von wo aus es durch den oberen Theil der verticalen Röhre H in die Kropfröhre K gelangt. Der äußere Wasserspiegel reicht gerade bis zur Einmündung der Röhre H, durch welche das überschüssige Wasser nach unten in einen Behälter L abgeführt wird. Damit auf der anderen Seite das Wasser nicht zu tief sinke, ist ein Schwimmer S angebracht, welcher das Admissionsventil i trägt, und dasselbe verschließt, wenn er bis auf eine gewisse Tiefe sinkt. Der Gaszufluß hört dann ganz auf und man wird dadurch benachrichtigt, daß eine Nachfüllung von Wasser durch eine Mündung M in einer nur unten mit dem Wasserraume in Communication stehenden Kammer N nöthig ist.

Fig. 864.

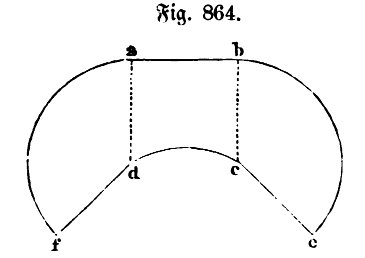
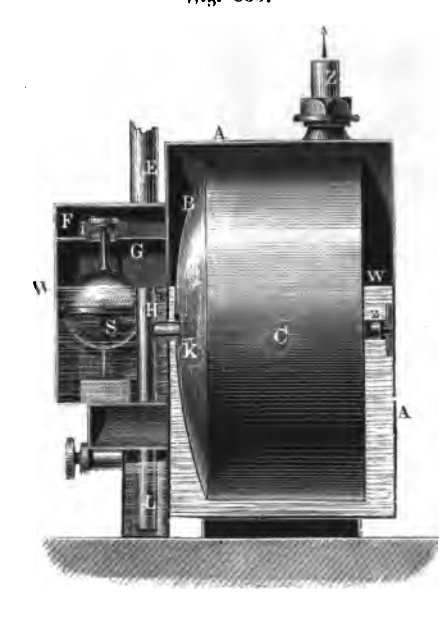


Fig. 865.

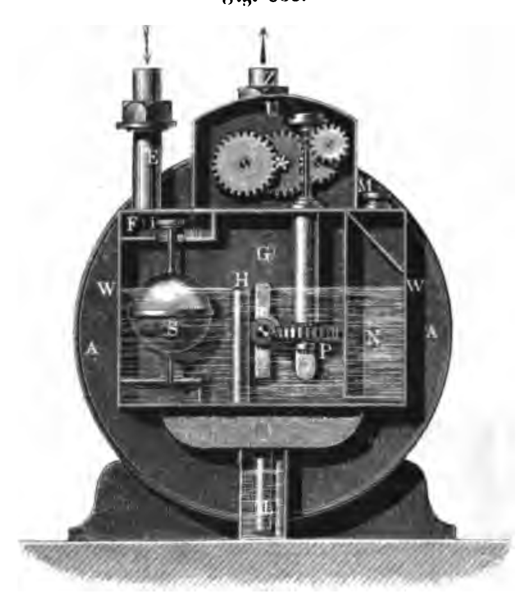


Die Abbildung in Fig. 866 (a. f. S.) führt die Gasuhr in einem vordern Durchschnitt vor Augen, woran außer der Kammer N mit der Mündung M, vorzüglich das Uhrwerk U des Zählapparates, welches mittels eines Schraubengewindes an der Axe der Trommel, und durch eine stehende Welle mit Zahnrad P im Umtrieb gesetzt wird, zu sehen ist.

Ein wesentlicher Widerstand bei dem Gange der Crosley'schen Gasuhr geht aus dem Ein- und Austritt des Wassers durch die verengten trian-

gulären Mündungen hervor. Aus dem Inhalte F einer Ein- oder Ausmündung und der durchströmenden Wassermenge pr. Secunde, welche sich dem Gasquantum Q gleichsetzen läßt, folgt die Ein- und Austrittsgeschwindigkeit

Fig. 866.



des Wassers $v_1 = \frac{Q}{F}$, und daher der entsprechende Arbeitsverlust pr. Secunde:

$$L_1 = z \frac{v_1^2}{2g} Q \gamma = \left(\frac{Q}{F}\right)^2 \frac{Q \gamma}{g}.$$

Anmerkung. Näheres über Gasuhren ist nachzulesen in Schilling's Handbuch der Steinkohlengasbeleuchtung, ferner Heeren's Aufsatz: „die Einrichtung der Gasuhren" in den Mittheilungen des Gewerbevereins für das K. Hannover, Jahrgang 1859. Eine neue Gasuhr von Hansen ist beschrieben im Journal für Gasbeleuchtung, 1861.

§. 509 **Wirkungen unbegrenzter Flüssigkeiten.** Wenn sich ein Körper in einer unbegrenzten Flüssigkeit progressiv fortbewegt, oder wenn ein Körper in eine bewegte Flüssigkeit gebracht wird, so erleidet derselbe einen Druck, der von der Form und Größe dieses Körpers, sowie von der Dichtigkeit der Flüssigkeit und von der Geschwindigkeit der einen oder der anderen Masse abhängt, und in einem Falle Widerstand, im anderen aber Stoß

der Flüssigkeit genannt wird. Dieser hydraulische Druck entspringt aber vorzüglich aus der Trägheit des Wassers, dessen Bewegungszustand durch das Zusammentreffen mit dem festen Körper verändert wird, dann aber auch noch aus der Kraft des Zusammenhängens der Wassertheilchen, die hierbei theilweise von einander getrennt oder an einander verschoben werden. Bewegt sich ein Körper AC, Fig. 867, dem stillstehenden Wasser entgegen, so schiebt er eine gewisse Wassermasse mit erhöhtem Drucke vor sich her. Während diese Wassermasse beim weiteren Fortrücken des Körpers auf der einen Seite immer mehr Zuwachs erhält, findet auf einer anderen Seite, nahe am Körper ein steter Abfluß statt, indem die der Vorderfläche AB zunächst liegenden

Fig. 867.

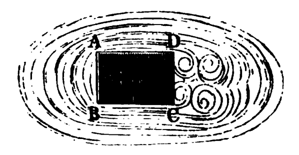
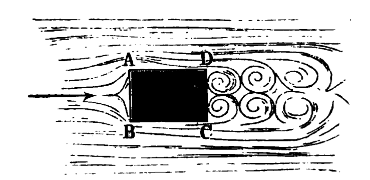


Fig. 868.



Theilchen eine Bewegung in der Richtung dieser Fläche annehmen. Trifft das bewegte Wasser einen in Ruhe befindlichen Körper AC, Fig. 868, so erzeugt sich vor demselben ebenfalls ein erhöhter Wasserdruck und macht, daß die Wassertheilchen vor dem Körper von ihrer ursprünglichen Richtung abgelenkt werden und sich an der Vorderfläche AB hinbewegen. Haben diese Wassertheilchen die Grenzen der Vorderfläche erreicht, so machen dieselben eine Wendung, und laufen nachher an den Seitenflächen des Körpers hin, bis sie an die Hinterfläche kommen, wo sie sich nicht sogleich wieder vereinigen, sondern zunächst wirbelnde Bewegungen annehmen. Man sieht, daß die allgemeinen Bewegungsverhältnisse der den Körper umgebenden Wasserelemente beim Stoße des bewegten Wassers dieselben sind, wie beim Widerstande eines im Wasser bewegten Körpers; nur findet bei den Wirbeln eine Verschiedenheit insofern statt, als bei kurzen Körpern die Wirbel im letzteren Falle einen kleineren Raum einnehmen als im ersteren. Die Geschwindigkeit der Wasserelemente nimmt in beiden Fällen von der Mitte der Vorderfläche an nach den Grenzen derselben immer mehr und mehr zu, erreicht am Anfange der Seitenflächen, wo in der Regel noch eine Contraction eintritt, ihr Maximum, nimmt nun bei dem an den Seitenflächen hingehenden Wasser allmälig ab, und erreicht endlich ihr Minimum bei dem Wasser, welches die Hinterfläche erlangt und in wirbelnde Bewegung übergeht.

Theorie des Stosses und Widerstandes. Der Normaldruck des ruhenden oder bewegten Wassers gegen einen in demselben bewegten oder in §. 510

Ruhe befindlichen Körper ist an verschiedenen Punkten dieses Körpers sehr verschieden. Er ist in der Mitte der Vorderfläche desselben am größten, und in der Mitte der Hinterfläche und nächstdem am Anfange der Seitenflächen am kleinsten, weil dort mehr ein Zu-, hier aber mehr ein Entströmen des Wassers in Hinsicht auf den Körper statt hat. Ist der Körper, wie wir in der Folge voraussetzen wollen, in Hinsicht auf die Bewegungsrichtung symmetrisch, so heben sich die sämmtlichen Pressungen rechtwinkelig gegen diese Richtung auf, und es kommen daher nur die Pressungen in der Bewegungsrichtung in Betracht. Nun sind aber die Pressungen auf der Hinterfläche des Körpers den Pressungen auf der Vorderfläche entgegengesetzt, es läßt sich daher der resultirende Stoß oder Widerstand des Wassers gleichsetzen der Differenz zwischen dem Drucke gegen die Vorder- und dem gegen die Hinterfläche.

Wenn wir auch die Größe dieser Drücke a priori nicht angeben können, so können wir doch wegen der großen Aehnlichkeit der Verhältnisse mit dem Stoße isolirter Strahlen annehmen, daß wenigstens das allgemeine Gesetz für den Stoß des unbegrenzten Wassers von dem für den Stoß isolirter Strahlen nicht abweiche. Ist also F der Inhalt einer Fläche, welche von einem unbegrenzten Strome, dessen Dichtigkeit γ sein möge, mit der Geschwindigkeit v getroffen wird, so läßt sich der entsprechende Stoß oder hydraulische Druck:

$$P = \zeta \frac{v^2}{2g} F\gamma$$

setzen, wobei ζ noch eine von der Form der Fläche abhängige Erfahrungszahl bezeichnet. Dieser Ausdruck läßt sich aber nicht nur auf die Wirkung gegen die Vorderfläche, sondern auch auf die gegen die Hinterfläche anwenden, nur besteht sie hier, wo das Wasser ein Bestreben hat, sich zu entfernen, in einem Zuge oder einem Negativdrucke. Ist nun $Fh\gamma$ der hydrostatische Druck (§. 690) gegen die Vorder- und gegen die Hinterfläche eines Körpers, so folgt der Gesammtdruck gegen die Vorderfläche:

$$P_1 = Fh\gamma + \zeta_1 \cdot \frac{v^2}{2g} F\gamma,$$

und der gegen die Hinterfläche:

$$P_2 = Fh\gamma - \zeta_2 \cdot \frac{v^2}{2g} F\gamma,$$

und es ergiebt sich so der resultirende Stoß oder Widerstand des Wassers:

$$P = P_1 - P_2 = (\zeta_1 + \zeta_2) \cdot \frac{v^2}{2g} F\gamma = \zeta \cdot \frac{v^2}{2g} F\gamma,$$

wenn $\zeta_1 + \zeta_2 = \zeta$ gesetzt wird.

Diese allgemeine Formel für den Stoß und Widerstand des unbegrenzten Wassers findet auch ihre Anwendung auf den Stoß des Win-

des und auf den Widerstand der Luft. Allerdings findet hier außer der Verschiedenheit des aërodynamischen Druckes an der Vorder- und Hinterfläche auch noch eine Verschiedenheit des aërostatischen Druckes statt, indem die Luft vor der Vorderfläche bei ihrer größeren Spannung auch eine größere Dichtigkeit (γ) hat, als an der Hinterfläche. Deshalb fallen wenigstens bei großen Geschwindigkeiten, wie sie z. B. bei Geschützkugeln vorkommen, die Widerstandscoefficienten der Luft größer aus, als die des Wassers.

Anmerkung. Eine eigenthümliche Erscheinung beim Stoße und Widerstande unbegrenzter Mittel (Wasser oder Luft) ist das Anhängen einer gewissen Wasser- oder Luftmasse an dem Körper, dessen Einfluß sich bei der ungleichförmigen Bewegung der Körper, wie z. B. bei Pendelschwingungen, besonders bemerkbar macht. Bei einer Kugel hat die dem bewegten Körper anhängende Luft- oder Wassermasse ein Volumen von 0,6 des Volumens der Kugel. Bei einem in der Axenrichtung bewegten prismatischen Körper ist das Verhältniß dieser Volumina

$$= 0{,}13 + 0{,}705 \frac{\sqrt{F}}{l},$$

wo l die Länge und F den Querschnitt des Körpers bezeichnet. Diese schon von du Buat aufgefundenen Verhältnisse haben durch die neueren Beobachtungen von Bessel, Sabine und Baily vollkommene Bestätigung gefunden.

Stoss und Widerstand gegen Flächen. §. 511 Der Widerstandscoefficient ζ oder die Zahl, womit die Geschwindigkeitshöhe $\frac{v^2}{2g}$ zu multipliciren ist, um die Höhe einer den hydraulischen Druck messenden Wassersäule zu erhalten, ist bei Körpern von verschiedenen Formen sehr verschieden, und nur bei Platten, welche rechtwinkelig gegen die Bewegungsrichtung stehen, von beinahe bestimmter Größe. Nach den Versuchen von du Buat, und nach denen von Thibault läßt sich für den Luft- und Wasserstoß gegen eine ruhende ebene Fläche, $\zeta = 1{,}86$ setzen, wogegen, jedoch mit weniger Sicherheit, für den Widerstand der Luft und des Wassers gegen eine bewegte ebene Fläche, $\zeta = 1{,}25$ anzunehmen sein möchte. In beiden Fällen kommen auf die Vorderfläche ungefähr zwei, und auf die Hinterfläche ein Drittel der ganzen Wirkung. Der Widerstand, welchen die Luft einer im Kreise umlaufenden Fläche entgegensetzt, ist von Borda, Hutton und Thibault sehr verschieden gefunden worden. Der Letztere fand mittels einer rotirenden ebenen Fläche von 0,1 Quadratmeter Inhalt den Widerstand:

$$P = 0{,}108\, F v^2, \text{ wonach}$$

$$\zeta = 0{,}108 \cdot \frac{2g}{\gamma} = 0{,}108 \cdot \frac{19{,}62}{1{,}25} = 1{,}70 \text{ ist.}$$

Dieser Widerstand bleibt, diesen Versuchen zufolge, fast unverändert, so lange der Winkel α, um welchen die Fläche von der Bewegungsrichtung abweicht, nicht unter 45 Grad herabgeht. Von 45 Grad an nimmt er mit dem Stoßwinkel α ab, so daß bei $\alpha = 10$ Grad, ζ nur $= 0{,}53$ ausfällt.

Nach den Versuchen von Didion u. s. w. ist für den Widerstand rotirender ebener Flächen von 0,2 . 0,2 = 0,04 Quadratmeter Inhalt:

$$\zeta = (0{,}1002 + 0{,}0434\, v^{-2}) \cdot \frac{2g}{\gamma} = 1{,}573 + 0{,}681\, v^{-2},$$

wo v in Metern zu geben ist.

An einer ebenen Fläche von 1 Quadratmeter Inhalt fand dagegen Didion u. s. w. bei einer senkrechten Bewegung derselben, den Widerstandscoefficienten:

$$\zeta = (0{,}084 + 0{,}036\, v^{-2}) \cdot \frac{2g}{\gamma} = 1{,}318 + 0{,}565\, v^{-2},$$

wogegen Thibault an solchen Flächen von 0,1 und 0,2 Quadratmeter Inhalt den Coefficienten

$$\zeta = (0{,}1188 + 0{,}036\, v^{-2}) \cdot \frac{2g}{\gamma} = 1{,}865 + 0{,}565\, v^{-2} \text{ findet.}$$

Vorstehende Formeln gelten nur für eine gleichförmige Bewegung der Fläche; erfolgt die Bewegung derselben ungleichförmig, so erfordern dieselben noch eine Ergänzung. Aendert sich die Geschwindigkeit eines in einem widerstehenden Mittel bewegten Körpers, so wird auch die von dem Körper in Bewegung gesetzte, oder von demselben mit fortgenommene Flüssigkeitsmasse eine andere, und deshalb läßt sich der Widerstand auch noch von der Acceleration p des Körpers abhängig darstellen. Nach den Versuchen von Didion u. s. w. an einer Fläche von 1 und an einer solchen von $^1/_4$ Quadratmeter Inhalt, welche in einer verticalen Linie bewegt wurde, ist der Widerstand:

$$P = (0{,}084\, v^2 + 0{,}036 + 0{,}164\, p) F, \text{ und hiernach:}$$

$$\zeta = [0{,}084 + (0{,}036 + 0{,}164\, p)\, v^{-2}] \cdot \frac{2g}{\gamma}$$
$$= 1{,}318 + (0{,}565 + 2{,}574\, p)\, v^{-2}.$$

Uebrigens ist zu beachten, daß bei der ungleichförmigen Bewegung das mittlere Quadrat der Geschwindigkeit von dem Quadrate der mittleren Geschwindigkeit verschieden ist.

Stoß und Widerstand unbegrenzter Mittel werden auch erhöht, wenn man die Flächen aushöhlt oder am Umfange mit vorstehenden Rändern versieht; doch ist man hierüber zu allgemeinen Ergebnissen noch nicht gelangt.

An einem Fallschirm von 1,2 Quadratmeter Querschnitt, 1,27 Meter mittlerem Durchmesser und 0,430 Meter Tiefe fand Didion u. s. w. bei einer accelerirten Bewegung, wobei die hohle Seite vorausging:

$$P = (0{,}163\, v^2 + 0{,}070 + 0{,}142\, p)\, F,$$

wonach also

$$\zeta = 2{,}559 + (1{,}099 + 2{,}229\, p)\, v^{-2} \text{ ist.}$$

Stoss und Widerstand gegen Körper. Der Stoß und Widerstand des Wassers gegen prismatische Körper, deren Axe mit der Bewegungsrichtung zusammenfällt, nimmt ab, wenn die Länge der Körper eine größere wird. Nach den Versuchen von du Buat und Duchemin ist der Stoß von der Vorderfläche unveränderlich, und nur die Wirkung gegen die Hinterfläche veränderlich. Jenem entspricht der Coefficient $\zeta_1 = 1{,}186$, für die Gesammtwirkung aber ist bei den relativen Längen

$$\frac{l}{\sqrt{F}} = 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3:$$

$$\zeta = 1{,}86;\ 1{,}47;\ 1{,}35;\ 1{,}33.$$

Bei noch größerem Verhältnisse zwischen der Länge l und der mittleren Breite $\sqrt{F}$ des Körpers nimmt ζ in Folge der Reibung des Wassers an den Seitenflächen des Körpers wieder zu. Bei dem Widerstande des Wassers treten umgekehrte Verhältnisse ein. Hier ist nach du Buat für die Wirkung gegen die Vorderfläche unveränderlich $\zeta_1 = 1$, für die Gesammtwirkung aber bei $\frac{l}{\sqrt{F}} = 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3:$

$$\zeta = 1{,}25;\ 1{,}28;\ 1{,}31;\ 1{,}33,$$

so daß also bei einem Prisma, welches dreimal so lang als dick ist, der Stoß mit dem Widerstande des Wassers gleich groß ausfällt.

Die von Newton, Borda, Hutton, Vince, Désaguilliers u. A. angestellten Versuche über den Widerstand von eckigen und runden Körpern lassen noch viel Unsicherheit zurück. Was die Kugeln betrifft, so scheint bei mäßigen Geschwindigkeiten der Widerstandscoefficient für die Bewegung in Luft oder Wasser 0,5 bis 0,6 gesetzt werden zu können. Bei großer Geschwindigkeit und für die Bewegung in der Luft ist aber nach Robins und Hutton zu setzen für die Geschwindigkeiten

$v = 1, \quad 5, \quad 25, \quad 100, \quad 200, \quad 300, \quad 400, \quad 500, \quad 600$ Meter:
$\zeta = 0{,}59;\ 0{,}63;\ 0{,}67;\ 0{,}71;\ 0{,}77;\ 0{,}88;\ 0{,}99;\ 1{,}04;\ 1{,}01.$

Duchemin und Piobert haben besondere Formeln für das Wachsen dieser Widerstandscoefficienten angegeben. Nach Piobert ist der Widerstand der Geschützkugeln in der Luft:

$$P = 0{,}029\,(1 + 0{,}0023\,v)\,F v^2 \text{ Kilogramm, wonach}$$

$$\zeta = 0{,}451\,(1 + 0{,}0023\,v) \text{ folgt.}$$

Für den Stoß des Wassers gegen eine Kugel findet Eytelwein:

$$\zeta = 0{,}7886,$$

wogegen nach den Versuchen Piobert's u. s. w., angestellt mit Geschützkugeln von 0,10 bis 0,22 Meter Durchmesser, der Widerstand der Kugeln im Wasser:

$$P = 23{,}8\ F v^2 \text{ Kilogramm; und daher}$$

$$\zeta = 0{,}467 \text{ zu setzen ist.}$$

Die Widerstandscoefficienten fallen auch bei nur zum Theil eingetauchten Körpern anders aus, als bei ganz vom Wasser umgebenen Körpern. Für einen schwimmenden prismatischen Körper, welcher 5 bis 6 mal so lang als breit ist, und in der Axenrichtung bewegt wird, soll $\zeta = 1{,}10$ gesetzt werden. Ist der Körper durch zwei Verticalebenen vorn zugeschärft, wie ABC, Fig. 869, so nimmt ζ mit dem Zuschärfungswinkel $ACA = \beta$ ab, und es ist

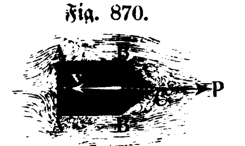
für $\beta =$	180°	156°	132°	108°	84°	60°	36°	12°
$\zeta =$	1,10	1,06	0,93	0,84	0,59	0,48	0,45	0,44

Ist das Hintertheil des Körpers ACB, Fig. 870, zugeschärft, und β der Zuschärfungswinkel, so hat man dagegen

Fig. 869.



Fig. 870.



für $\beta =$	180°	138°	96°	48°	24°
$\zeta =$	1,10	1,03	0,98	0,95	0,92

Bei zugespitzten Vorder- und Hintertheilen des schwimmenden Körpers fällt natürlich ζ noch kleiner aus; für Flußdampfschiffe ist $\zeta = 0{,}12$ bis $0{,}20$, und für große Seedampfschiffe $\zeta = 0{,}05$ bis $0{,}10$.

Anmerkung. Sehr ausführlich über diese Verhältnisse handeln Poncelet in seiner oben citirten Introduction, und Duchemin sowie Thibault in ihren Recherches expérimentales etc. Ueber den Widerstand gegen schwimmende Körper, namentlich gegen Schiffe, sowie auch vom Stoße des Windes gegen Räder, wird im zweiten und dritten Theile gehandelt.

Beispiel. Wenn man nach Borda den Widerstand und Stoß rechtwinkelig gegen die Axe eines Cylinders $\frac{1}{2}$mal so groß setzt, als den gegen ein Parallelepiped, welches mit ihm gleiche Dimensionen hat, so erhält man für den Widerstand den Coefficienten:

$$\zeta = \frac{1}{2} \,.\, 1{,}28 = 0{,}64,$$

und für den Stoß, denselben

$$= \frac{1}{2} \,.\, 1{,}47 = 0{,}735.$$

Wendet man nun diese Werthe auf den menschlichen Körper an, dessen Querschnitt etwa 7 Quadratfuß Inhalt hat, so findet man für den Widerstand und Stoß der Luft gegen denselben die Werthe:

$$P = 0{,}64 \,.\, 0{,}016 \,.\, 7 \,.\, 0{,}086\, v^2 = 0{,}00616\, v^2$$

und

$$P = 0{,}735 \,.\, 0{,}016 \,.\, 7 \,.\, 0{,}086\, v^2 = 0{,}00708\, v^2.$$

Bei einer Geschwindigkeit von 5 Fuß ist daher der Widerstand der Luft nur 0,00616 . 25 = 0,154 Pfund; und die entsprechende Leistung pr. Secunde = 5 . 0,154 = 0,77 Fußpfund; bei einer Geschwindigkeit von 10 Fuß fällt dieser Widerstand schon 4mal und der Arbeitsaufwand 8mal so groß aus, und bei einer Geschwindigkeit von 15 Fuß ist der Widerstand das 9= und die Arbeit sogar das 27fache. Bewegt sich ein Mensch mit 5 Fuß Geschwindigkeit dem Winde von 50 Fuß Geschwindigkeit entgegen, so hat er einen der relativen Geschwindigkeit 50 + 5 = 55 Fuß entsprechenden Widerstand 0,00708 . 55² = 21,42 Pfund zu überwinden, und dabei die übermäßige Arbeit von 21,42 . 5 = 107,1 Fußpfund zu verrichten.

§. 513 **Bewegung in widerstehenden Mitteln.** Die Gesetze der Bewegung eines Körpers in widerstehenden Mitteln sind nicht sehr einfach, weil man es hier mit einer veränderlichen, d. h. mit dem Quadrate der Geschwindigkeit wachsenden Kraft zu thun hat. Aus der Kraft P, die einen Körper forttreibt, und aus dem Widerstande $P_1 = \zeta \cdot \frac{v^2}{2g} F\gamma$, welchen das Mittel der Bewegung entgegensetzt, folgt die bewegende Kraft:

$$P_0 = P - P_1 = P - \zeta \cdot \frac{v^2}{2g} F\gamma,$$

da aber die Masse des Körpers, $M = \frac{G}{g}$ ist, so ergiebt sich die Beschleunigung des Körpers:

$$p = \frac{P_0}{M} = \left(P - \zeta \frac{v^2}{2g} F\gamma\right) : M = \left(\frac{P - \zeta \frac{v^2}{2g} F\gamma}{G}\right) \cdot g,$$

oder, wenn wir $\frac{\zeta F\gamma}{2gP}$ durch $\frac{1}{w^2}$ bezeichnen, also $\sqrt{\frac{2gP}{\zeta F\gamma}} = w$ setzen:

$$p = \left[1 - \left(\frac{v}{w}\right)^2\right] \frac{P}{G} g.$$

Die größte Geschwindigkeit, welche der Körper annehmen kann, ist

$$v = w = \sqrt{\frac{2gP_1}{\zeta F\gamma}}.$$

Ist die bewegende Kraft P_1 constant, so nähert sich die Bewegung nach und nach der Gleichförmigkeit, denn die Acceleration p fällt immer kleiner und kleiner aus, je größer v wird.

Nun nimmt aber bei der Acceleration p die Geschwindigkeit v in dem kleinen Zeittheilchen τ um $\varkappa = p\tau$ zu, daher läßt sich setzen:

$$\varkappa = \left[1 - \left(\frac{v}{w}\right)^2\right] \frac{P}{G} g\tau, \text{ und umgekehrt:}$$

$$\tau = \frac{G}{P} \cdot \frac{\varkappa}{g\left[1 - \left(\frac{v}{w}\right)^2\right]}.$$

Um nun die einer gegebenen Geschwindigkeitsveränderung entsprechende Zeit zu finden, theilen wir die Differenz $v_n - v_0$ zwischen der End- und Anfangsgeschwindigkeit in n Theile, setzen einen solchen Theil:

$$\frac{v_n - v_0}{n} = \varkappa,$$

berechnen hiernach die Geschwindigkeiten:

$$v_1 = v_0 + \varkappa,\ v_2 = v_0 + 2\varkappa,\ v_3 = v_0 + 3\varkappa \text{ u. s. w.},$$

und führen diese Werthe in die Simpson'sche Formel ein. Auf diese Weise erhalten wir die gesuchte Zeit, bei Annahme von vier Theilen:

$$1)\ t = \frac{G}{P}\cdot\frac{v_n - v_0}{12g}\left(\frac{1}{1-\left(\frac{v_0}{w}\right)^2} + \frac{4}{1-\left(\frac{v_1}{w}\right)^2} + \frac{2}{1-\left(\frac{v_2}{w}\right)^2} + \frac{4}{1-\left(\frac{v_3}{w}\right)^2} + \frac{1}{1-\left(\frac{v_4}{w}\right)^2}\right).$$

Es ist ferner der in einem Zeittheilchen τ zurückgelegte Raumtheil (§. 19):

$$\sigma = v\tau, \text{ oder da sich } \tau = \frac{\varkappa}{p} \text{ setzen läßt:}$$

$$\sigma = \frac{v\varkappa}{p}, \text{ also hier:}$$

$$\sigma = \frac{v\varkappa}{1-\left(\frac{v}{w}\right)^2}\cdot\frac{G}{Pg}.$$

Durch Anwendung der Simpson'schen Regel findet man nun den Raum, welcher zurückgelegt wird, während die Geschwindigkeit v_0 in v_n übergeht.

$$2)\ s = \frac{G}{P}\cdot\frac{v_n - v_0}{12g}\left(\frac{v_0}{1-\left(\frac{v_0}{w}\right)^2} + \frac{4v_1}{1-\left(\frac{v_1}{w}\right)^2} + \frac{2v_2}{1-\left(\frac{v_2}{w}\right)^2} + \frac{4v_3}{1-\left(\frac{v_3}{w}\right)^2} + \frac{v_4}{1-\left(\frac{v_4}{w}\right)^2}\right).$$

Natürlich wird die Genauigkeit größer, wenn man 6, 8 oder noch mehr Theile annimmt. Uebrigens gestattet diese Formel auch eine Berücksichtigung der Veränderlichkeit des Widerstandscoefficienten, welches bei bedeutenden Geschwindigkeiten nothwendig ist. Beim freien Fall der Körper in der Luft oder im Wasser ist $P = G$ das scheinbare Gewicht des Körpers, und bei der Bewegung auf der Horizontalebene $P = 0$, oder richtiger, gleich der Reibung fG. Da diese ein Widerstand ist, so hat man sie negativ in Rechnung zu bringen, weshalb hier

$$P_0 = -(P + P_1) \text{ und}$$
$$p = -\left[1 + \left(\frac{v}{w}\right)^2\right] \frac{P}{G}\, g$$

zu setzen ist. Da ferner hier nicht von einer Zu-, sondern nur von einer Abnahme der Geschwindigkeit die Rede sein kann, so haben wir hier statt $v_n - v_0$, $v_0 - v_n$ in den obigen Formeln zu setzen.

In dem Falle, wenn der Körper durch eine Kraft, z. B. durch sein Gewicht getrieben wird, nähert sich die Bewegung immer mehr und mehr einer gleichförmigen, so daß sie schon nach einer gewissen Zeit als eine solche angesehen werden kann, wiewohl sie es in Wahrheit nie wird. Es fällt die Acceleration $p =$ Null aus, wenn $\zeta \cdot \frac{v^2}{2g} F\gamma = P_0$, wenn also

$$v = \sqrt{\frac{2gP_0}{\zeta F\gamma}} = w \text{ ist.}$$

Diesem Ziele nähert sich also die Geschwindigkeit eines fallenden Körpers immer mehr und mehr, ohne es je vollkommen zu erreichen.

Beispiel. Piobert, Morin und Didion fanden für einen Fallschirm, dessen Tiefe 0,31 des Oeffnungsdurchmessers betrug, den Widerstandscoefficienten $\zeta = 1{,}94 \,.\, 1{,}37 = 2{,}66$. Von welcher Höhe wird sich hiernach ein 150 Pfd. schwerer Mensch mit einem ähnlichen Fallschirme von 10 Pfund Gewicht und 60 Quadratfuß Querschnitt herablassen können, ohne eine größere Geschwindigkeit anzunehmen, als diejenige, welche er erlangt, wenn er ohne Fallschirm 10 Fuß hoch herabspringt? Die letzte Geschwindigkeit ist $v = 7{,}906 \sqrt{10} = 25$ Fuß, ferner die Kraft $P = G = 150 + 10 = 160$ Pfd., die Fläche $F = 60$ Quadratfuß, die Dichtigkeit $\gamma = 0{,}0859$ und der Widerstandscoefficient $\zeta = 2{,}66$, daher:

$$\frac{1}{w^2} = \frac{60 \,.\, 0{,}0859}{62{,}5 \,.\, 160} = 0{,}000515 \text{ und}$$

$$\zeta \cdot \frac{v^2}{w^2} = 2{,}66 \,.\, 0{,}000515 \,.\, 25^2 = 0{,}85625.$$

Nehmen wir nun 6 Theile an, so erhalten wir für diese:

$$1 - \zeta \frac{v^2}{w^2} = 0{,}97621;\ 0{,}90486;\ 0{,}78593;\ 0{,}61944;\ 0{,}40537;\ 0{,}14375,$$

und für

$$\frac{v}{1 - \zeta \frac{v^2}{w^2}} = 0;\ 4{,}268;\ 9{,}210;\ 15{,}905;\ 26{,}910;\ 51{,}393 \text{ und } 173{,}913,$$

daher nach der Simpson'schen Regel den mittleren Werth hiervon

$$= (1 \,.\, 0 + 4 \,.\, 4{,}268 + 2 \,.\, 9{,}210 + 4 \,.\, 15{,}905 + 2 \,.\, 26{,}910 + 4 \,.\, 51{,}393 + 1 \,.\, 173{,}913) : (3 \,.\, 6)$$
$$= \frac{532{,}42}{18} = 29{,}58; \text{ und hieraus den gesuchten Fallraum:}$$

$$s = \frac{v_n - v_0}{g} \text{ mal Mittel von } \frac{v}{1 - \zeta \cdot \frac{v^2}{w^2}} = \frac{25 - 0}{31{,}25} \cdot 29{,}58 = 23{,}6 \text{ Fuß.}$$

Die entsprechende Fallzeit ist, da der mittlere Werth von $\frac{1}{1 - \zeta \frac{v^2}{w^2}}$

$= (1.0 + 4.1{,}024 + 2.1{,}105 + 4.1{,}272 + 2.1{,}614 + 4.2{,}467 + 1.6{,}957):18$ $= 1{,}747$ beträgt:

$$t = \frac{25}{31{,}25} \cdot 1{,}747 = 1{,}4 \text{ Secunden.}$$

Anmerkung. Für einen constanten Widerstandscoefficienten ergiebt sich für den freien Fall durch den höheren Calcül:

$$v = \left(\frac{e^{\mu t} - 1}{e^{\mu t} + 1}\right) w = \left(\frac{e^{\mu t} - 1}{e^{\mu t} + 1}\right) \sqrt{2g \cdot \frac{G}{\zeta F \gamma}}$$

und

$$s = Ln. \left(\frac{(e^{\mu t} + 1)^2}{4\, e^{\mu t}}\right) \frac{w^2}{2g} = Ln. \left(\frac{(e^{\mu t} + 1)^2}{4\, e^{\mu t}}\right) \frac{G}{\zeta F \gamma}$$

$$= Ln. \left(\frac{w^2}{w^2 - v^2}\right) \cdot \frac{w^2}{2g},$$

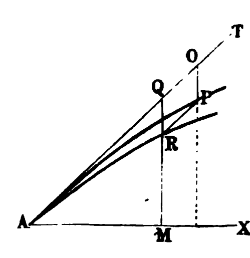
wobei

$$\mu = \sqrt{2g \cdot \zeta \frac{F\gamma}{G}},$$

e die Grundzahl des natürlichen Logarithmensystemes und $Ln.$ den natürlichen Logarithmen bezeichnen.

§. 514 **Geworfene Körper.** Wir haben schon früher die Wurfbewegung im luftleeren Raume kennen gelernt und §. 39 gefunden, daß derselben eine Parabel entspricht. Jetzt können wir uns auch über diese Bewegung in einem widerstehenden Mittel, z. B. über die eines abgeschossenen Körpers in der Luft nähere Kenntniß verschaffen.

Fig. 871.



Jedenfalls ist die Bahn eines die Luft durchschneidenden Körpers keine Parabel wie im luftleeren Raume, sondern eine unsymmetrische Curve, mit einem schwächer auf- und stärker niedersteigenden Schenkel, wie aus Folgendem hervorgeht. Während der kleinen Zeit τ durchläuft der mit der Geschwindigkeit v in der Richtung AT, Fig. 871, aufsteigende Körper in Folge seiner Trägheit einen Weg

$$AO = s = v\tau,$$

sowie in Folge seiner Schwere den senkrechten Weg:

$$OP = h = \frac{g\tau^2}{2};$$

und es wird der erstere Weg durch den Widerstand $\zeta \frac{c^2}{2g} F\gamma$ der Luft noch um eine Größe vermindert, welche sich durch den Ausdruck

$$OQ = \frac{\zeta \frac{v^2}{2g} F\gamma}{G} \cdot \frac{g\tau^2}{2} = \zeta \frac{F\gamma}{2G} \cdot \frac{v^2\tau^2}{2} \text{ bestimmen läßt.}$$

Setzt man $\zeta \frac{F\gamma}{2G} = \mu$, so hat man einfach:

$$O Q = \mu \frac{v^2 \tau^2}{2}.$$

Der vierte Eckpunkt R des aus OP und OQ construirten Parallelogrammes $OPRQ$ giebt den Ort an, wo sich der Körper am Ende der Zeit τ befindet, während P der Ort ist, welchen der Körper in diesem Augenblicke einnähme, wenn der Widerstand der Luft Null wäre. Es zieht sich folglich die Bahn AR des geworfenen Körpers unter der Parabel AP hin, welche der Körper im luftleeren Raume durchlaufen würde.

Ebenso sind für einen in der Richtung AT, Fig. 872, mit der Anfangsgeschwindigkeit v niedersteigenden Körper die in der Zeit τ gleichzeitig zurückgelegten Wege

$$A O = v \tau,$$

$$O P = g \frac{\tau^2}{2} \text{ und}$$

$$O Q = \mu \frac{v^2 \tau^2}{2},$$

und es ergiebt sich aus denselben wieder der Ort R, welchen der Körper am Ende dieser Zeit einnimmt, sowie der Ort P, welchen er einnehmen würde, wenn die Bewegung im luftleeren Raume erfolgte. Es läuft also auch in diesem Falle die Bahn AR des Körpers unter der parabolischen Bahn AP hin, welche der Körper verfolgen würde, wenn die Luft kein widerstehendes Mittel wäre.

Ist der Neigungswinkel, unter welchem der Körper von A aus mit der

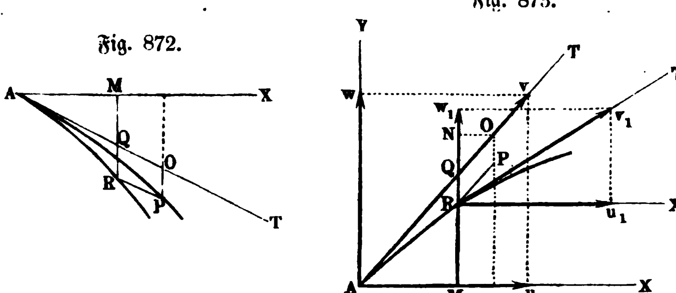


Fig. 872. Fig. 873.

Anfangsgeschwindigkeit v emporsteigt, $TAX = \alpha$, Fig. 873, sind folglich die anfänglichen Coordinaten- oder Axengeschwindigkeiten:

$$u = v \cos. \alpha$$

und

$$w = v \sin. \alpha,$$

so hat man nach Verlauf der kleinen Zeit τ für den Ort R des bewegten Körpers die Abscisse:

$$AM = x = AQ\cos.\alpha = \left(v\tau - \frac{\mu v^2\tau^2}{2}\right)\cos.\alpha$$

$$= \left(1 - \frac{\mu v \tau}{2}\right) v\tau\cos.\alpha,$$

und die Ordinate:

$$MR = y = AQ\sin.\alpha - QR = \left(1 - \frac{\mu v \tau}{2}\right) v\tau\sin.\alpha - \frac{g\tau^2}{2};$$

ferner die Abscissengeschwindigkeit:

$$\overline{Ru_1} = u_1 = v\cos.\alpha - \mu v^2\tau\cos.\alpha = (1 - \mu v\tau)\, v\cos.\alpha,$$

und die Ordinatengeschwindigkeit:

$$\overline{Rw_1} = w_1 = v\sin.\alpha - \mu v^2\tau\sin.\alpha - g\tau = (1 - \mu v\tau)\, v\sin.\alpha - g\tau.$$

Aus beiden Geschwindigkeiten folgt nun für den Neigungswinkel $T_1RX_1 = \alpha_1$ der Bahn in R:

$$tang.\alpha_1 = \frac{w_1}{v_1} = tang.\alpha - \frac{g\tau}{(1 - \mu v\tau)\, v\cos.\alpha},$$

und die Curvengeschwindigkeit:

$$\overline{Rv_1} = v_1 = \sqrt{u_1^2 + w_1^2} = \sqrt{(1 - \mu v\tau)^2 v^2 - 2(1 - \mu v\tau) v g\tau\sin.\alpha + g^2\tau^2}.$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Formeln läßt sich der ganze Lauf der Wurflinie finden. Setzt man z. B. in die obigen Formeln für x und y statt α und v die durch die letzten Ausdrücke bestimmten Werthe für α_1 und v_1 ein, so erhält man durch dieselben die Coordinaten x_1 und y_1 eines neuen Punktes in Beziehung auf R u. s. w.

Beispiel. Eine massive gußeiserne Kugel von $2r = 4$ Zoll Durchmesser werde unter dem Elevationswinkel $\alpha = 25$ Grad mit der Geschwindigkeit $v = 1000$ Fuß abgeschossen, man soll den Ort derselben nach Verlauf von $^1/_{10}$, $^2/_{10}$, $^3/_{10}$ Secunde u. s. w. angeben.

Da die Dichtigkeit der Luft $\gamma = 0{,}0859$, und die des Gußeisens $\gamma_1 = 470$ Pfund ist, so hat man:

$$\mu = \frac{F\gamma}{2G}\cdot\zeta = \frac{\pi r^2 . \gamma}{^8/_3 \pi r^3 \gamma_1}\zeta = {}^3/_8 \frac{\gamma}{r\gamma_1}\zeta = {}^3/_8 . 6 \cdot \frac{0{,}0859}{470}\zeta = 0{,}00041122\,\zeta,$$

und daher für $v = 1000$ Fuß, wo $\zeta = 0{,}9$ ist (s. §. 512):

$$\mu = 0{,}0003701.$$

Nimmt man nun $\tau = 0{,}1$ Secunden an, so erhält man:

$$x = (1 - 0{,}0003701 . 1000 . 0{,}05)\ 100\cos.25^0 = 0{,}9815 . 90{,}63 = 88{,}95 \text{ Fuß},$$

$$y = 0{,}9815 . 100\sin.25^0 - 31{,}25 \cdot \frac{0{,}01}{2} = 0{,}9815 . 42{,}26 - 0{,}156 = 41{,}32 \text{ Fuß},$$

$$tang.\alpha_1 = tang.25^0 - \frac{31{,}25 . 0{,}1}{(1 - 0{,}03701) . 90{,}63} = 0{,}46631 - \frac{3{,}125}{0{,}9630 . 90{,}63}$$

$$= 0{,}46631 - 0{,}00358 = 0{,}46273,$$

hiernach ist der Steigwinkel selbst:

$$\alpha_1 = 24^0 50',$$

und die Curvengeschwindigkeit:

$$v_1 = \sqrt{(0{,}9630\,.\,1000)^2 - 2\,.\,0{,}9630\,.\,1000\,.\,31{,}25\,.\,0{,}04226 + (3{,}125)^2}$$
$$= \sqrt{927369 - 2543 + 10} = \sqrt{924836} = 961{,}68 \text{ Fuß}.$$

Nimmt man von Neuem $\tau = 0{,}1$ Secunde an, so erhält man, da für $v = 962$ Fuß, $\zeta = 0{,}88$ und folglich $\mu = 0{,}88\,.\,0{,}00041122 = 0{,}0003619$ zu setzen ist:

$$x_1 = (1 - 0{,}0003619\,.\,961{,}7\,.\,0{,}05)\,.\,96{,}17\,.\,cos.\,24^0\,50'$$
$$= 0{,}9825\,.\,96{,}17\,.\,0{,}9075 = 85{,}75 \text{ Fuß},$$
$$y_1 = 0{,}9825\,.\,96{,}17\,.\,sin.\,24^0\,50' - 0{,}156 = 39{,}53,$$

ferner:

$$tang.\,\alpha_2 = tang.\,24^0\,50' - \frac{3{,}125}{0{,}9652\,.\,96{,}17\,.\,cos.\,24^0\,50'}$$
$$= 0{,}46277 - 0{,}00371 = 0{,}45906,$$

hiernach:

$$\alpha_2 = 24^0\,39' \text{ und}$$
$$v_2 = \sqrt{(0{,}9652\,.\,961{,}7)^2 - 2\,.\,0{,}9652\,.\,961{,}7\,.\,31{,}25\,.\,0{,}04200 + (3{,}125)^2}$$
$$= \sqrt{861590 - 2347 + 10} = \sqrt{859163} = 926{,}92 \text{ Fuß}.$$

Nochmals $\tau = 0{,}1$ Secunde angenommen und $v = 927$ Fuß entsprechend, $\zeta = 0{,}87$ gesetzt, folgt:

$$\mu = 0{,}87\,.\,0{,}00041122 = 0{,}0003578,$$

und daher:

$$x_2 = (1 - 0{,}0003578\,.\,926{,}9\,.\,0{,}05)\,.\,92{,}69\,.\,cos.\,24^0\,39' = 0{,}9834\,.\,92{,}69\,.\,0{,}9089$$
$$= 82{,}85 \text{ Fuß, sowie}$$
$$y_2 = 0{,}9834\,.\,92{,}69\,sin.\,24^0\,39' - 0{,}156 = 37{,}86 \text{ Fuß}.$$

Es ist hiernach der Ort des abgeschossenen Körpers nach 0,3 Secunden in Hinsicht auf den Anfangspunkt durch die Coordinaten

$x + x_1 + x_2 = 88{,}95 + 85{,}75 + 82{,}85 = 257{,}55$ Fuß und
$y + y_1 + y_2 = 41{,}32 + 39{,}53 + 37{,}86 = 118{,}71$ Fuß bestimmt.

Ohne Luftwiderstand und ohne Schwere wäre

$x + x_1 + x_2 = c\,t\,cos.\,\alpha = 1000\,.\,0{,}3\,.\,cos.\,25^0 = 300\,.\,0{,}9063 = 271{,}89$ Fuß,
sowie:
$y + y_1 + y_2 = c\,t\,sin.\,\alpha = 300\,.\,sin.\,25^0 = 300\,.\,0{,}4226 = 126{,}78$ Fuß,
und bloß ohne Rücksicht auf den Widerstand der Luft:
$x + x_1 + x_2 = 271{,}89$ Fuß, sowie

$$y + y_1 + y_2 = 126{,}78 - \frac{g\,t^2}{2} = 126{,}78 - 31{,}25\cdot\frac{0{,}09}{2} = 126{,}78 - 1{,}41$$
$$= 125{,}37 \text{ Fuß}.$$

Anhang.

Die Theorie der Schwingungen.

(§. 1) **Schwingungstheorie.** Ein Körper hat eine schwingende Bewegung (franz. mouvement oscillatoire; engl. oscillatory motion) oder ist in Schwingung (franz. und engl. oscillation), wenn er wiederholt in gleichen Zeiten denselben Weg hin- und zurückläuft. Die Natur bietet uns außer der Bewegung eines Pendels noch viele andere Schwingungsbewegungen dar. Die vorzüglichste Ursache einer solchen Bewegung ist eine Kraft, welche den schwingenden Körper nach einem und demselben Punkte hinzieht oder hintreibt. So ist es z. B. die Schwerkraft, welche ein Pendel in schwingende Bewegung setzt. Wenn ein vorher in Ruhe befindlicher Körper ungestört der Kraft folgen kann, welche denselben nach einem gewissen Punkte hintreibt, so erfolgt die Schwingung desselben in einer geraden Linie; außerdem aber nimmt er Schwingungen in einer Curve an, wie z. B. ein Pendel, wo die Wirkung der Schwerkraft durch die Verbindung des Körpers mit einem festen Punkte fortwährend gestört wird. Ebenso erfolgen oft Schwingungen in krummen Linien, wenn die Anfangsgeschwindigkeit des bewegten Körpers eine andere Richtung hat als die Kraft.

Der einfachste und am häufigsten vorkommende Fall ist der, wenn die Kraft der Entfernung von einem gewissen Punkte C proportional ist.

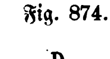
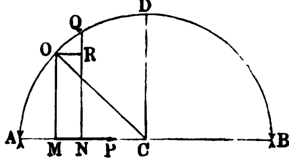


Fig. 874.



Es sei A, Fig. 874, der Anfangspunkt der Bewegung, C der Sitz der Kraft, d. i. der Ort des Körpers, wo die Kraft Null ist, und M der veränderliche Ort des Körpers. Bezeichnen wir nun den Abstand CM durch x und bedeutet μ eine constante Erfahrungszahl, so können wir die Acceleration des Körpers in M,

$$p = \mu x$$

setzen, und erhalten sonach für die Geschwindigkeit v des Körpers (s. §. 20, III.), da x um $MN = \partial x$ abnimmt, wenn der Weg AM um ebensoviel wächst,

$$\frac{1}{2} v^2 = -\int p \partial x = -\mu \int x \partial x = -\frac{\mu x^2}{2} + Con.$$

Nun ist aber in A, $v = 0$ und x eine bestimmte Größe $CA = a$, daher hat man:

$$0 = -\frac{\mu a^2}{2} + Con., \text{ und}$$

$$v^2 = \mu (a^2 - x^2),$$

also die Geschwindigkeit selbst,

$$v = \sqrt{\mu (a^2 - x^2)}.$$

Kommt der Körper in C an, ist also $x = 0$, so wird v ein Maximum, und zwar:

$$v = c = \sqrt{\mu a^2} = a\sqrt{\mu}.$$

Jenseits von C nimmt v wieder allmälig ab, und ist die Entfernung x von C, $CB = -a$, so fällt wieder $v = 0$ aus, und es kehrt nachher der Körper mit wachsender Geschwindigkeit nach C zurück. Diese rückgängige Bewegung erfolgt genau nach demselben Gesetze, wie die hingehende; es ist in C, $v = -c$ und in A, $v = 0$. Auf diese Weise wiederholt sich die Bewegung ohne Ende in dem Raume $AB = 2a$, die man deshalb die doppelte Schwingungsweite (franz. amplitude des oscillations; engl. amplitude of oscillations) nennt.

(§. 2) Die Zeit, während welcher der schwingende Körper einen gewissen Weg $AM = x_1$, Fig. 875, zurücklegt, läßt sich, wie folgt, bestimmen. Wird in dem Zeitelemente ∂t das Wegelement $MN = \partial x_1 = -\partial x$ zurückgelegt, so hat man nach (§. 20, I.):

$$\partial x_1 = v \partial t, \text{ d. i. } \partial x = -\sqrt{\mu (a^2 - x^2)}\, \partial t;$$

und daher umgekehrt:

$$\partial t = -\frac{\partial x}{\sqrt{\mu (a^2 - x^2)}}.$$

Beschreiben wir über AB mit dem Halbmesser $CA = CB = a$ einen Kreis ADB, so erscheint in demselben $\sqrt{a^2 - x^2}$ als Ordinate $MO = y$, und es ist daher:

$$\partial t = -\frac{\partial x}{\sqrt{\mu} . y}.$$

Setzen wir ferner den der Abscisse $CM = x$ entsprechenden Bogen $DO = s$, und das Element OQ desselben $= -\partial s$, so giebt uns die Aehnlichkeit gewisser Dreiecke OQR und OCM, in welchen $OR = -\partial x$,

$OQ = -\partial s$, $MO = y$ und $OC = a$ ist, die Proportion:

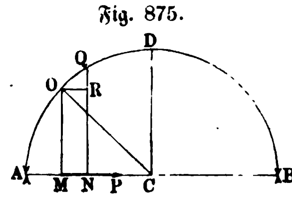


Fig. 875.

$\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{y}{a}$, daher:

$\frac{\partial x}{y} = \frac{\partial s}{a}$, und es folgt sonach:

$\partial t = -\frac{\partial s}{\sqrt{\mu . a}}$, sowie

$$t = -\int \frac{\partial s}{\sqrt{\mu . a}} = -\frac{s}{\sqrt{\mu . a}} + Con.$$

Nun ist aber für den Anfangspunkt A, $t = 0$ und s der Quadrant $DA = \frac{1}{2}\pi a$, daher hat man:

$$0 = -\frac{\frac{1}{2}\pi a}{\sqrt{\mu . a}} + Con.,$$

und die Schwingungsdauer oder die Zeit, innerhalb welcher A nach M kommt:

$$t = \frac{\frac{1}{2}\pi a}{\sqrt{\mu . a}} - \frac{s}{\sqrt{\mu . a}} = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{s}{a}\right).$$

Für die halbe Schwingungsdauer, d. i. für die Zeit, innerhalb welcher der Körper nach dem Ruhe- oder Mittelpunkt C kommt, ist $s = 0$, daher:

$$t = \frac{\pi}{2\sqrt{\mu}},$$

ferner die Zeit einer ganzen Schwingung oder zum Durchlaufen des Weges $AB = 2a$,

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}},$$

endlich die Zeit, innerhalb welcher der Körper nach A zurückkehrt, ist:

$$t = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}.$$

Eben so groß ist auch die Schwingungsdauer, oder die Zeit zum Durchlaufen eines Weges $2AB = 4a$, wenn dieselbe an einem anderen Orte M zu zählen angefangen wird; denn die Zeit für den Weg MB hin und zurück ist

$$= 2 \cdot \frac{\text{Bogen } OB}{\sqrt{\mu . a}},$$

und die für den Weg MA hin und zurück:

$$= 2 \cdot \frac{\text{Bogen } OA}{\sqrt{\mu . a}};$$

folglich die Zeit für den Weg $2MB + 2MA$,

$$= 2 \cdot \frac{\text{Bogen } (OB + OA)}{a\sqrt{\mu}} = \frac{2 \cdot \pi a}{a\sqrt{\mu}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}.$$

Es hängt also die Schwingungsdauer gar nicht von der Amplitude ab. Gehen wir von dem Ruhepunkte C aus, so können wir einfacher die Zeit, welche der Elongation $CM = x$ entspricht, setzen

$$t = \frac{s}{\sqrt{\mu} \cdot a},$$

oder, da $s = a\, arc. \left(sin. = \frac{x}{a}\right)$ ist:

$$t = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\, arc. \left(sin. = \frac{x}{a}\right), \text{ und umgekehrt:}$$

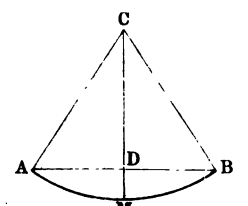
$$x = a\, sin. (t\sqrt{\mu}),$$

sowie:

$$v = \sqrt{\mu}\sqrt{a^2 - a^2 [sin. (t\sqrt{\mu})]^2} = \sqrt{\mu} \cdot a \sqrt{1 - [sin. (t\sqrt{\mu})]^2}$$
$$= \sqrt{\mu} \cdot a\, cos. (t\sqrt{\mu}).$$

Anmerkung. Die vorstehende Schwingungstheorie läßt sich sogar auf das Kreispendel CM, Fig. 876, anwenden, wenn man kleine Schwingungsbögen voraussetzt. Es ist die Beschleunigung des im Bogen AMB schwingenden Punktes an der Stelle A:

Fig. 876.



$$p = g\, sin.\, ACD = \frac{DA}{CA} \cdot g,$$

oder da bei kleinen Elongationen $DA = MA$ gesetzt werden kann:

$$p = \frac{MA}{CA} \cdot g.$$

Bezeichnet man nun CA mit r und MA mit x, so erhält man:

$$p = \frac{gx}{r},$$

und daher durch Vergleichung mit der Formel $p = \mu x$ des vorigen Paragraphen:

$$\mu = \frac{g}{r}.$$

Folglich ist die Schwingungszeit:

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}} = \pi \sqrt{\frac{r}{g}} \text{ (vergl. §. 321).}$$

Längenschwingungen. Die vorzüglichste Ursache schwingender Bewegungen ist die Elasticität der Körper. Den einfachsten Fall bietet ein Faden oder eine Stange (Draht) OC, Fig. 877 (a. f. S.), dar, wenn derselbe durch ein Gewicht G gespannt wird. Führt man dieses Gewicht von dem Ruhepunkte C in der Axenrichtung des Fadens um einen Weg $CA = a$ fort, und überläßt man es nun sich selbst, so wird es in Folge der Elasticität des (§. 3)

Fadens wieder bis C gehoben, kommt daselbst mit einer gewissen Geschwindigkeit c an, und steigt durch seine lebendige Kraft bis zu einem Punkte B, von wo aus es wieder zurückfällt u. s. w. In dem Ruhepunkte wird das Gewicht G von der Elasticität $\frac{\lambda}{l} FE$ (s. §. 204) der Stange aufgehoben, es ist folglich hier die bewegende Kraft:

Fig. 877.

$$P = \frac{\lambda}{l} FE - G = 0, \text{ also } \frac{\lambda}{l} FE = G.$$

Ist aber das Gewicht in einem tieferen Punkte N, welcher um $CN = x$ von C absteht, so fällt die bewegende Kraft

$$P = \frac{\lambda + x}{l} FE - G = \frac{\lambda}{l} FE + \frac{x}{l} FE - G$$
$$= \frac{FE}{l} x$$

aus, und befindet es sich in einem höheren Punkte Q, so ist diese Kraft:

$$P = G - \frac{\lambda - x}{l} FE = G - \frac{\lambda}{l} FE + \frac{x}{l} FE = \frac{FE}{l} x.$$

Vernachlässigen wir die Masse der Stange, so ist folglich die Acceleration, mit welcher sich das Gewicht G nach C zurückbewegt:

$$p = \frac{P}{G} g = \frac{FE}{Gl} g x, \text{ und daher:}$$

$$\mu = \frac{FEg}{Gl},$$

wenn $p = \mu x$ gesetzt wird, F den Querschnitt, l die Länge und E den Elasticitätsmodul der Stange bezeichnen. Da dieses Gesetz mit dem in den vorigen Paragraphen behandelten Fall übereinstimmt, so haben wir auch hier die Schwingungszeit:

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}} = \pi \sqrt{\frac{Gl}{FEg}} = \frac{\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{\frac{Gl}{FE}}.$$

Setzt man statt F das Gewicht $G_1 = Fl\gamma$ der Stange und statt E den Elasticitätsmodul $L = \frac{E}{\gamma}$ nach Länge (s. §. 204, Anmerk. 1) ein, so erhält man auch:

$$t = \frac{\pi l}{\sqrt{g}} \sqrt{\frac{G}{G_1 L}}.$$

Wenn man umgekehrt, die Schwingungszeit t beobachtet, so kann man die Elasticitätsmodeln berechnen, indem man setzt:

$$E = \frac{\pi^2}{g t^2} \cdot \frac{G l}{F} \text{ oder } L = \frac{\pi^2 l^2}{g t^2} \cdot \frac{G}{G_1}.$$

Diese Formeln gelten auch dann, wenn die Schwingung der Stange nur durch bloßes Anhängen des Gewichtes (in B) hervorgebracht wird; es ist hier die Amplitude zu beiden Seiten von C:

$$a = \lambda = \frac{G}{FE} l,$$

wogegen wir oben $a < \lambda$ angenommen haben.

Beispiel. Wenn ein Eisendraht von 20 Fuß Länge und 0,1 Zoll Dicke durch ein Gewicht $G = 100$ Pfund in Längenschwingungen versetzt wird, deren Zeitdauer $^1/_9$ Secunde ist, so hat man $t = {}^1/_{18}''$ und den Elasticitätsmodul desselben:

$$E = 0{,}032 \, . \, \pi^2 \, . \, 18^2 \cdot \frac{100 \, . \, 20 \, . \, 4}{(0{,}1)^2 \, . \, \pi} = 0{,}032 \, . \, 8000 \, . \, 18^2 \, \pi$$
$$= 25600 \, . \, 324 \, \pi = 26'000000 \text{ Pfund.}$$

Die vorstehenden Formeln lassen sich auch anwenden, wenn das Gewicht G zusammendrückend auf eine steife prismatische Stange wirkt. Ebenso finden dieselben noch ihre Anwendung, wenn das an das untere Stangenende angehängte Gewicht gleich anfangs mit einer gegebenen Geschwindigkeit v niedergeht. Nach dem Principe der mechanischen Arbeiten ist in diesem Falle für die Fallhöhe h von G: (§. 4)

$$G h + G \frac{v^2}{2g} = \frac{h}{l} FE \cdot \frac{h}{2} = \frac{FE}{2l} \cdot h^2, \text{ daher:}$$

$$h = \frac{G l}{FE} + \sqrt{\left(\frac{G l}{FE}\right)^2 + \frac{2 G l}{FE} \cdot \frac{v^2}{2g}}.$$

Nach Durchlaufung dieses Weges hat das Gewicht G seine Geschwindigkeit verloren und steigt nun in Folge der Elasticität bis A zurück, wo es wieder mit der Geschwindigkeit v ankommt. Endlich aber erhebt es sich in Folge seiner lebendigen Kraft $G \frac{v^2}{2g}$, indem es die Stange comprimirt, noch um eine Höhe h_1, ehe es wieder zurückkehrt und eine neue Schwingung beginnt. Für diese zweite Höhe ist

$$G \frac{v^2}{2g} = G h_1 + \frac{FE}{2l} h_1^2, \text{ und daher:}$$

$$h_1 = -\frac{G l}{FE} + \sqrt{\left(\frac{G l}{FE}\right)^2 + \frac{2 G l}{FE} \cdot \frac{v^2}{2g}}.$$

Durch Addition von h und h_1 erhält man nun die ganze Schwingungsamplitude:

$$2a = h + h_1 = 2 \sqrt{\left(\frac{G l}{FE}\right)^2 + \frac{2 G l}{FE} \cdot \frac{v^2}{2g}},$$

und daher die einfache Elongation:

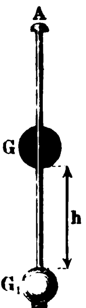
$$a = \sqrt{\left(\frac{G l}{F E}\right)^2 + \frac{2 G l}{F E} \cdot \frac{v^2}{2 g}}.$$

Da auch hier $p = \frac{FE}{Gl} g x = \mu x$ ist, so hat man wie oben, die Zeit einer Schwingung:

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{\frac{G l}{F E}}.$$

Wenn die Anfangsgeschwindigkeit v des Gewichtes G_1 durch ein niederfallendes Gewicht G erzeugt wird, so hat man es mit dem in §. 348 abgehandelten Falle (Fig. 878) zu thun. Lassen wir das Gewicht G mit der Geschwindigkeit c aufschlagen, und setzen wir einen unelastischen Stoß voraus, so haben wir die Anfangsgeschwindigkeit von $G + G_1$:

Fig. 878.



$$v = \frac{G c}{G + G_1},$$

daher die größte Schwingungselongation:

$$a = \sqrt{\left(\frac{(G + G_1) l}{F E}\right)^2 + \frac{2 G^2 l}{(G + G_1) F E} \cdot \frac{c^2}{2 g}},$$

und die Schwingungszeit:

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{\frac{(G + G_1) l}{F E}}.$$

Die Elemente der Stange nehmen an den Schwingungen von G oder $G + G_1$ ebenfalls Antheil, nur ist die Amplitude um so kleiner, je näher das Element dem Aufhängepunkte liegt. Für ein Element C_1, Fig. 877, im Abstande $O C_1 = x$ vom Aufhängepunkte ist die Amplitude:

$$y = \frac{x}{l} a;$$

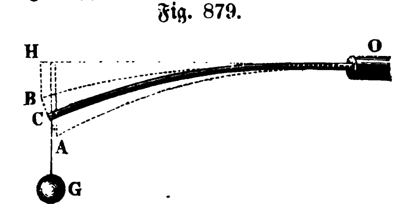
wogegen die Schwingungszeit, da diese gar nicht von y oder a abhängt, dieselbe ist wie für G. Es schwingen also alle Elemente der Stange in von C nach O stetig abnehmenden Amplituden isochron.

§. 5 **Querschwingungen.** Auch die Biegungs- sowie die Torsionselasticität bietet Gelegenheiten zu solchen Schwingungen dar, wie wir im Vorhergehenden kennen gelernt haben. Für eine an einem Ende O festgehaltene und am anderen Ende C durch ein Gewicht G gespannte Stange oder Feder $O C$ (Fig. 879) haben wir nach §. 217 die Einbiegung:

$$H C = a = \frac{P l^3}{3 W E}$$

gefunden; es folgt daher umgekehrt, die Kraft P, mit welcher die Stange gebogen ist,

Fig. 879.



$$P = \frac{3\,W E a}{l^3}.$$

Wird nun diese Kraft durch ein angehängtes Gewicht G ersetzt, und a um $CA = CB = x$ vergrößert oder verkleinert, so hat man die Kraft, mit welcher das Stangenende nach der Ruhelage durch die Elasticität der Stange zurückgetrieben wird:

$$P = \frac{3\,W E (a + x)}{l^3} - G = \frac{3\,W E (a + x)}{l^3} - \frac{3\,W E}{l^3} a = \frac{3\,W E}{l^3} x;$$

daher die Acceleration, wenn wir bloß die Masse von G in Betracht ziehen:

$$p = \frac{P}{G}\,g = \frac{3\,W E}{G\,l^3}\,g\,x,$$ und, da hiernach $p = \mu x$ zu setzen ist:

$$\mu = \frac{3\,W E}{G\,l^3}\,g.$$

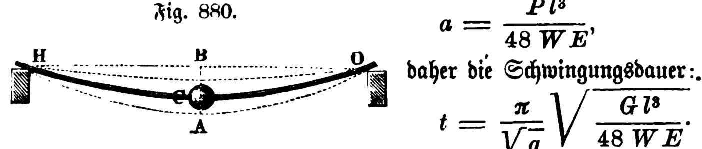
Die Proportionalität zwischen p und x gestattet die Anwendung der Formel in §. 2 (Anhang), weshalb nun die Schwingungszeit

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}} = \frac{\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{\frac{G\,l^3}{3\,W E}}$$

folgt.

Für eine an beiden Enden frei aufliegende und in der Mitte C mit einem Gewichte G belastete Stange $H\,O$, Fig. 880, ist nach §. 217:

Fig. 880.



$$a = \frac{P\,l^3}{48\,W E},$$

daher die Schwingungsdauer:

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{\frac{G\,l^3}{48\,W E}}.$$

Bei Berücksichtigung des Stangengewichtes G_1 hat man im ersten Falle, Fig. 879, statt G, $G + \frac{1}{4} G_1$, und im zweiten Falle, Fig. 880, statt G, $G + \frac{1}{2} G_1$ einzusetzen.

Aus der beobachteten Schwingungszeit t, läßt sich nun der Elasticitätsmodul berechnen, und zwar für den ersten Fall, mittels der Formel

$$E = \left(\frac{\pi}{t}\right)^2 \left(\frac{G + \frac{1}{4} G_1}{3\,g\,W}\right) l^3,$$

oder, wenn $n = \frac{1}{t}$ die Anzahl der Doppelschwingungen pro Secunde bezeichnet,

$$E = (\pi n)^2 \left(\frac{G + \frac{1}{4} G_1}{3 g W}\right) l^3.$$

Beispiel. Ein Fichtenholzstab von 1 Centimeter Breite und Höhe wurde in zwei von einander 100 Centimeter abstehenden Punkten unterstützt, und in der Mitte von dem Gewichte $G = 1,37$ Kilogramm, um $a = 3,2$ Centimeter niedergezogen. Deshalb ist hiernach der Elasticitätsmodul des Fichtenholzes:

$$E = \frac{P l^3}{48 W a} = \frac{1,37 . 1000000}{48 . \frac{1}{12} . 3,2} = 107031 \text{ Kilogramm},$$

während in der Tabelle auf Seite 370, $E = 110000$ Kilogramm angegeben wird.

Ferner wurde dieser Stab an einem Ende eingeklemmt, am anderen Ende mit dem Gewichte $G = 0,31$ belastet und in Schwingungen versetzt, wobei die Anzahl der Schwingungen in 35 Secunden, $= 100$ ausfiel. Das Gewicht des Stabes war $G_1 = 0,044$ Kilogramm, folglich ist $G + \frac{1}{4} G_1 = 0,321$ Kilogramm, und

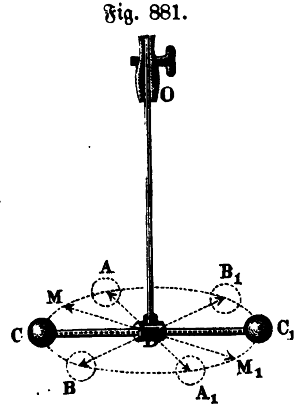
$$E = \left(\frac{\pi}{t}\right)^2 \cdot \left(\frac{G + \frac{1}{4} G_1}{3 g W}\right) l^3 = \left(\frac{3,141}{0,35}\right)^2 \cdot \frac{321000}{981 . \frac{3}{12}}$$

$$= 80,57 \cdot \frac{1281000}{981} = 105260 \text{ Kilogramm},$$

also nahe gleich dem durch die Biegungsversuche gefundenen Werthe von E.

§. 6 **Torsionsschwingungen.** Die Formel $t = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}}$ findet endlich auch bei dem Torsionspendel (franz. balance de torsion; engl. torsion-rod), d. i. bei einem Faden oder einer Stange DO, Fig. 881, statt, welche vermöge ihrer Torsion um ihre eigene Axe schwingt. In der Regel versieht man dieses Pendel mit einem belasteten Querarme CC_1, mittels dessen die anfängliche Drehung des Fadens hervorgebracht wird, indem man diesen Arm aus der Ruhelage CC_1 in die Lage AA_1 bringt. Die Torsion dreht dann den Arm nach CC_1 zurück, und vermöge der Trägheit geht derselbe auch noch weiter bis BB_1, von wo aus er nach CC_1 und AA_1 u. s. w. zurückkehrt. Wir haben oben (§. 262) das Torsionsmoment eines prismatischen Körpers

Fig. 881.



$$P a = \frac{\alpha W C}{l}$$

gefunden; und wissen hiernach, daß dasselbe umgekehrt wie die Länge $OD = l$ des Stabes und direct wie der Torsionswinkel $MDC = \alpha$ wächst; ist nun $G k^2$ das Trägheitsmoment des Armes CDC_1, folglich $\frac{k^2}{a^2} \frac{G}{g}$ die auf die Armenden C und C_1 reducirte träge Masse M desselben, so folgt die Acceleration dieser Punkte:

$$p = \frac{P}{M} = \frac{\alpha W C}{l a} : \frac{r^2 G}{a^2 g} = \frac{\alpha a W C g}{G k^2 l}.$$

Bezeichnen wir noch den Bogen $CM = \alpha a$, welcher der Armlänge $DA = DC = a$ und dem veränderlichen Elongationswinkel $CDM = \alpha$ entspricht, durch x, so erhalten wir den Ausdruck:

$$p = \frac{W C g}{G k^2 l}\, x,$$ und können wieder $p = \mu x$ setzen, also:

$$\mu = \frac{W C g}{G k^2 l}$$ annehmen.

Es ist folglich auch die Schwingungsdauer, der Schwingungsbogen $A\,C\,B = A_1\,C_1\,B_1$ mag groß oder klein sein:

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}} = \frac{\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{\frac{G k^2 l}{W C}}.$$

Umgekehrt folgt

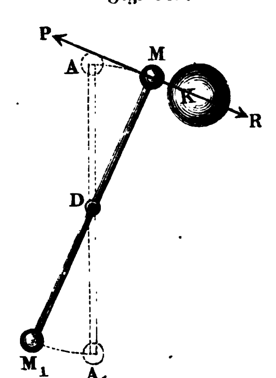
$$W C = \frac{\pi^2}{g t^2}\, G k^2 l,$$

und daher das Torsionsmoment

$$P a = \frac{\pi^2}{g t^2} \cdot \alpha G k^2.$$

Anmerkung. Vorstehende Formeln für die Schwingungen, welche durch die Elasticität fester Körper hervorgebracht werden, gelten natürlich nur so lange, als mit den Schwingungselongationen die Elasticitätsgrenze nicht erreicht wird. Bei allen Maschinentheilen sind die Schwingungen möglichst zu vermeiden, weil das Arbeitsquantum, welches auf dieselben verwendet wird, für die Maschinen verloren geht; deshalb sind diese Theile höchst sorgfältig mit einander zu verbinden, und es ist zumal ein sogenannter tauber Gang zu vermeiden, der zu Stößen und Schwingungen Veranlassung giebt.

Fig. 882.



Dichtigkeit der Erde. Die Theorie des Torsionspendels findet ihre unmittelbare Anwendung bei der Bestimmung der mittleren Dichtigkeit oder des specifischen Gewichtes ε unserer Erde. Nähert man dem einen Gewichte G am Armende ADA_1, Fig. 882, eines Torsionspendels eine schwere Kugel K, so rückt dasselbe in Folge der Anziehung um einen Weg $AM = x$ näher; es setzt sich in diesem neuen Orte M von G die Anziehungskraft R von K mit der Torsionskraft P ins Gleichgewicht, und es läßt sich daher auch die eine durch die andere bestimmen. Lassen wir nun nach Entfernung der Kugel K das Torsionspendel schwingen, so

§. 7

können wir die Schwingungsdauer desselben ermitteln und hieraus die Torsionskraft berechnen. Nach dem vorigen Paragraphen ist die Schwingungsdauer

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}},\ \mu = \frac{p}{x} \text{ und } p = \frac{\text{Torsionskraft}}{\text{Masse des Pendels}} = \frac{Pa^2}{Gk^2}g,$$

wenn Gk^2 das Trägheitsmoment und a die Armlänge des Pendels bezeichnen; daher hat man umgekehrt, die Torsions- oder Anziehungskraft:

$$P = \frac{Gk^2p}{ga^2} = \frac{\mu Gk^2x}{ga^2} = \frac{\pi^2}{gt^2}\cdot\frac{Gk^2x}{a^2} = \frac{\pi^2}{gt^2}\cdot\frac{Gk^2\alpha}{a},$$

und das dem Drehungswinkel α entsprechende Torsionsmoment:

$$Pa = \frac{\pi^2}{gt^2}\cdot\alpha Gk^2.$$

Wenn nun die Anziehungskräfte der Körper wie die Massen derselben und umgekehrt wie die Quadrate der Entfernungen wachsen (s. §. 302, Beispiel 3), so können wir die von K hervorgebrachte Anziehungskraft P mit dem der Anziehungskraft der Erde entsprechenden Gewichte Q des kleinen Körpers an der Torsionswage wie folgt vergleichen:

$$\frac{P}{Q} = \frac{K:s^2}{E:r^2},$$

wobei s die Entfernung MK der Mittelpunkte r beider Massen G und K von einander, r den Halbmesser der Erde und E das Gewicht derselben bezeichnen. Wir erhalten nun das letztere:

$$E = \frac{KQr^2}{Ps^2},$$

und wenn wir statt $E = {}^4/_3\,\pi r^3 . \varepsilon\gamma$ setzen, die mittlere Dichtigkeit der Erde:

$$\gamma_1 = \varepsilon\gamma = \frac{3E}{4\pi r^3} = \frac{3KQr^2}{4\pi Pr^3s^2} = \frac{3KQ}{4\pi Prs^2} = \frac{3KQ}{4\pi rs^2}\cdot\frac{gt^2a^2}{\pi^2Gk^2x},$$

oder, wenn wir statt $\frac{g}{\pi^2}$ die Länge l des Secundenpendels (s. §. 323) einführen:

$$\gamma_1 = \varepsilon\gamma = \frac{3Klt^2}{4\pi rxs^2}\cdot\frac{Qa^2}{Gk^2},$$

und daher das mittlere specifische Gewicht der Erde:

$$\varepsilon = \frac{3Klt^2}{4\pi rxs^2}\cdot\frac{Qa^2}{Gk^2\gamma}.$$

Setzt man annähernd $Gk^2 = Qa^2$, so erhält man einfacher:

$$\varepsilon = {}^3/_4\,\frac{Klt^2}{\pi rxs^2\gamma}.$$

Mittels des einfachen Torsionspendels oder der sogenannten Coulomb'schen Drehwage fand zuerst Cavendish: $\varepsilon = 5,48$;
oder nach Hutton's Revision: $\varepsilon = 5,32$;

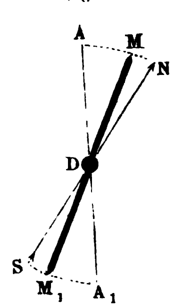
später bei Zuhülfenahme des Gauß-Poggendorff'schen Spiegelapparates, Reich: $\varepsilon = 5{,}43$,
dagegen Baily, durch Versuche in größerem Maßstabe: $\varepsilon = 5{,}675$.

Bei Wiederholung der Versuche wurde von Reich: $\varepsilon = 5{,}583$ gefunden. (S. „Neue Versuche mit der Drehwage, Leipzig 1852.") Es ist hiernach die mittlere Dichtigkeit der Erde ungefähr gleich der Dichtigkeit des Eisenglanzes.

Anmerkung. Ueber die Ausführung der Versuche zur Bestimmung der Dichtigkeit der Erde ist nachzusehen: Gehler's physikal. Wörterbuch, Bd. III.; ferner die Abhandlung von Reich „Versuche über die mittlere Dichtigkeit der Erde, Freiberg 1838," und die von Baily, Experiments with the torsion rod for determining the mean density of the Earth, London 1843.

Magnetnadel. Die Torsionswage wird auch angewandt, um die Directionskraft oder das Drehungsmoment eines Magneten oder einer Magnetnadel (franz. aiguille aimantée; engl. magnetic-needle) zu finden. Ersetzen wir den Querarm einer solchen Wage durch eine Magnetnadel oder einen Magnetstab MDM_1, Fig. 883, so stellt sich derselbe so, daß seine Directionskraft von der Torsionskraft aufgehoben wird. Weicht der unmagnetische Arm in der Ruhelage AA_1 um den Winkel $ADN = \alpha$ vom magnetischen Meridiane NS ab, und stellt sich der Magnetstab MM_1 so, daß seine Axe um den Winkel $MDN = \delta$ von dem Meridiane NS absteht, so haben wir denjenigen Componenten R_1 der parallel NS wirkenden Directionskraft R, welcher die Umdrehung der Nadel bewirkt und von der Torsionskraft aufgehoben wird: $R_1 = R sin. \delta$.

Fig. 883.



Die Torsionskraft P ist hingegen dem Torsionswinkel $MDA = \alpha - \delta$ proportional, läßt sich daher

$$P = P_1 (\alpha - \delta)$$

setzen; man hat daher: $R sin. \delta = P_1 (\alpha - \delta)$, und folglich:

$$R = \left(\frac{\alpha - \delta}{sin. \delta}\right) P_1 = \left(\frac{\alpha - \delta}{\delta}\right) P_1,$$

wenn die Declination oder der Ablenkungswinkel δ klein ist.

Nun läßt sich nach dem vorigen Paragraphen die Torsionskraft P mittels der Formel

$$P = \frac{\pi^2}{g t^2} \cdot \frac{G k^2 x}{a^2} = \frac{\pi^2}{g t^2} \cdot \frac{G k^2 a (\alpha - \delta)}{a^2} = \frac{\pi^2}{g t^2} \cdot \frac{G k^2 (\alpha - \delta)}{a}$$

ausdrücken, daher kann man aus der Schwingungsdauer t u. s. w. des unmagnetischen Torsionspendels auch die Directionskraft des Magnetstabes durch die Formel

$$R = \left(\frac{\alpha - \delta}{\delta}\right) P_1 = \frac{P}{\delta} = \frac{\alpha - \delta}{\delta} \cdot \frac{\pi^2}{g t^2} \cdot \frac{G k^2}{a}$$

berechnen.

Das Moment dieser Kraft ist bei der Declination $MDN = \delta$ der Nadel, wenn wir annehmen, daß dieselbe ihren Sitz in dem Abstande $DM = a$ von der Drehungsaxe habe:

$R_1 u = R a \sin. \delta$ annähernd, bei kleiner Declination

$$= R a \delta = (\alpha - \delta) \cdot \frac{\pi^2}{g t^2} \cdot G k^2.$$

Dieses Moment ($R a \sin. \delta$) ist für $\sin. \delta = 1$, d. h. wenn die Magnetnadel rechtwinkelig gegen die Magnetrichtung steht, am größten, und zwar $= R a$, und dagegen für $\delta = 0$, d. h. wenn die Axe der Magnetnadel in den magnetischen Meridian fällt, am kleinsten, nämlich = Null.

§. 9 **Magnetismus.** Da die Directionskraft R der Magnetnadel keinen Druck auf die Drehaxe verursacht, also die Nadel kein Bestreben zum Fortschreiten, sondern nur ein Bestreben zur Drehung hat, wenn sie außerhalb des magnetischen Meridians steht, so folgt, daß die ganze Wirkung des Erdmagnetismus auf einen Magnet aus einem Kräftepaare $\frac{R}{2}, -\frac{R}{2}$ mit dem größten Momente $R a$ bestehen müsse. Da sich ferner jedes Kräftepaar $\frac{R}{2}, -\frac{R}{2}$ durch unendlich viele andere Paare $\left(\frac{R_1}{2}, -\frac{R_1}{2}\right), \left(\frac{R_2}{2}, -\frac{R_2}{2}\right)$ u. s. w. ersetzen läßt, deren Momente $R a$, $R_1 a_1$, $R_2 a_2$ u. s. w. alle einander gleich sind, so folgt, daß weder R noch a, also weder die Directionskraft noch ihr Angriffspunkt, sondern nur ihr Moment $R a$ bestimmt ist. Dieses Drehungsmoment $R a$ ist überdies noch von zwei Factoren μ_1 und S, wovon μ_1 dem Erd- und S dem Stab- oder Nadelmagnetismus entspricht, abhängig, weshalb wir

$$R = \mu_1 S \text{ und } R a = \mu_1 S a$$

setzen können. Was endlich noch das Maß μ_1 des Erdmagnetismus anlangt, so ist dieses bei einer horizontalschwingenden Nadel, wie wir seither angenommen haben, nur der horizontale Component der Intensität μ des ganzen Erdmagnetismus, denn der verticale Component μ_2 wird durch die Unterstützung oder Aufhängung der Nadel aufgehoben. Ist ι die Inclination oder die Abweichung der magnetischen Erdaxe von dem Horizonte, so haben wir den horizontalen Componenten:

$$\mu_1 = \mu \cos. \iota,$$

dagegen den verticalen:

$$\mu_2 = \mu \sin. \iota,$$

und endlich das Drehungsmoment einer Magnetnadel:

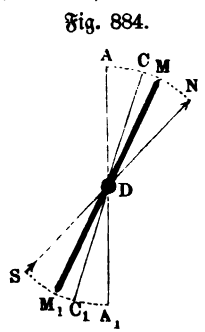
$$R\,a\,sin.\,\delta = \mu\,cos.\,\iota\,.\,S\,a\,sin.\,\delta,$$

also den größten Werth desselben:

$$R\,a = \mu\,S\,a\,cos.\,\iota.$$

Schwingungen einer Magnetnadel. Man kann auch das Drehungsmoment einer Magnetnadel aus der Schwingungszeit derselben selbst berechnen. Bringt man die aufgehängte Magnetnadel MDM_1, Fig. 884, aus ihrer durch das Gleichgewicht zwischen der Torsions- und der Magnetkraft bedingten Ruhelage, so daß sie von dieser um den kleinen Winkel $MDC = \varphi$ abweicht, so nimmt entweder die magnetische Directionskraft R um $R\varphi$ zu und die Torsionskraft um $P_1\,\varphi$ ab, oder es tritt das Umgekehrte ein, in jedem Falle erwächst also aus beiden eine Kraft: §. 10

Fig. 884.



$$(R + P_1)\,\varphi,$$

oder ein Moment:

$$(R + P_1)\,\varphi\,a = (R + P_1)\,x,$$

welches den Magneten nach der Ruhelage zurücktreibt. Ist nun $G\,k^2$ das Trägheitsmoment der Nadel, so haben wir folglich die Beschleunigung, welche dieser Kraft entspricht:

$$p = \frac{(R + P_1)\,a\,x}{G\,k^2}\,g,$$

und setzen wir dieselbe $= \mu\,x$, so erhalten wir:

$$\mu = \left(\frac{R + P_1}{G\,k^2}\right)a\,g,$$

sowie die Schwingungsdauer:

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}} = \pi\sqrt{\frac{G\,k^2}{(R + P_1)\,a\,g}}$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{g}}\sqrt{\frac{G\,k^2}{(R + P_1)\,a}},$$

oder, wenn ν das Verhältniß $\frac{P_1}{R} = \frac{\delta}{\alpha - \delta}$ der Torsionskraft zur magnetischen Kraft bezeichnet:

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{g}}\sqrt{\frac{G\,k^2}{(1 + \nu)\,R\,a}}.$$

Hat man t durch Beobachtungen gefunden, so kann man hiernach umgekehrt, das magnetische Umdrehungsmoment finden, es ist nämlich:

$$R a = \frac{\pi^2}{g t^2} \cdot \frac{G k^2}{1 + \nu}.$$

Ist die Torsionskraft klein, fällt namentlich die Ruhelage $M M_1$ nahe in den magnetischen Meridian, so kann man ν vernachlässigen und

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{\frac{G k^2}{R a}}, \text{ sowie}$$

$$R a = \frac{\pi^2}{g t^2} \cdot G k^2 \text{ setzen.}$$

Noch können wir statt $R a$ den oben angegebenen Werth einführen und daher das Drehungsmoment durch die Formel

$$\mu S a \cos . \iota = \frac{\pi^2}{g t^2} \cdot G k^2 \text{ ausdrücken.}$$

Für eine im magnetischen Meridiane schwingende Inclinationsnadel ist dagegen:

$$\mu S a = \frac{\pi^2}{g t^2} \cdot G k^2$$

und für eine Nadel, deren Umdrehungsaxe in dem magnetischen Meridiane liegt, die sich daher selbst vertical zu stellen sucht:

$$\mu S a \sin . \iota = \frac{\pi^2}{g t^2} \cdot G k^2.$$

Die Formel $\mu S a \cos . \iota = \frac{\pi^2}{g t^2} \cdot G k^2$ giebt uns in $\mu S a \cos . \iota$ ein Product von vier Factoren; da sich aber die Inclination ι durch Beobachtungen an einer Magnetnadel bestimmen und sich $S a$ auf eine bestimmte Weise nicht in seine Factoren zerlegen läßt, so bleibt nur eine Zerlegung des bekannten Productes $\mu S a$ in die Factoren μ und $S a$ zu vollziehen übrig. Wie sich diese Zerlegung mittels Declinationsbeobachtungen ermöglichen läßt, wird aus Folgendem hervorgehen.

§. 11 **Magnetische Anziehungsgesetze.** Die Kräfte, mit welchen sich die ungleichnamigen Pole zweier Magnete anziehen und die gleichnamigen Pole derselben abstoßen, stehen im umgekehrten Verhältnisse der Quadrate der Entfernungen zu einander. Man überzeugt sich hiervon am einfachsten durch die Beobachtungen an einer kleinen Magnetnadel, welche man in der Nähe eines größeren Magnetstabes schwingen läßt. Zu diesem Zwecke legt man den Magnetstab horizontal und parallel dem magnetischen Meridiane, so daß sein Nordpol gegen Nord, also sein Südpol gegen Süd gekehrt ist, und bringt eine kleine Declinationsnadel in die Verlängerung der Axe des Magnetstabes. Ist der Abstand s des Stiftes dieser Nadel von dem einen Pole des

Mangnetstabes viel kleiner als der Abstand von dem anderen, so kann man die Wirkung des letzteren auf die Nadel Null setzen, und annehmen, daß durch die Wirkung des näheren Poles der Coefficient μ_1 der erdmagnetischen Kraft noch um einen gewissen Werth $\varkappa_1$ oder $\varkappa_2$ vergrößert werde. Ist nun die Schwingungszeit der Nadel, $= t$, wenn der Magnetstab sich gar nicht in der Nähe derselben befindet, dagegen $= t_1$, wenn der nähere Pol dieses Stabes um s_1 von dem Stifte der Nadel absteht, und $= t_2$, wenn dieser Pol um s_2 von dem Nadelstifte absteht, so haben wir:

$$\mu_1 Sa = \frac{\pi^2}{g t^2} \cdot Gk^2, \; (\mu_1 + \varkappa_1)\, Sa = \frac{\pi^2}{g t_1^2} Gk^2 \text{ und } (\mu_1 + \varkappa_2) Sa = \frac{\pi^2}{g t_2^2} \cdot G k^2$$

daher folgt durch Division:

$$\frac{\mu_1 + \varkappa_1}{\mu_1} = \frac{t^2}{t_1^2} \text{ und } \frac{\mu_1 + \varkappa_2}{\mu_1} = \frac{t^2}{t_2^2}, \text{ folglich:}$$

$$\varkappa_1 = \left(\frac{t^2 - t_1^2}{t_1^2}\right) \mu_1 \text{ und } \varkappa_2 = \left(\frac{t^2 - t_2^2}{t_2^2}\right) \mu_1, \text{ endlich:}$$

$$\varkappa_1 : \varkappa_2 = \frac{t^2 - t_1^2}{t_1^2} : \frac{t^2 - t_2^2}{t_2^2},$$

oder, wenn statt t, t_1 und t_2 die Schwingungszahlen

$$n = \frac{60''}{t},\; n_1 = \frac{60''}{t_1} \text{ und } n_2 = \frac{60''}{t_2}$$

eingeführt werden,

$$\varkappa_1 : \varkappa_2 = n_1^2 - n^2 : n_2^2 - n^2.$$

Wenn nun die Wirkung des Magnetstabes auf die Nadel dem umgekehrten Quadrate der Entfernung proportional ist, so muß auch

$$\varkappa_1 : \varkappa_2 = s_2^2 : s_1^2, \text{ und folglich auch}$$

$$\frac{n_1^2 - n^2}{n_2^2 - n_1} = \frac{s_2^2}{s_1^2}$$

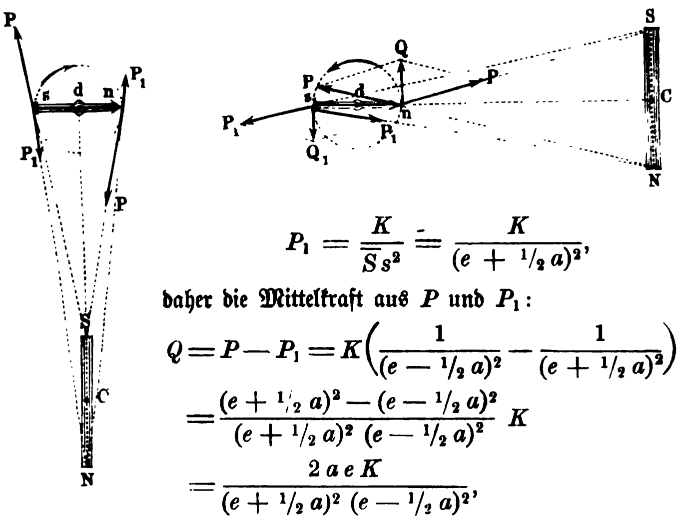
sein, welches durch die Beobachtungen bestätigt wird.

§. 12 Die Wirkungen eines Magnetstabes NS auf eine Magnetnadel ns fallen am einfachsten aus, wenn der Magnetstab rechtwinkelig gegen den magnetischen Meridian gelegt wird, und zwar entweder so, daß sich der Stift d der Nadel ns, Fig. 885 (a. f. S.), in der Verlängerung von NS, oder so, daß er sich in dem durch die Mitte C gehenden Perpendikel von NS, Fig. 886 (a. f. S.), befindet. Setzen wir vor der Hand die Kraft, welche ein Pol von NS auf einen Pol von ns in der Entfernung Eins ausübt, $= K$, so haben wir für den ersten Fall, Fig. 885, wenn a die Länge NS und e die Entfernung Cd der Mittelpunkte C und d der Körper NS und ns von einander bezeichnen, die Kraft, mit welcher der Nordpol n von S angezogen wird,

$$P = \frac{K}{Ns^2},\text{ annähernd } = \frac{K}{(e - \frac{1}{2}a)^2},$$

und die Kraft, mit welcher n von N abgestoßen wird,

Fig. 885. Fig. 886.



$$P_1 = \frac{K}{Ss^2} = \frac{K}{(e + \frac{1}{2}a)^2},$$

daher die Mittelkraft aus P und P_1:

$$Q = P - P_1 = K\left(\frac{1}{(e - \frac{1}{2}a)^2} - \frac{1}{(e + \frac{1}{2}a)^2}\right)$$

$$= \frac{(e + \frac{1}{2}a)^2 - (e - \frac{1}{2}a)^2}{(e + \frac{1}{2}a)^2\,(e - \frac{1}{2}a)^2}\,K$$

$$= \frac{2aeK}{(e + \frac{1}{2}a)^2\,(e - \frac{1}{2}a)^2},$$

oder, wenn $\frac{1}{2}a$ gegen e klein ist,

$$Q = \frac{2aeK}{e^4} = \frac{2aK}{e^3}.$$

Ebenso ist die Mittelkraft aus der Anziehungs- und Abstoßungskraft des Südpoles s:

$$Q = -\frac{2aK}{e^3},$$

und daher das Moment des von diesen Mittelkräften gebildeten Kräftepaares, wenn l die Entfernung der Pole der Nadel von einander bezeichnet,

$$Ql = \frac{2alK}{e^3}.$$

Für den zweiten Fall (Fig. 886) sind hingegen die Anziehungs- und Abstoßungskräfte in s:

$$P = \frac{K}{Ns^2} = \frac{K}{Ss^2},\text{ und die in } n:$$

$$P_1 = \frac{K}{Sn^2} = \frac{K}{Nn^2},$$

folglich die resultirenden Mittelkräfte:

$$Q = 2 \cdot \frac{CN}{Ns} \cdot P = \frac{aP}{Ns} = \frac{aK}{\overline{Ns}^3} \text{ und } Q_1 = \frac{aK}{\overline{Nn}^3}.$$

Wenn nun $\frac{1}{2}a$ und $\frac{1}{2}l$ ansehnlich kleiner sind als e, so können wir statt $\overline{Ns} = \overline{Ss}$ und $\overline{Nn} = \overline{Sn}$ den Mittelwerth $\overline{Nd} = \overline{Sd}$ und dafür den Näherungswerth $\overline{Cd} = e$ einführen, erhalten demnach:

$$Q = Q_1 = \frac{aK}{e^3},$$

und daher das Moment des von Q und Q_1 gebildeten Kräftepaares:

$$Ql = \frac{alK}{e^3},$$

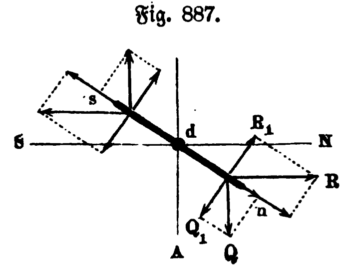
d. i. halb so groß als im vorigen Falle, was auch durch die Beobachtungen vollkommen bestätigt wird.

Uebrigens ist aber die Kraft K selbst noch ein Product von der Intensität $\varkappa$ des Magnetismus in ns und von der Intensität S in $\overline{NS}$, also $K = \varkappa S$ zu setzen, weshalb nun für den ersten Fall

$$Q = \frac{2\varkappa Sa}{e^3}, \text{ und für den zweiten: } Q = \frac{\varkappa Sa}{e^3} \text{ resultirt.}$$

Bestimmung des Erdmagnetismus. Ueberlassen wir in beiden der vorher betrachteten Fälle die Magnetnadel ns der Einwirkung des größeren Magneten, so nimmt dieselbe eine neue Stellung ns, Fig. 887, ein, wobei sich die Kraft Q, mit welcher der Magnetstab auf die Nadel einwirkt, mit der Kraft R, die der Erdmagnetismus auf sie ausübt, ins Gleichgewicht setzt. Ist nun δ der Ablenkungswinkel $Ndn = Sds$ der Nadel von dem magnetischen Meridian, so haben wir die sich das Gleichgewicht haltenden Seitenkräfte von Q und R: §. 13

Fig. 887.



$$Q_1 = Q \cos. \delta$$

und $R_1 = R \sin. \delta$,

folglich ist $Q \cos. \delta = R \sin. \delta$, und sonach

$$tang. \delta = \frac{Q}{R},$$

oder, wenn wir nach dem vorigen Paragraphen entweder

$$Q = \frac{2\varkappa Sa}{e^3} \text{ oder } Q = \frac{\varkappa Sa}{e^3},$$

und nach §. 9 Anhang, $R = \mu_1 \varkappa$ setzen,

entweder $tang.\,\delta = \frac{2\varkappa S a}{\mu_1 \varkappa e^3} = \frac{2 S a}{\mu_1 e^3}$ oder $tang.\,\delta = \frac{S a}{\mu_1 e^3}$.

Hiernach läßt sich nun umgekehrt, das Verhältniß des magnetischen Momentes des Stabes zu der **Intensität des Erdmagnetismus** finden, denn es ist in dem einen Falle

$\frac{S a}{\mu_1} = \frac{1}{2} e^3\, tang.\,\delta$ und im anderen Falle $\frac{S a}{\mu_1} = e^3\, tang.\,\delta$.

Die Beobachtung der Schwingungsdauer des Magnetstabes giebt uns aber (nach §. 10) das Product:

$$\mu_1 S a = \frac{\pi^2}{g t^2} G k^2;$$

daher folgt durch Combination beider Gleichungen mit einander das **magnetische Moment des Stabes**

$$\text{entweder } S a = \frac{\pi}{t\sqrt{g}} \sqrt{\tfrac{1}{2} G k^2 e^3\, tang.\,\delta}$$

$$\text{oder } S a = \frac{\pi}{t\sqrt{g}} \sqrt{G k^2 e^3\, tang.\,\delta},$$

und das Maß der horizontalen Componenten des Erdmagnetismus:

$$\text{entweder } \mu_1 = \frac{\pi}{t\sqrt{g}} \sqrt{\frac{2\, G k^2\, cotang.\,\delta}{e^3}} \text{ oder} = \frac{\pi}{t\sqrt{g}} \sqrt{\frac{G k^2\, cotang.\,\delta}{e^3}},$$

je nachdem man δ auf die eine oder die andere Weise beobachtet hat.

Durch Division mit dem Cosinus der Inclination (ι) bekommt man die ganze Stärke des Erdmagnetismus:

$$\mu = \frac{\mu_1}{cos.\,\iota}.$$

Um sich einen klaren Begriff von dem Coefficienten oder dem Maße μ des Erdmagnetismus zu verschaffen, muß man in der Formel

$$R a = \mu S a \text{ und } Q l = \frac{\varkappa S l a}{e^3},\; a = l = e = 1,$$

sowie auch $\varkappa = S = 1$ setzen; dann erhält man $R a = \mu$ und $Q l = 1$; es ist hiernach:

1) das Maß μ der **Intensität des Erdmagnetismus** dasjenige Moment, mit welchem durch den Erdmagnetismus eine Magnetnadel umgedreht wird, deren magnetisches Moment = Eins ist; und es ist
2) das **magnetische Moment** einer Magnetnadel = Eins, wenn diese Nadel einer anderen ihr gleichen und mit ihr gleich starken Magnetnadel bei der zweiten, in Fig. 886 abgebildeten Stellung, in der Entfernung Eins ein Moment Eins (1 Millimetermilligramm) ertheilt.

Nach Weber's Angaben ist, wenn die Acceleration der Schwere 1 Millimeter wäre:

in Göttingen $\mu = 1{,}774$ Millimetermilligramm,
in München $\mu = 1{,}905$ „ „
in Mailand $\mu = 2{,}018$ „ „

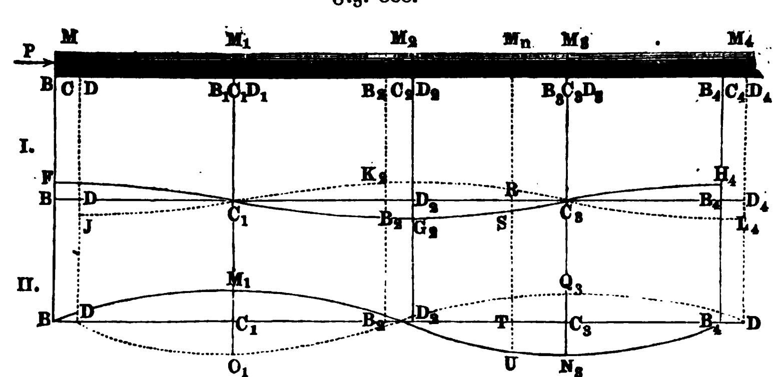
für die Acceleration der Schwere von 9810 Millimeter im mittleren Europa sind aber diese Werthe $\sqrt{9810} = 99$mal so klein.

Anmerkung. Zum tieferen Studium des Magnetismus sind außer Müller-Pouillet's Lehrbuch der Physik, vorzüglich noch Lamont's Handbuch des Erdmagnetismus (Berlin 1849) und Gauß und Weber's Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins, Göttingen und Leipzig 1837 bis 1843, zu empfehlen. Ferner: die Experimentalphysik von Quintus Icilius, sowie die Physik auf Grundlage der Erfahrung, von Mousson u. s. w.

Wellen. Wir haben bei den Längen- und Querschwingungen prismatischer Körper im Obigen (§. 3, 4 und 5) gar nicht auf die Masse dieser Körper Rücksicht genommen, sondern nur die Masse des den Körper spannenden Gewichtes in Betracht gezogen. Im Folgenden wollen wir hingegen von einem spannenden Gewichte ganz absehen, und voraussetzen, daß der Körper durch einen momentanen Impuls, oder durch eine nur eine kurze Zeit lang wirkende Kraft in eine schwingende Bewegung gesetzt worden sei, und daher den schwingenden Körper allein als träge Masse behandeln. Den einfachsten Fall bieten auch hier die Längenschwingungen dar; betrachten wir daher auch diese zunächst. §. 14

Wir wissen aus dem Obigen, daß sämmtliche Theile einer prismatischen Stange BM_4, Fig. 888, in Schwingungen versetzt werden, wenn man diese

Fig. 888.



Stange durch eine in ihrer Axenrichtung wirkende Kraft P ausgedehnt oder comprimirt hat. Nicht allein das Endelement M, sondern auch jedes andere

Element M_1, M_2 ... der Stange schwingt dann innerhalb eines gewissen Raumes BD, $B_1 D_1$, $B_2 D_2$ ... hin und her, den man die Schwingungsamplitude nennt; auch läßt sich, wenn die Stange sehr lang ist, annehmen, daß dieser Raum bei allen Elementen einer und derselbe sei. Wenn nun auch die Zeit, innerhalb welcher ein Stangenelement eine Schwingung vollendet, an allen Stellen der Stange eine und dieselbe ist, so können wir doch nicht voraussetzen, daß sich alle diese Elemente M, M_1, M_2 u. s. w. gleichzeitig in derselben Bewegungsphase, z. B. gleichzeitig in der Mitte ihrer Schwingung befinden, sondern wir müssen vielmehr annehmen, daß die Mittheilung der von M ausgehenden Bewegung Zeit erfordere und derselbe Bewegungszustand eines Elementes um so später eintrete, je entfernter dieses Element von der Bewegungsquelle P entfernt ist. Es ist hiernach möglich, daß in dem Augenblicke, wenn M einen Schwung BD hin und zurück gemacht hat, das Element M_1 noch auf dem Rückwege begriffen, z. B. erst in C_1 sei, daß ferner das Element M_2 erst einen einfachen Schwung gemacht habe, also den Ort D_2 einnehme, daß das Element M_3 erst die Hälfte des Hinweges zurückgelegt habe, daher in C_3 stehe, daß endlich ein Element M_4 erst eine Schwingung beginne, also mit M gleichzeitig schwinge. Die Geschwindigkeit, mit welcher eine und dieselbe Bewegungsphase von M aus nach und nach in dem Körper fortschreitet, heißt die Fortpflanzungsgeschwindigkeit (franz. vitesse de propagation; engl. velocity of propagation) der Schwingungen des Körpers. Ferner bezeichnet man den Inbegriff aller derjenigen Elemente von M bis M_4 des Körpers, welche sich in den sämmtlichen Bewegungsphasen einer Schwingung befinden, also zwischen zwei Elementen M und M_4 von gleichem Bewegungszustande enthalten sind, mit dem Namen einer Welle (franz. ondulation; engl. undulation, waving) des schwingenden Körpers, und nennt den Abstand MM_4 selbst die Länge der Welle. Eine Welle besteht aus einem Hintertheile BD_2, innerhalb dessen sich die rückkehrenden Elemente, wie M_1, M_2 ... befinden, und aus einem Vordertheile $D_2 B_4$, welcher die noch vorwärtsgehenden Elemente M_3, M_4 ... einschließt; man nennt auch wohl BD_2 den verdünnten und $D_2 B_4$ den verdichteten Theil der Welle, weil alle rückkehrenden Elemente innerhalb BD_2 in Ausdehnung, und alle hingehenden Elemente $D_2 B_4$ noch im Zusammendrücken begriffen sind.

§. 15 Die Bewegungs- und Geschwindigkeitsphasen innerhalb einer Welle lassen sich recht gut durch die Ordinaten von Schlangenlinien (I. und II.) wie $FC_1 G_2 C_3 H_4$ und $BM_1 D_2 N_3 B_4$ darstellen. In dem Augenblicke, wenn M in B eine neue Schwingung beginnt, und die größte Elongation und Null Geschwindigkeit hat, befindet sich M_1 in der Ruhelage, hat also die Elongation Null und die größte Geschwindigkeit; beides wird auch durch

die genannten Curven angezeigt, denn die erste oder Elongationscurve (I.) geht in B um die Amplitude $BF = CB$ über die Axe BD_4 hin und durchschneidet in C_1 diese Axe, wogegen die zweite oder Geschwindigkeitscurve (II.) in B durch die Axe hindurchgeht und in C_1 um die Maximalgeschwindigkeit $C_1 M_1$ über der Axe hinläuft. In demselben Augenblicke befindet sich ferner das Element M_2 auf der anderen Seite im größten Abstande von seiner Ruhelage C_2 und es ist seine Geschwindigkeit wie bei M gleich Null; auch dies ist aus beiden Curven zu ersehen, denn die eine läuft in D_2 um die Amplitude $D_2 G_2$ unterhalb der Axe hin, und die andere schneidet die Axe daselbst, hat also die der Geschwindigkeit entsprechende Ordinate Null. Ebenso werden durch diese Curven die Bewegungs- und Geschwindigkeitsphasen der Elemente M_3, M_4 u. s. w. angegeben. Da z. B. die erste Curve die Axe in C_3 schneidet und die zweite daselbst um den Maximalwerth $C_3 N_3$ unter der Axe hinläuft, so wird dadurch angezeigt, daß in diesem Augenblicke das Element M_3 durch seine Ruhelage mit der Maximalgeschwindigkeit in positiver Richtung hindurch gehe. Will man die Bewegungsphase irgend eines anderen Elementes M_n zwischen M, M_2, M_4 u. s. w. im Augenblicke kennen lernen, wo das erste Element M eine neue Schwingung beginnt, so darf man nur von demselben ein Perpendikel auf die besprochenen Curven herablassen. Das Stück RS dieses Perpendikels zwischen der ersten Curve und ihrer Axe entspricht der Elongation dieses Elementes, und das Stück TU zwischen der zweiten Curve und ihrer Axe giebt die Geschwindigkeit desselben an. Da beide Ordinaten abwärts gerichtet sind, so deuten sie auch an, daß sowohl die Elongation als auch die Geschwindigkeit positiv sei, d. i. die Richtung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit habe.

Befände sich das Element M in D, träte es also eine rückgängige Bewegung an, so würden sich die verschiedenen Elongationen der übrigen Elemente einer Welle durch die Ordinaten der punktirten Curve $J C_1 K_2 C_3 L_4$,

Fig 889.

und die Geschwindigkeiten derselben durch die Ordinaten der punktirten Curve $D\,O_1\,B_2\,Q_3\,D_4$ repräsentiren lassen. Die doppelte Schwingungsdauer eines Elementes, d. i. die Zeit t, innerhalb welcher dasselbe den Weg $BD + DB$ zurücklegt, ist auch gleich der Zeit, innerhalb welcher die Schwingungsbewegung um die ganze Länge $MM_4 = l$ einer Welle fortgepflanzt wird; ist daher c die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, so hat man die ganze Länge der Welle:

$$BB_4 = l = c.2\,t = 2\,c\,t.$$

Die Länge des Hintertheils der Welle ist aber

$$BD_2 = l_1 = BB_2 + B_2D_2 = c\,t + \lambda,$$

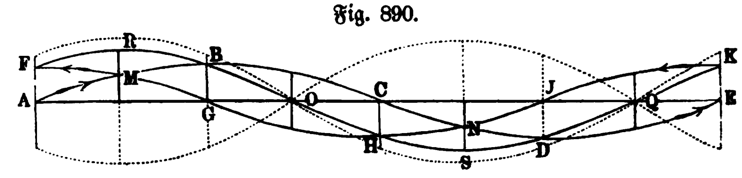
und die des Vordertheiles:

$$D_2B_4 = l_2 = D_2D_4 - B_4D_4 = c\,t - \lambda,$$

wo λ die ganze Schwingungsamplitude eines Elementes bezeichnet.

Anmerkung. Mit Hülfe der Schwingungscurven lassen sich auch die Erscheinungen vor Augen führen, welche mit der Interferenz der Wellen begleitet sind. Ziehen wir nur zwei gleiche und entgegengesetzt laufende Wellenzüge in Betracht, und hiervon wieder in $ABCDE$ und $FGHIK$, Fig. 890, nur diejenigen

Fig. 890.



Curven, deren Ordinaten die Schwingungselongationen abschneiden. Aus den Schwingungselongationen eines zwei Wellen angehörenden Elementes entspringt eine mittlere Elongation, welche genau so gefunden wird, wie jede mittlere Bewegung aus zwei Seitenbewegungen (s. §. 28), und zwar hier durch die algebraische Addition der einfachen Elongationen. Hiernach werden in den Punkten M und N, wo sich beide Wellencurven begegnen, die Ordinaten verdoppelt, und dagegen in den Punkten O und Q, wo beide Curven auf entgegengesetzten Seiten von der Axe AE gleichviel abstehen, die Ordinaten vernullt, und es resultirt aus beiden Wellencurven eine dritte $FRBOHSDQK$, deren Ordinaten die Elongationen aller Elemente in der Axe AE angeben. Während die Wellenzüge ABC und FGH einander entgegenrücken, ändert sich natürlich auch die resultirende Wellencurve $FRBO$ u. s. w.; es ist indessen leicht zu ermessen, daß hierbei die Ruhepunkte O und Q ihren Ort nicht ändern, da hier die Ordinaten der einfachen Wellenzüge auch während der fortgesetzten Bewegung derselben gleich groß und entgegengesetzt bleiben. Diese Punkte sind die sogenannten Schwingungsknoten.

(§. 16) **Fortpflanzungsgeschwindigkeit.** Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen läßt sich auf folgende Weise ausmitteln. Denken wir uns den schwingenden Körper BO, Fig. 891, aus unendlichen Elementen, jedes vom Querschnitte A und von der Länge $BC = CD = \partial x$ bestehend,

und nehmen wir an, daß der Bewegungszustand des einen Elementes $BC = A\partial x$ in einem Zeitelemente ∂t vollkommen auf das folgende Element $CD = A\partial x$ übergehe, daß also die Bewegungsphasen in der Axenrichtung des Körpers mit der Geschwindigkeit $c = \frac{\partial x}{\partial t}$ fortschreiten.

Fig. 891.

B C D M N₁ N N₂ O

Setzen wir voraus, daß die Elemente BC und CD in der Zeit t von C nach N schwingen und dadurch in die Lagen $MN = \partial x_1$ und $NO = \partial x_2$ kommen, und bezeichnen wir die entsprechende Elongation CN durch y. War nun die Trennungsfläche zwischen beiden Elementen vor ∂t Secunden in N_1 und gelangt diese ∂t Secunden später nach N_2, so haben wir die entsprechenden Wege der Elemente:

$$NN_1 = \partial y_1 \text{ und } NN_2 = \partial y_2,$$

ferner die Geschwindigkeiten:

$$v_1 = \frac{\partial y_1}{\partial t} \text{ und } v_2 = \frac{\partial y_2}{\partial t},$$

und daher die Retardation:

$$p = \frac{v_1 - v_2}{\partial t} = \frac{\partial y_1 - \partial y_2}{\partial t^2}.$$

Da ∂t Secunden vor dem Zeitpunkte, wo die Elemente BC und CD die Stellen MN und NO einnahmen, N_1 genau in derselben Phase war wie jetzt O, so hat man auch $CN_1 = DO$; und da ∂t Secunden nach diesem Zeitpunkte N_2 mit M in einerlei Phase ist, so folgt auch $CN_2 = BM$. Aus beiden Gleichungen ergiebt sich nun:

$N_1 O = DO - DN_1 = DO - (CN_1 - CD) = CD$ und:
$MN_2 = CN_2 - CM = CN_2 - (BM - BC) = BC$, und daher:
$NN_1 = \partial y_1 = N_1 O - NO = CD - NO = \partial x - \partial x_2$, sowie:
$NN_2 = \partial y_2 = MN_2 - MN = BC - MN = \partial x - \partial x_1$.

Es ist also das Wegelement ∂y_1 zugleich die Zusammendrückung $\partial x - \partial x_2$ des Elementes NO, und das Wegelement ∂y_2 die Zusammendrückung $\partial x - \partial x_1$ des Elementes MN. Bezeichnet nun noch E den Elasticitätsmodul des schwingenden Stabes, so hat man die aus diesen Zusammendrückungen hervorgehenden Spannungen der Elemente MN und NO:

$$S_1 = \left(\frac{\partial x - \partial x_1}{\partial x}\right) AE = \frac{\partial y_2}{\partial x} \cdot AE \text{ und}$$

$$S_2 = \left(\frac{\partial x - \partial x_2}{\partial x}\right) AE = \frac{\partial y_1}{\partial x} \cdot AE.$$

Durch Subtraction dieser beiden Spannungen von einander erhält man nun die verzögernde Kraft:

$$P = S_2 - S_1 = \left(\frac{\partial y_1 - \partial y_2}{\partial x}\right) A E,$$

und ist nun noch γ die Dichtigkeit der Stangenelemente BC, CD, also $A \partial x . \gamma$ das Gewicht und $\frac{A \partial x . \gamma}{g}$ die Masse M eines Stangenelementes, so hat man die Beschleunigung desselben in N_1 auch

$$p = \frac{P}{M} = \left(\frac{\partial y_1 - \partial y_2}{\partial x}\right) A E \cdot \frac{g}{A \partial x \gamma} = \frac{g E}{\gamma} \cdot \frac{\partial y_1 - \partial y_2}{\partial x^2}.$$

Durch Gleichsetzen beider Werthe für p erhält man nun die Gleichung

$$\frac{\partial y_1 - \partial y_2}{\partial t^2} = \frac{g E}{\gamma} \cdot \frac{\partial y_1 - \partial y_2}{\partial x^2},$$

woraus

$$\frac{\partial x^2}{\partial t^2} = \frac{g E}{\gamma}, \text{ oder } c^2 = \frac{g E}{\gamma},$$

also die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen (Schallgeschwindigkeit),

$$c = \sqrt{\frac{g E}{\gamma}} = \sqrt{g L},$$

wo L den Elasticitätsmodul nach Länge bezeichnet, folgt.

Beispiel. Nimmt man den Elasticitätsmodul des Tannenholzes $E = 1'800000$ Pfund und das Gewicht eines Cubikfußes desselben, $= 30$ Pfund an, so erhält man die Fortpflanzungsgeschwindigkeit desselben

$$c = \sqrt{\frac{144 . 1'800000}{30} \cdot g} = \sqrt{144 . 60000 . g} = 16432 \text{ Fuß},$$

d. i. ungefähr 15 mal so groß als die der Luft.

Anmerkung. Diese Formel für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit gilt auch für eine gespannte Saite, und sogar für das Wasser und für die Luft. Ist p der Druck der Luft auf die Flächeneinheit, so hat man die den Verdichtungsverhältnissen $\frac{\partial y_1}{\partial x}$ und $\frac{\partial y_2}{\partial x}$ entsprechenden Spannungen nach dem Mariotte'schen Gesetze:

$$S_2 = \frac{p \partial x}{\partial x_2} = \frac{p \partial x}{\partial x - \partial y_1} \text{ und } S_1 = \frac{p \partial x}{\partial x_1} = \frac{p \partial x}{\partial x - \partial y_2},$$

und daher die bewegende Kraft auf ein Element vom Querschnitte A:

$$P = A (S_2 - S_1) = \frac{(\partial y_1 - \partial y_2) A p \partial x}{(\partial x - \partial y_1)(\partial x - \partial y_2)},$$

oder, da $\frac{\partial y}{\partial x}$ nur ein kleiner Bruch ist, also $(\partial x - \partial y_1)(\partial x - \partial y_2) = \partial x^2$ gesetzt werden kann,

$$P = \frac{(\partial y_1 - \partial y_2) A p}{\partial x}.$$

Dieser Ausdruck stimmt mit dem obigen, wenn man statt p, E einsetzt, vollkommen überein, es ist folglich die Schallgeschwindigkeit in der Luft:

$$c = \sqrt{g \cdot \frac{p}{\gamma}}.$$

Bei der Lehre von der Wärme wird im zweiten Bande gezeigt, daß wegen der Wärmeveränderung, welche mit der Dichtigkeitsveränderung der Luft nothwendig verbunden ist, an dieser Formel noch ein Coefficient anzubringen ist. Da die Dichtigkeit γ der Luft ihrer Spannung p proportional ist, so fällt auch p aus der Formel heraus, und es bleibt nur noch die Temperatur τ in derselben zurück. Gewöhnlich nimmt man für Luft

$$c = 333 \sqrt{1 + 0{,}00367 \,.\, \tau} \text{ Meter} = 1061 \sqrt{1 + 0{,}00367 \,.\, \tau} \text{ Fuß an.}$$

Beispiel. Wenn nach der Anmerkung des §. 351, eine Wassersäule durch 14 Pfund Kraft um 0,000050 ihres Volumens zusammengedrückt wird, und hiernach der Elasticitätsmodul dieser Flüssigkeit

$$E = \frac{14}{0{,}00005} = 280000 \text{ Pfund}$$

zu setzen ist, so hat man hiernach die Schallgeschwindigkeit im Wasser:

$$c = \sqrt{31{,}25 \cdot \frac{280000 \,.\, 144}{66}} = \sqrt{31{,}25 \cdot \frac{6720000}{11}} = 4369 \text{ Fuß},$$

also ungefähr 4,3mal so groß als die Schallgeschwindigkeit in der Luft setzen.

Schwingungszeit. Wir können nun auch die Zeit einer Schwingung finden, indem wir zunächst die Gleichung suchen, welche die Abhängigkeit der Schwingungselongation von der Zeit und von der die Ruhelage des schwingenden Elementes bestimmenden Abscisse x ausdrückt. Sicherlich ist y sowohl eine Function von t als auch eine solche von x, es läßt sich folglich $y = \varphi(t)$ und auch $y = \psi(x)$ setzen. (§. 17)

Aus der ersten dieser beiden Functionen folgt durch Differenziiren die variable Schwingungsgeschwindigkeit:

$$v = \frac{\partial y}{\partial t} = \varphi_1(t),$$

und ebenso die entsprechende Acceleration:

$$p = \frac{\partial v}{\partial t} = \varphi_2(t),$$

wo $\varphi_1(t)$ und $\varphi_2(t)$ andere Functionen von t ausdrücken (vergl. §. 19).

Die zweite Function giebt das Spannungsverhältniß

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \psi_1(x), \text{ also die Spannung}$$

$$S = AE \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = A\,E \,.\, \psi_1(x),$$

daher die bewegende Kraft des Massenelementes $\partial M = A\,\partial x \cdot \frac{\gamma}{g}$,

$$dS = AE \cdot \frac{\partial [\psi_1(x)]}{\partial x} = \frac{AE\psi_2(x)}{\partial x},$$

und die entsprechende Acceleration:

$$p = \frac{\partial S}{\partial M} = \frac{gE}{\gamma} \psi_2(x);$$

wobei natürlich $\psi_1(x)$ und $\psi_2(x)$ andere Functionen von x anzeigen.

Setzen wir die beiden Ausdrücke für p einander gleich, so erhalten wir folgende Endgleichung:

$$\varphi_2(t) = \frac{gE}{\gamma} \cdot \psi_2(x), \text{ oder, da } \frac{gE}{\gamma} = c^2 \text{ ist,}$$

$$\varphi_2(t) = c^2 . \psi_2(x).$$

Dieser Differenzialgleichung wird durch folgende Integralgleichung:

$$y = \varphi(t) = \psi(x) = F(ct + x) + f(ct - x),$$

wo F und f unbestimmte Functionen von den in den Parenthesen enthaltenen Größen bezeichnen, entsprochen, denn es ist

$$\varphi_1(t) = \frac{\partial [\varphi(t)]}{\partial t} = cF_1(ct + x) + cf_1(ct - x),$$

$$\varphi_2(t) = \frac{\partial [\varphi_1(t)]}{\partial t} = c^2 F_2(ct + x) + c^2 f_2(ct - x)$$

$$= c^2 [F_2(ct + x) + f_2(ct - x)],$$

ferner:

$$\psi_1(x) = \frac{\partial [\psi(x)]}{\partial x} = F_1(ct + x) - f_1(ct - x) \text{ und}$$

$$\psi_2(x) = \frac{\partial [\psi_1(x)]}{\partial x} = F_2(ct + x) + f_2(ct - x),$$

also wirklich:

$$\varphi_2(t) = c^2 . \psi_2(x).$$

Obgleich die Function

$$y = F(ct + x) + f(ct - x)$$

eine unbestimmte ist, so läßt sie sich doch, wenn man noch nähere Bestimmungen des schwingenden Körpers giebt, dazu benutzen, um die Schwingungszeit des schwingenden Körpers zu finden. Wie dies in einigen Fällen möglich ist, wird aus Folgendem erhellen.

Anmerkung. Wenn man aus den Formeln $\partial y = v \partial t$ und $\partial x = c \partial t$, ∂t eliminirt, so erhält man den Ausdruck $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{v}{c}$, oder, da $\frac{\partial y}{\partial x}$ die Verdichtung σ des schwingenden Elementes ausdrückt, $\sigma = \frac{v}{c}$; es ist also die Verdichtung an

jeder Stelle des schwingenden Stabes in einem und demselben Augenblicke der Schwingungsgeschwindigkeit dieser Stelle proportional.

Bestimmung der Elasticitätsmodul. Nehmen wir zunächst an (§. 18) der schwingende Körper habe die Länge l und sei an beiden Enden festgeklemmt. In diesem Falle ist sowohl für $x = 0$, als auch für $x = l$, $y = 0$, folglich:

$F(ct) + f(ct) = 0$ und $F(ct + l) + f(ct - l) = 0$.

Aus der ersten Gleichung folgt $f = -F$, und bringen wir diese Beziehung in der zweiten Gleichung an, so erhält man:

$f(ct + l) - f(ct - l) = 0$, d. i. $f(ct + l) = f(ct - l)$,

oder, wenn man $ct - l = ct_1$ setzt,

$f(ct_1 + 2l) = f(ct_1)$.

Es nimmt also die Function f stets denselben Werth wieder an, wenn ct_1 um $2l$, also die Zeit $t_1 = \frac{2l}{c}$ größer wird, und es ist folglich auch

$$t_1 = \frac{2l}{c} = 2l\sqrt{\frac{\gamma}{gE}}$$

die Zeit eines Doppelschwunges.

Setzen wir zweitens voraus, daß der schwingende Körper an beiden Enden frei sei, so haben wir für $x = 0$ und $x = l$, S, und also auch $\psi_1(x)$, $= 0$, daher:

$F_1(ct) - f_1(ct) = 0$ und $F_1(ct + l) - f_1(ct - l) = 0$.

Hiernach ist:

$f_1 = F_1$ und $f_1(ct + l) = f_1(ct - l)$, oder $f_1(ct_1 + 2l) = f_1(ct_1)$,

und folglich wieder die Schwingungsdauer:

$$t_1 = \frac{2l}{c}.$$

Ist ferner der Körper an einem Ende frei und an dem anderen fest, so hat man für $x = 0$, $y = 0$, und für $x = l$, $S = 0$, daher:

$F(ct) + f(ct) = 0$ und $F_1(ct + l) - f_1(ct - l) = 0$,

es folgt nun $f = -F$, sowie auch $f_1 = -F_1$, und daher:

$f_1(ct + l) + f_1(ct - l) = 0$, oder $f_1(ct_1) + 2l = -f_1(ct_1)$.

Hiernach nimmt also der Körper nach der Zeit $t_1 = \frac{2l}{c}$ stets den umgekehrten Bewegungszustand an, und es ist folglich erst in der doppelten Zeit $2t_1 = \frac{4l}{c}$ eine Schwingung vollendet. Man hat also hier die Schwingungsdauer:

$$t_2 = \frac{4\,l}{c} = 4\,l\sqrt{\frac{\gamma}{g\,E}},$$

also doppelt so groß als in den beiden ersten Fällen.

Mittels der gefundenen Formeln kann man aus der beobachteten Schwingungszeit t, oder vielmehr aus der Anzahl n der Längenschwingungen, welche ein prismatischer Körper in einer gewissen Zeit macht, den Elasticitätsmodul $E = \left(\frac{2\,l}{t}\right)^2 \cdot \frac{\gamma}{g}$, und die Fortpflanzungs- oder Schallgeschwindigkeit in demselben, $c = \frac{2\,l}{t}$ berechnen.

Beispiel. Ein ganz an beiden Enden eingeklemmter Eisendraht von 60 Zoll Länge wurde durch Reibung nach seiner Axenrichtung in Longitudinalschwingungen versetzt, deren 1589 auf eine Secunde gingen. Wie groß ist hiernach der Elasticitätsmodul und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Drahteisens? Nach einer der obigen Formeln hat man den Elasticitätsmodul nach Länge oder Höhe

$$L = \frac{1}{g}\left(\frac{2\,l}{t}\right)^2 = \frac{1}{g}\,(2\,n\,l)^2 = \frac{(1589\,.\,120)^2}{31,25\,.\,12} = 96'950000 \text{ Zoll},$$

und wenn nun ein Cubikzoll dieses Eisens 0,2733 Pfund wiegt, der Elasticitätsmodul nach Gewicht:

$$E = 96'950000\,.\,0,2733 = 26'500000 \text{ Pfund (vergl. Tabelle §. 212).}$$

Die Fortpflanzungs- oder Schallgeschwindigkeit ist:

$$c = \sqrt{g\,L} = \sqrt{31,25\,.\,96950000\,.\,{}^1\!/_{12}} = \sqrt{31,25\,.\,8'080000} = 15890 \text{ Fuß},$$

oder, die Schallgeschwindigkeit $c_1 = 1060$ Fuß der Luft als Einheit angenommen:

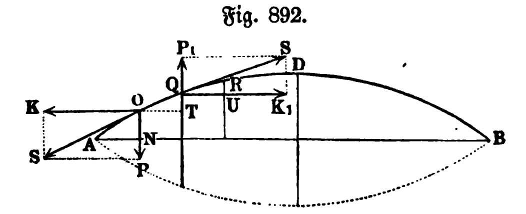
$$c = \frac{15890}{1060} = 15.$$

Anmerkung. Sind die schwingenden Säulen sehr lang, so hängt die Schwingungszeit von der Wellenlänge oder, nach Befinden, von dem Abstand l zwischen zwei Schwingungsknoten ab; es ist dann aber stets $t_1 = \frac{2\,l}{c}$. Diese Zeit bestimmt auch die Höhe des mit den Schwingungen verbundenen Tones; je größer oder kleiner t_1 ist, desto tiefer oder höher fällt auch der Ton aus. Die Stärke des Schalles hingegen wächst und nimmt ab mit den Schwingungselongationen. Bei den sphärischen Wellen, in welchen sich der Schall in der Luft und im Wasser ausbreitet, bleibt c und t unverändert, und es nimmt nur die Schwingungselongation, also die Stärke des Schalles allmälig ab.

(§. 19) **Querschwingungen einer Saite.** Die Querschwingungen der Saiten und elastischen Stäbe lassen sich auf ähnliche Weise ausmitteln, wie die Longitudinalschwingungen. Die gespannten Saiten (franz. cordes; engl. strings) bieten den einfacheren Fall dar, daher sei auch von diesen zunächst die Rede. Es sei ADB, Fig. 892, irgend eine Position der schwingenden Saite, A der eine, B der andere Festpunkt, $l = AB$ ihre Länge, G ihr Gewicht und S ihre als constant anzusehende Spannung. Fassen wir einen den Coordinaten $AN = x$ und $NO = y$ entsprechenden

Punkt O der Saite ins Auge, zerlegen wir dessen Spannkraft S parallel zu AB und rechtwinkelig gegen AB in die Seitenkräfte K und P, so können

Fig. 892.



wir die letztere als die bewegende Kraft an einem Ende O des Elementes OQ ansehen. Läßt man den Bogen $AO = s$ um das Element $OQ = \partial s$, und eben dadurch auch die Ordinate y um ein Element $QT = \partial y$ wachsen, so erhalten wir in P, S, ∂y und ∂s die gleichliegenden Seitenpaare von zwei ähnlichen rechtwinkeligen Dreiecken OPS und QTO, und es ist:

$$\frac{P}{S} = \frac{QT}{OQ} = \frac{\partial y}{\partial s}; \text{ also } P = \frac{\partial y}{\partial s} \cdot S.$$

Auf dasselbe Element OQ wirkt aber auch noch eine aus der Zerlegung der Gegenspannung hervorgehende Kraft $P_1 = \frac{RU}{QR} \cdot S = \frac{\partial y_1}{\partial s} S$ in entgegengesetzter Richtung, daher bleibt die bewegende, das Element OQ nach der Axe AB zurückführende Kraft:

$$P - P_1 = \left(\frac{\partial y - \partial y_1}{\partial s}\right) S$$

übrig.

Die Masse M des Elementes ist zwar der Länge $OQ = \partial s$ desselben proportional, setzen wir indessen nur kleine Schwingungselongationen y voraus, so können wir auch dieselbe dem Elemente $OT = QU = \partial x$ der Abscisse proportional wachsend annehmen, also $M = \frac{\partial x}{l} \cdot \frac{G}{g}$ setzen. Dies vorausgesetzt, erhalten wir nun die Acceleration, mit welcher das Element OQ sich der Ruhelage in AB nähert:

$$p = \frac{P - P_1}{M} = \frac{\partial y - \partial y_1}{\partial s . \partial x} \cdot \frac{g S l}{G},$$

oder $\partial s = \partial x$ gesetzt,

$$p = \frac{\partial y - \partial y_1}{\partial x^2} \cdot \frac{g S l}{G}.$$

Nun ist y irgend eine Function von x, z. B. $\psi(x)$, daher auch $\frac{\partial y}{\partial x}$ eine andere Function $\psi_1(x)$ und $\frac{\partial y - \partial y_1}{\partial x^2} = \frac{\partial \partial y}{\partial x^2} = \frac{\partial [\psi_1(x)]}{\partial x}$ eine dritte Function $\psi_2(x)$ von dieser Größe, sowie

$$p = \psi_2(x) \cdot \frac{g S l}{G}.$$

Da aber auch y eine Function der Zeit t, also etwa $y = \varphi(t)$ ist, so hat man ebenso die Geschwindigkeit, mit welcher OQ zur Ruhelage zurückkehrt:

$$v = \frac{\partial y}{\partial t} = \varphi_1(t),$$ und die entsprechende Acceleration:

$$p = \frac{\partial \varphi_1(t)}{\partial t} = \varphi_2(t).$$

Wenn man nun beide Ausdrücke für p einander gleich setzt, so erhält man ganz wie im Anhang §. 17, die Differenzialgleichung:

$$\varphi_2(t) = \psi_2(x) \cdot \frac{g S l}{G} = c^2 \psi_2(x),$$

und es läßt sich daher auch wie dort

$$y = \varphi(t) = \psi(x) = F(ct + x) + f(ct - x)$$ sowie

$$v = c\,[F_1(ct + x) + f_1(ct - x)]$$ setzen.

Da auch hier für $x = 0$ und $x = l$, y und $v = 0$ sind, so haben wir wieder $f_1 = -F_1$ und $f_1(ct + l) = f(ct - l)$, oder $f(ct_1 + 2l) = f(ct_1)$; es ist daher die Zeit einer ganzen Schwingung:

$$t_1 = \frac{2l}{c} = 2l\sqrt{\frac{G}{gSl}},$$ oder, wenn man $G = Al\gamma$ setzt,

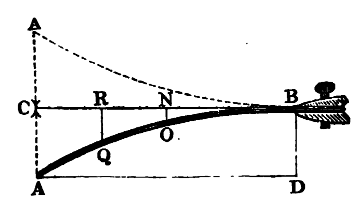
$$t_1 = 2l\sqrt{\frac{A\gamma}{gS}}.$$

Es wächst also die Schwingungsdauer einer Saite direct wie die Länge l, wie die Quadratwurzel aus dem Gewichte $A\gamma$ der Längeneinheit und umgekehrt wie die Quadratwurzel aus der Spannung S der Saite.

Beispiel. Da der halben Schwingungszeit der nächste Octaventon entspricht, so wird nach dieser Regel eine Saite die Octave zu dem anfänglichen Grundton geben, wenn man sie bis zur Hälfte abkürzt, oder in ihrer Mitte unterstützt, oder wenn man sie viermal so stark spannt, oder wenn man sie bei gleicher Spannung durch eine Saite ersetzt, von der die laufende Längeneinheit viermal so leicht ist als bei der ersten Saite.

(§. 20) **Querschwingungen eines Stabes.** Die Bestimmung der Schwingungsdauer eines elastischen Stabes AB (franz. lame; engl. spring), Fig. 893, welcher an einem Ende B festgehalten wird, läßt sich auf folgendem, allerdings etwas umständlichem Wege finden. Nach §. 216 ist, wenn r den Krümmungshalbmesser des Stabes an einer durch die Coordi-

Fig. 893.



naten $CN = x_1$ und $NO = y_1$ bestimmten Stelle O bezeichnet, das Biegungsmoment des Bogens $AO = s_1$:

$$M = \frac{WE}{r}.$$

Setzen wir nun die Kraft, mit welcher sich ein den Coordinaten $CR = x$ und $RQ = y$ entsprechendes Element Q der Axe oder Ruhelage CB nähert, $= P\partial x$, also dessen Moment:

$$= \overline{NR} . P\partial x = (x_1 - x)\, P\partial x, \text{ so haben wir:}$$

$$\frac{WE}{r} = \int_0^{x_1} (x_1 - x)\, P\partial x.$$

Nun ist aber

$$\int_0^{x_1} (x_1 - x)\, P\partial x = \int_0^{x_1} P x_1 \partial x - \int_0^{x_1} P x \partial x$$
$$= x_1 \int_0^{x_1} P\partial x - \int_0^{x_1} P x \partial x,$$

oder wenn man $\int_0^{x_1} P\partial x = P_1$ und hiernach

$$\int_0^{x_1} P x \partial x = \int_0^{x_1} P\partial x . x = P_1 x_1 - \int_0^{x_1} P_1 \partial x \text{ setzt,}$$

$$\int_0^{x_1} (x_1 - x)\, P\partial x = \int_0^{x_1} P_1 \partial x, \text{ daher hat man auch}$$

$$\frac{WE}{r} = \int_0^{x_1} P_1 \partial x.$$

Ferner ist $r = -\frac{\partial s^3}{\partial x^2 \partial (tang.\, \alpha)}$ (s. Art. 33 der analytischen Hülfslehren), oder, da bei einer kleinen Biegung $\partial s = \partial x$ gesetzt werden kann,

$$r = -\frac{\partial x}{\partial\, (tang.\, \alpha)}; \text{ daher folgt:}$$

$$-\, WE \frac{\partial\, (tang.\, \alpha)}{\partial x} = \int_0^{x_1} P_1 \partial x,$$

und durch Differenziiren:

$$-\, WE . \partial \left(\frac{\partial\, (tang.\, \alpha)}{\partial x} \right) = P_1 \partial x.$$

Setzt man nun $y = \psi\,(x)$, ferner

$$tang.\, \alpha = \frac{\partial y}{\partial x} = \psi_1\,(x), \frac{\partial\, (tang.\, \alpha)}{\partial x} = \psi_2(x) \text{ und } \partial \left(\frac{\partial\, (tang.\, \alpha)}{\partial x^2} \right) = \psi_3\,(x),$$

so erhält man die einfache Gleichung:

$$P_1 = -\, WE . \psi_3\,(x),$$

woraus durch nochmaliges Differenziiren

$$\partial P_1 = -\, WE \partial \psi_3\,(x), \text{ d. i. } P\partial x = -\, WE \partial \psi_3\,(x) \text{ oder}$$

$$P = -\, WE \frac{\partial \psi_3\,(x)}{\partial x} = -\, WE \psi_4\,(x) \text{ folgt.}$$

Damit der Stab symmetrisch schwinge, können wir nun noch annehmen, daß P proportional mit y wachse, also $P = - Ky$ sei; und hiernach erhalten wir:

$$WE\psi_4(x) = Ky, \text{ oder } \psi_4(x) = \frac{K}{WE} \cdot y = k^4 y,$$

wenn wir $\frac{K}{WE}$ mit k^4 bezeichnen.

Dieser Differenzialgleichung $\psi_4(x) = k^4 y$ entspricht die Gleichung:

$$y = \psi(x) = A\cos.(kx) + B\sin.(kx) + Ce^{kx} + De^{-kx},$$

denn wenn man diese successiv differenziirt, so erhält man:

$$\psi_1(x) = k[- A\sin.(kx) + B\cos.(kx) + Ce^{kx} - De^{-kx}],$$
$$\psi_2(x) = k^2[- A\cos.(kx) - B\sin.(kx) + Ce^{kx} + De^{-kx}],$$
$$\psi_3(x) = k^3[A\sin.(kx) - B\cos.(kx) + Ce^{kx} - De^{-kx}] \text{ und}$$
$$\psi_4(x) = k^4[A\cos.(kx) + B\sin.(kx) + Ce^{kx} + De^{kx}],$$

also wirklich:

$$\psi_4(x) = k^4 y.$$

(§. 21) Die Schwingungszeit t des elastischen Stabes finden wir wieder wie oben, wenn wir $p = \varphi_2(t) = \frac{\text{Kraft}}{\text{Masse}}$ setzen. Nun ist aber die Kraft eines Elementes:

$$= P\partial x = - Ky\partial x = - WEk^4 y\partial x,$$

und bei dem Querschnitt F und der Dichtigkeit γ die Masse desselben:

$$= F\partial x \frac{\gamma}{g}, \text{ daher folgt die Gleichung:}$$

$$\varphi_2(t) = - \frac{gWEk^4}{F\gamma} \cdot y = - \mu^2 y,$$

wenn wir den Ausdruck

$$\frac{gWEk^4}{F\gamma} \text{ durch } \mu^2 \text{ bezeichnen.}$$

Dieser Differenzialgleichung entspricht schon die einfache Formel

$$y = \varphi(t) = \sin.(\mu t + \tau),$$

wo τ eine beliebige Anfangszeit ausdrückt, denn es ist

$$v = \frac{\partial y}{\partial t} = \varphi_1(t) = \mu.\cos.(\mu t + \tau) \text{ und}$$

$$p = \frac{\partial v}{\partial t} = \varphi_2(t) = - \mu^2\sin.(\mu t + \tau), \text{ d. i.}$$

$$\varphi_2(t) = - \mu^2 y.$$

Nehmen wir nun in der Gleichung $y = \sin.(\mu t + \tau)$, $\tau = 0$, so bekommen wir $y = \sin.(\mu t)$, daher für $\mu t = 0, \pi, 2\pi$ u. s. w., $y = 0$; und es ist folglich

$$t_1 = \frac{\pi}{\mu} \text{ die halbe, und}$$

$$t = \frac{2\pi}{\mu} = \frac{2\pi}{k^2}\sqrt{\frac{F\gamma}{gWE}} \text{ die ganze Schwingungsdauer.}$$

Um hiernach die Zeit einer Schwingung berechnen zu können, muß nicht allein die Größe k, sondern auch das Verhältniß $\frac{F}{W}$ bekannt sein.

Ist der Stab cylindrisch und der Halbmesser desselben, $= r$, so hat man:

$$\frac{F}{W} = \frac{\pi r^2}{{}^1/_4 \pi r^4} = \frac{4}{r^2} \text{ (s. §. 231),}$$

und ist er parallelepipedisch, seine Breite b und Höhe h, so fällt

$$\frac{F}{W} = \frac{bh}{{}^1/_{12}\, b h^3} = \frac{12}{h^2} \text{ aus (s. §. 226).}$$

Hiernach folgt für die erste Stabform:

$$t = \frac{4\pi}{r k^2}\sqrt{\frac{\gamma}{gE}},$$

und für den Stab von der zweiten Form:

$$t = \frac{4\pi}{h k^2}\sqrt{\frac{3\gamma}{gE}}.$$

Die Größe k wird aus der Gleichung:

$$y = A\, cos.(kx) + B\, sin.(kx) + Ce^{kx} + De^{-kx}$$

auf folgende Weise gefunden.

Setzen wir in diese Formel die zusammengehörigen Werthe $x = l$ und $y = 0$, so erhalten wir:

$$1)\quad 0 = A\, cos.(kl) + B\, sin.(kl) + Ce^{kl} + De^{-kl}.$$

Thun wir ferner dasselbe auch in der Gleichung

$$tang.\, \alpha = \frac{\partial y}{\partial s} = \psi_1(x), \text{ so erhalten wir:}$$

$$2)\quad 0 = -A\, sin.(kl) + B\, cos.(kl) + Ce^{kl} - De^{-kl}.$$

Da ferner das Biegungsmoment am Ende A des Stabes $=$ Null, und folglich der Krümmungshalbmesser $r = \infty$, also $\psi_2(x) = 0$ und ebenso $\varphi_3(x) = 0$ ist, so folgt:

$0 = -A\, cos. 0 - B\, sin. 0 + Ce^0 + De^{-0}$, d. i. $-A + C + D = 0$, und

$0 = A\, sin. 0 - B\, cos. 0 + Ce^0 - De^{-0}$, d. i. $-B + C - D = 0$,

daher 3) $A = C + D$ und

4) $B = C - D$.

Eliminirt man nun aus diesen vier Gleichungen, A und B, so erhält man:

$$(C + D)\, cos.(kl) + (C - D)\, sin.(kl) + Ce^{kl} + De^{-kl} = 0,$$

und

$$-(C + D)\, sin.(kl) + (C - D)\, cos.(kl) + Ce^{kl} - De^{-kl} = 0;$$

hieraus folgt durch Addition:

$$C\, cos.(kl) - D\, sin.(kl) + Ce^{kl} = 0,$$

und durch Subtraction:

$$D\, cos.(kl) + C sin.(kl) + De^{-kl} = 0, \text{ oder:}$$

$$C\,[cos.(kl) + e^{kl}] = D\, sin.(kl) \text{ und}$$

$$D\,[cos.(kl) + e^{-kl}] = -\, C\, sin.(kl);$$

daher durch Division:

$$-\frac{cos.(kl) + e^{kl}}{sin.(kl)} = \frac{sin.(kl)}{cos.(kl) + e^{-kl}}, \text{ endlich}$$

$$2 + cos.(kl)\,(e^{kl} + e^{-kl}) = 0, \text{ oder}$$

$$cos.(kl) = -\frac{2}{e^{kl} + e^{-kl}}.$$

Von den verschiedenen Werthen, entsprechend den verschiedenen Tönen, welche der Stab je nach der Anzahl seiner Schwingungsknoten geben kann, ist der kleinste $kl = 1,87501$, wogegen die größeren nahe

$$k = \frac{3\pi}{2}, \ \frac{5\pi}{2}, \ \frac{7\pi}{2} \text{ u. s. w.}$$

ausfallen. Kommt es darauf an, aus der beobachteten Schwingungsdauer t den Elasticitätsmodul E zu finden, so hat man in der Regel nur den kleinsten Werth in Betracht zu ziehen, es ist daher

$$l = \frac{1,8751}{l} \text{ und } k^2 = \frac{3,516}{l^2},$$

folglich für einen cylindrischen Stab:

$$E = \frac{\gamma}{g}\left(\frac{4\pi}{rk^2t}\right)^2 = \frac{\gamma}{g}\left(\frac{4\pi l^2}{3,516\, rt}\right)^2 = 12,774\, \frac{\gamma}{g}\, \frac{l^4}{r^2 t^2},$$

und für einen parallelepipedischen:

$$E = \frac{\gamma}{3g}\left(\frac{4\pi}{hk^2t}\right)^2 = \frac{\gamma}{3g}\left(\frac{4\pi l^2}{3,516\, ht}\right)^2 = 4,2579 \cdot \frac{\gamma}{g}\, \frac{l^4}{h^2 t^2}.$$

Anmerkung 1. Vergleicht man die Formeln

$$t = \frac{4\pi}{rk^2}\sqrt{\frac{\gamma}{gE}} \text{ und } t_1 = 2\, l_1 \sqrt{\frac{\gamma}{gE}}$$

für die Quer- und Längenschwingungen eines und desselben Stabes mit einander, so erhält man die Proportion:

$$t : t_1 = \frac{l^2}{r} : \frac{3,516}{2\pi}\, l_1, \text{ d. i. } t : t_1 = \frac{l^2}{r} : 0,5596\, l_1.$$

Wertheim hat für Gußstahl und Messing dieses Verhältniß durch Versuche bestätigt gefunden.

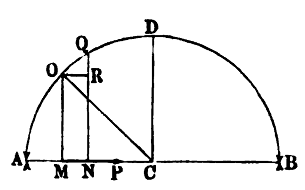
Anmerkung 2. Ueber die Querschwingungen elastischer Stäbe handelt ausführlich Seebeck in einer Abhandlung der Leipziger Gesellschaft der Wissenschaften, Leipzig 1849, sowie in dem Programme der technischen Bildungsanstalt in Dresden vom Jahre 1846. Wertheim's Untersuchungen über die Elasticität der Metalle und des Holzes mittels Längen- und Querschwingungen werden in Poggendorff's Annalen, Ergänzungsband II. 1845, ziemlich ausführlich abgehandelt.

Anmerkung 3. Die Schwingungsdauer, oder vielmehr die Anzahl der Schwingungen eines Stabes in einer gewissen Zeit läßt sich wegen ihrer Kürze in der Regel nicht unmittelbar beobachten, sondern man muß sich hierbei besonderer Hülfsmittel bedienen. Man benutzt hierzu, entweder nach Chladni, Savart u. s. w., die Höhe des von den Schwingungen erzeugten Tones, oder man wendet das zuerst von Duhamel angegebene Verfahren an, welches darin besteht, daß man von dem schwingenden Stab mittels eines feinen Häkchens auf eine ganz gleichförmig umlaufende und mit Kienruß überzogene Glastafel eine Wellenlinie aufreißen läßt. Zur Erzielung einer möglichst gleichförmigen Umdrehungsbewegung kann man sich eines chronometrischen Apparates bedienen, welcher mit einem Windfange, ähnlich wie ein Bratenwender oder das Schlagwerk einer Thurmuhr, ausgerüstet ist, und von Morin in der Abhandlung „Description des appareils dynamometriques etc., Paris 1838“ sowie in dessen Notions fondamentales de mécanique beschrieben wird. Wertheim fand die Anzahl der Schwingungen in einer gewissen Zeit dadurch, daß er mit dem zu untersuchenden Stabe noch einen anderen Körper, z. B. eine Stimmgabel, schwingen ließ, dessen Schwingungszahl bekannt war. Wenn man nun von beiden Körpern Wellencurven in die Rußschicht der rotirenden Glastafel einkratzen läßt und die Wellen derselben zählt, welche einem und demselben Centriwinkel entsprechen, so erhält man in dem Verhältnisse dieser Zahlen auch das Verhältniß der Schwingungszahlen. Was die Longitudinalschwingungen anlangt, so sind diese in der Regel auch mit kleinen Querschwingungen verbunden, weshalb hier die Stäbe zweifache Wellenlinien beschreiben, und die Anzahl der Längenschwingungen mit der der Querschwingungen leicht verglichen werden kann, wenn man die kleinen Wellen innerhalb einer Welle der großen Wellencurve auszählt.

Schwingungshindernisse. Zu den Kräften, welche die Schwingungen eines Körpers erzeugen, gesellen sich noch gewisse Bewegungshindernisse, deren Einfluß wir nun noch kennen lernen müssen. Ist ein solches Hinderniß constant, wie z. B. die Reibung an der Drehaxe eines Pendels oder an dem Stifte einer Magnetnadel, so hat dasselbe auf die Schwingungsdauer gar keinen Einfluß, sondern es wird nur durch dasselbe die Schwingungsweite bei jedem Ausschlag um eine gewisse Größe kleiner. Wir haben oben in §. 1 (Anhang) in dem Falle, wenn die bewegende Kraft der Entfernung x vom Ruhe- oder Mittelpunkte C der Bewegung AB, Fig. 894, proportional ist, §. 22

$$p = \mu x = \mu (a - x_1),$$

Fig. 894.



wo x_1 den durchlaufenen Weg AM bezeichnet, gesetzt. Bei Berücksichtigung der Verminderung k des Weges durch die Reibung haben wir dagegen für das Durchlaufen der ersten Weghälfte AC:

$$p = \mu (a - k - x_1),$$

und für das der zweiten Weghälfte CB:

$$p = -\mu[x_1 - (a + k)]$$

zu schreiben; es besteht also der Einfluß der Reibung k nur darin, daß durch sie bei der einen Weghälfte, a in $a - k$ und bei der andern, a in $a + k$, also der ganze Schwingungsweg $2a$, in $2a - 2k$ umgeändert, d. i. die Schwingungsweite bei jedem Ausschlage um eine constante Größe $2k$ abgekürzt wird. Da endlich in der Formel

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}}$$

die Schwingungsweite gar nicht vorkommt, so kann folglich auch k keinen Einfluß auf dieselbe ausüben.

Anders ist es dagegen mit dem Widerstande der Luft. Dieser wächst bei kleinen Geschwindigkeiten, wie sie bei Pendelbewegungen vorkommen, mehr nach der einfachen Geschwindigkeit als nach dem Quadrate derselben, wie besonders aus Bessel's Untersuchungen (über die Länge des einfachen Pendels, Abhandl. der Akademie der Wissensch. zu Berlin, 1826) hervorgeht, und sich auch dadurch erklären läßt, daß dieses Hinderniß vorzüglich aus der mit der Geschwindigkeit v des schwingenden Körpers wachsenden Verdichtung und Verdünnung der Luft vor und hinter demselben (s. §. 510, sowie den Anhang §. 17, Anmerkung) erwächst. Dies vorausgesetzt, können wir die Acceleration des schwingenden Körpers, wenn wir denselben im Auswärtsschwingen begriffen annehmen, und seinen Weg vom Ruhepunkte aus messen,

$p = -(\mu x + \nu v)$ oder $p + \nu v + \mu x = 0$ annehmen.

Setzen wir nun

$$x = f(t),\ \ v = \frac{\partial x}{\partial t} = f_1(t) \text{ und } p = \frac{\partial v}{\partial t} = f_2(t),$$

so können wir auch $f_2(t) + \nu f_1(t) + \mu f(t) = 0$ schreiben, und diesem Ausdruck durch die Integralgleichung

$$x = [b\ cos.(\psi t \sqrt{\mu}) + b_1\ sin.(\psi t \sqrt{\mu})]\, e^{-\frac{\nu t}{2}},$$

wo b und b_1 noch zu bestimmende Constanten sind und $\psi = \sqrt{1 + \frac{\nu^2}{4\mu}}$ ist, entsprechen. Nun ist aber für $t = 0$, auch $x = 0$, daher $b = 0$ und einfacher

$$x = b_1\ sin.(\psi t \sqrt{\mu})\, e^{-\frac{\nu t}{2}}.$$

Da dieser Werth für $\psi t \sqrt{\mu} = \pi$ wieder Null wird, so ist folglich die Zeit einer einfachen Schwingung

$$t = \frac{\pi}{\psi\sqrt{\mu}} = \frac{\pi}{\sqrt{\mu + \frac{\nu^2}{4}}},\ \text{ d. i. } \frac{1}{\psi} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\nu^2}{4\mu}}}$$

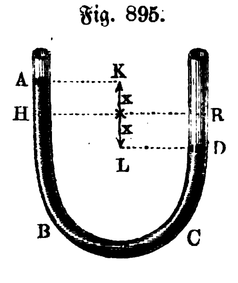
mal so groß, als wenn der Widerstand der Luft nicht vorhanden wäre.

Anmerkung. Es ist leicht zu erklären, weshalb die in Schwingungen versetzten Körper nach und nach immer kleinere und kleinere Schwingungen machen und zuletzt in Ruhe übergehen. Die Ursache dieser Erscheinung ist zwar zunächst der Widerstand der Luft, dann aber auch noch die Unvollkommenheit der Elasticität der schwingenden Körper, vermöge welcher sich die Körper, namentlich innerhalb kurzer Zeiten den auf sie wirkenden Kräften nicht vollkommen proportional ausdehnen und zusammendrücken.

Schwingungen des Wassers. Den einfachsten Fall der Wellenbewegung des Wassers bieten die Schwingungen desselben in zwei communicirenden Röhren $ABCD$, Fig. 895, dar. Nehmen wir zunächst an, daß dieselben von gleichem Querschnitte A seien, und denken wir uns das Wasser in dem einen Schenkel um $HA = x$ über dem der Ruhelage entsprechenden Niveau HR gehoben, und im anderen um $RD = x$ gesunken. Wir haben dann die bewegende Kraft

§. 23

Fig. 895.



$$P = A \, . \, 2 x \gamma,$$

ferner, wenn l die ganze Länge $ABCD = HBCR$ der Wassermasse bezeichnet, die bewegte Masse $M = \frac{A l \gamma}{g}$, und daher die Beschleunigung, mit welcher der eine Wasserspiegel sinkt und der andere steigt:

$$p = \frac{P}{M} = \frac{2 A x \gamma}{A l \gamma} g = \frac{2 g x}{l}.$$

Da diese Formel ganz dem im Anhange §. 1 und 2 abgehandelten Schwingungsgesetze $p = \mu x$ entspricht, so haben wir auch hier die Zeit einer Schwingung:

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}} = \pi \sqrt{\frac{l}{2g}}.$$

Da ferner beim einfachen Kreispendel von der Länge $\frac{l}{2}$, ebenfalls

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{2g}}$$

ist, so schwingt also das Wasser in den communicirenden Röhren von gleicher Weite mit diesem Pendel isochron.

Sind die beiden Schenkel der Röhre $ABCD$, Fig. 896 (a. f. S.), gegen den Horizont geneigt, bildet z. B. die Axe des einen den Winkel α, und die des anderen den Winkel β mit dem Horizonte, so entspricht dem Wege $AH = DR = x$, welchen der Wasserspiegel in dem einen Schenkel auf- und in dem anderen abwärts gemacht hat, der Niveauabstand:

$$z = x \sin.\alpha + x \sin.\beta = x (\sin.\alpha + \sin.\beta),$$

Fig. 896.

daher ist die Kraft:

$$P = A \gamma x (\sin.\alpha + \sin.\beta),$$

ferner die Acceleration:

$$p = \frac{g (\sin.\alpha + \sin.\beta) . x}{l},$$

und die Schwingungsdauer:

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g (\sin.\alpha + \sin.\beta)}}.$$

Sind endlich die Röhren von ungleicher Weite, so fällt die Bestimmung der Schwingungsdauer bedeutend complicirter aus. Es sei A der Querschnitt und l die Länge der Mittelröhre, ferner α_1, A_1 und l_1 Neigungswinkel, Querschnitt und Länge der einen, sowie α_2, A_2 und l_2 Neigungswinkel, Querschnitt und Länge der anderen Seitenröhre; denken wir uns endlich das Wasser in der Axe des einen Schenkels um x_1 gestiegen und im anderen um x_2 gesunken. Wir haben zunächst

$$A_1 x_1 = A_2 x_2, \text{ daher } x_2 = \frac{A_1}{A_2} x_1,$$

und die bewegende Kraft, auf A_1 reducirt:

$$P = A_1 (x_1 \sin.\alpha_1 + x_2 \sin \alpha_2) \gamma = \frac{A_1 \gamma}{A_2} (A_2 \sin.\alpha_1 + A_1 \sin.\alpha_2) x_1.$$

Die Wassermasse in der Zwischenröhre ist constant, und zwar $= \frac{A l \gamma}{g}$, und da ihre Geschwindigkeit in dem Verhältnisse $\frac{A_1}{A}$ zu der der Kraft steht, dieselbe auf den Kraftpunkt reducirt:

$$= \left(\frac{A_1}{A}\right)^2 . A l \gamma.$$

Die Wassermasse im ersten Schenkel ist:

$$= \frac{A_1 (l_1 + x_1) \gamma}{g}, \text{ und die im zweiten}$$

$$= \frac{A_2 (l_2 - x_2) \gamma}{g},$$

oder auf den Kraftpunkt reducirt:

$$= \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 \frac{A_2 (l_2 - x_2) \gamma}{g}.$$

Endlich folgt die von P zu bewegende Masse:

$$M = A_1^2 \cdot \frac{\gamma}{g}\left(\frac{l}{A} + \frac{l_1 + x_1}{A_1} + \frac{l_2 - x_2}{A_2}\right)$$
$$= A_1^2 \cdot \frac{\gamma}{g}\left(\frac{l}{A} + \frac{l_1}{A_1} + \frac{l_2}{A_2} + \frac{x_1}{A_1} - \frac{A_1 x_1}{A_2^2}\right)$$
$$= \frac{A_1^2 \gamma}{g}\left[\frac{l}{A} + \frac{l_1}{A_1} + \frac{l_2}{A_2} + \left(\frac{1}{A_1^2} - \frac{1}{A_2^2}\right) A_1 x_1\right],$$

und die Acceleration:

$$p = \frac{P}{M} = \frac{\left(\frac{sin.\alpha_1}{A_1} + \frac{sin.\alpha_2}{A_2}\right) g x_1}{\frac{l}{A} + \frac{l_1}{A_1} + \frac{l_2}{A_2} + \left(\frac{1}{A_1^2} - \frac{1}{A_2^2}\right) A_1 x_1}.$$

Wären die beiden Seitenröhren von gleichem Querschnitte, so hätte man $A_1 = A_2$, daher:

$$p = \frac{(sin.\alpha_1 + sin.\alpha_2) g x_1}{\left(\frac{l}{A} + \frac{l_1 + l_2}{A_1}\right) A_1} = \frac{(sin.\alpha_1 + sin.\alpha_2) g x_1}{\frac{A_1 l}{A} + l_1 + l_2},$$

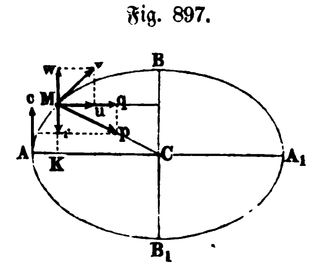
und die Schwingungszeit:

$$t = \pi \sqrt{\frac{A_1 l + A\,(l_1 + l_2)}{g A (sin.\alpha_1 + sin.\alpha_2)}}.$$

Anmerkung. Durch die Reibung und durch den Krümmungswiderstand erleiden natürlich diese Formeln noch einige Modificationen (vergl. Anhang, §. 22).

Elliptische Schwingungen. Wenn der Körper M, welcher durch eine Kraft P nach einem festen Punkte C, Fig. 897, mit einer Acceleration §. 24

Fig. 897.



$p = \mu z = \mu . \overline{CM}$ hingetrieben wird, eine Anfangsgeschwindigkeit c hat, deren Richtung von der Kraftrichtung abweicht, so erfolgen seine Schwingungen nicht mehr in der geraden Linie, sondern in einer Ellipse, wie aus Folgendem hervorgehen wird. Es sei in dem Anfangspunkte A der Bewegung die Bewegungsrichtung rechtwinkelig auf dem Abstande $CA = a$ und die entsprechende Geschwindigkeit $= c$. Legen wir die Coordinatenaxen durch C, und zwar die eine auf die andere rechtwinkelig gegen CA. Bezeichnen wir nun die Coordinaten CK und KM durch x und y, so haben wir die mit den Axen parallel gehenden Componenten q und r von $p = \mu z$, da $\frac{q}{p} = \frac{x}{z}$ und $\frac{r}{p} = \frac{y}{z}$ ist:

$$q = \mu x \quad \text{und} \quad r = \mu y.$$

Sind nun u und v die ebenfalls den Axen parallel gerichteten Componenten der Geschwindigkeit w des Körpers M, so haben wir nach §. 1, Anhang:

$$u = \sqrt{\mu(a^2 - x^2)};$$

zugleich

$$c^2 - v^2 = 2\int v \partial y = 2\mu \int y \partial y = \mu y^2, \text{ und daher } v = \sqrt{c^2 - \mu y^2}.$$

Wenn für $y = b$, $v = 0$ ist, so folgt:

$0 = c^2 - \mu b^2$, daher $c = b\sqrt{\mu}$ und $v = \sqrt{\mu(b^2 - y^2)}$.

Nun ist aber $u = \frac{\partial x}{\partial t}$ und $v = \frac{\partial y}{\partial t}$, daher folgt auch:

$$\frac{u}{v} = \frac{\partial x}{\partial t} = \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{b^2 - y^2}}, \text{ oder } \frac{\partial x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{\partial y}{\sqrt{b^2 - b^2}}, \text{ d. i.}$$

$$\frac{\partial\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \frac{\partial\left(\frac{y}{b}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}},$$

und daher (nach Art. 26, V. der analytischen Hülfslehren):

$$arc.\left(sin. = \frac{x}{a}\right) = arc.\left(sin. = \frac{y}{b}\right) + Con.,$$

oder, da für $x = a$, $y = 0$ ist,

$$arc.\left(sin. = \frac{a}{a}\right) = arc.\left(sin. = \frac{0}{b}\right) + Con., \text{ oder}$$

$$arc.\,(sin. = 1) = arc.\,(sin. = 0) + Con., \text{ d. i. } \frac{\pi}{2} = Con., \text{ und}$$

$$arc.\left(sin. = \frac{x}{a}\right) = arc.\left(sin. = \frac{y}{b}\right) + \frac{\pi}{2}, \text{ oder}$$

$$arc.\left(sin. = \frac{x}{a}\right) - arc.\left(sin. = \frac{y}{b}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Wenn aber die Differenz zweier Bögen $= \frac{\pi}{2}$ beträgt, so ist der Sinus des einen gleich dem Cosinus des anderen, d. i.

$$\frac{x}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}, \text{ oder } \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

Da dies die Gleichung einer Ellipse ist, so folgt auch, daß der Punkt, welcher mit der Acceleration μz nach C getrieben oder gezogen wird, in einer Ellipse von den Halbaxen $CA = a$ und $CB = b$ um C läuft.

Auch folgt nun:

$$\partial t = \frac{\partial y}{v} = \frac{\partial y}{\sqrt{\mu(b^2 - y^2)}}, \text{ daher die Zeit:}$$

$$t = \sqrt{\frac{1}{\mu}} \cdot arc. \left(sin. = \frac{y}{b}\right), \text{ ferner umgekehrt:}$$

$$y = b\ sin. (t\sqrt{\mu}), \text{ sowie } x = a\ cos. (t\sqrt{\mu}),$$

und die Zeit zum Durchlaufen eines elliptischen Quadranten, wenn man $y = b$ setzt:

$$t_1 = \sqrt{\frac{1}{\mu}}\ arc. \left(sin. = \frac{b}{b}\right) = \sqrt{\frac{1}{\mu}}\ arc. (sin. = 1) = \frac{\pi}{2\sqrt{\mu}},$$

also die Zeit zum Durchlaufen der halben Ellipse:

$$2 t_1 = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}},$$

und die Zeit einer ganzen Umdrehung oder Schwingung:

$$4 t_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}};$$

also genau so groß, als wenn die Bewegung eine geradlinig wiederkehrende wäre. Noch folgt:

$$u = \sqrt{\mu(a^2 - x^2)} = \sqrt{\mu\left(a^2 - a^2 [cos. (t\sqrt{\mu})]^2\right)} = \mu\, a\ sin. (t\sqrt{\mu})$$

und

$$v = \sqrt{\mu(b^2 - y^2)} = \mu\, b\ cos. (t\sqrt{\mu}),$$

und daher die Umdrehungsgeschwindigkeit:

$$w = \sqrt{u^2 + v^2} = \mu \sqrt{(a\ sin.\ t\sqrt{\mu})^2 + (b\ cos.\ t\sqrt{\mu})^2}.$$

Endlich kann man noch

$$x = \frac{a+b}{2}\ cos. (t\sqrt{\mu}) + \frac{a-b}{2}\ cos. (t\sqrt{\mu}) \text{ und}$$

$$y = \frac{a+b}{2}\ sin. (t\sqrt{\mu}) - \frac{a-b}{2}\ sin. (t\sqrt{\mu})$$

setzen, und da nun die ersten Glieder

$$\frac{a+b}{2}\ cos. (t\sqrt{\mu}) \text{ und } \frac{a+b}{2}\ sin. (t\sqrt{\mu})$$

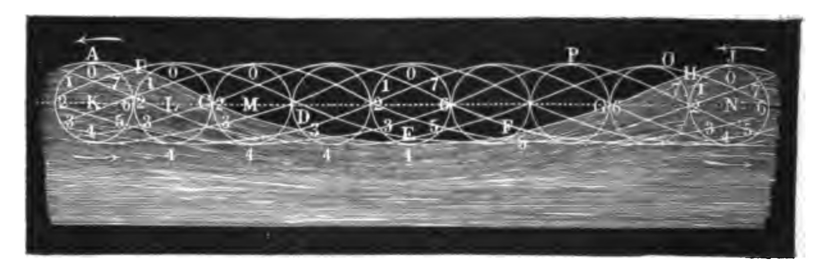
einer gleichförmigen Bewegung in einem Kreise vom Halbmesser $\frac{a+b}{2}$, und die beiden anderen Glieder einer entgegengesetzten gleichförmigen in einem Kreise vom Halbmesser $\frac{a-b}{2}$ entsprechen, so kann man auch annehmen, daß die elliptische Bewegung des Punktes aus zwei kreisförmigen Bewegungen zusammengesetzt sei, daß nämlich der Punkt gleichförmig in

einem Kreise vom Halbmesser $\frac{a - b}{2}$ umlaufe, während sich das Centrum dieses Kreises gleichförmig in einem Kreise vom Halbmesser $\frac{a + b}{2}$ fortbewegt.

Ist $b = 0$, so erfolgt zwar die Schwingung in einer geraden Linie, allein man kann sich auch denken, daß diese Schwingung aus zwei gleichen und entgegengesetzten Kreisbewegungen zusammengesetzt sei.

§. 25 **Wasserwellen.** Die elliptischen Schwingungsbewegungen finden sich den genauen Beobachtungen der Gebrüder Weber zufolge bei den Bewegungen der Wasserwellen (franz. ondes; engl. waves) vor. Nicht allein jedes Wassertheilchen in der Oberfläche, sondern auch jedes Wassertheilchen unter derselben beschreibt während der Wellenbewegung des Wassers eine Ellipse. Wegen des Widerstandes am Boden sind jedoch die Ellipsen unter dem Wasser kleiner als die an der Oberfläche, und nehmen überhaupt mit dem Abstande von der Oberfläche ab. Die verschiedenen Elemente im Wasserspiegel, sowie in jeder anderen Fläche parallel zu demselben, befinden sich in demselben Augenblicke in den verschiedensten Bewegungsphasen; während ein Element A, Fig. 898, seine Bahn in (0) beginnt, ist ein Element B

Fig. 898.

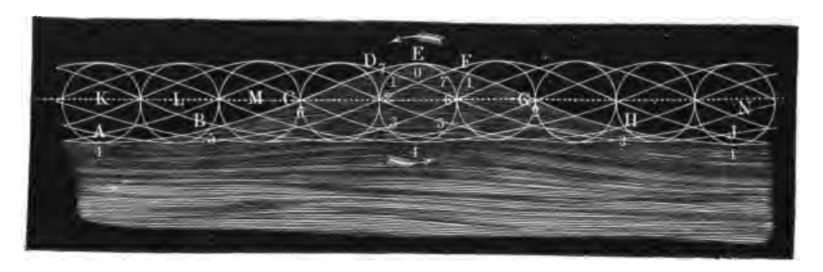


schon in (1), ein anderes C in (2), ein drittes D in (3), ein viertes E in (4) u. s. w.; es bildet also in diesem Augenblicke der verticale Durchschnitt der Oberfläche des Wassers eine cykloiden- oder trochoidenförmige Curve $ABCDEFGHJ$. Vor dem Eintritte der Wellenbewegung waren die Elemente in den Mittelpunkten $K, L \ldots N$ ihrer Bahnen und bildeten den horizontalen Wasserspiegel KN, während der Wellenbewegung hingegen befinden sie sich zum Theil über, zum Theil unter dieser Ebene, und haben natürlich stets ein Bestreben, nach ihren Ruhepunkten $K, L \ldots N$ zurückzukehren. Die elliptischen Schwingungen finden jedoch nur so lange statt, als die Wellen unverändert bleiben; nimmt aber die Größe derselben allmälig ab, so wird auch die Bahn eines Elementes nach und nach eine engere und engere, und bildet daher keine Ellipse mehr, sondern eine Spirallinie. Umge-

kehrt bildet sich sicherlich bei der Entstehung und dem Wachsen der Wellen die elliptische Bahn erst allmälig aus einer Spirallinie heraus.

Nach einem Zeittheilchen ist A in seiner Bahn nach (1), B nach (2), C nach (3) u. s. w. gerückt, und dadurch die Welle um den Horizontalabstand KL zwischen je zwei Elementen fortgeschoben worden; nach Verlauf eines zweiten Zeittheilchens befindet sich ferner A in (2), B in (3), C in (4), und es ist die Welle wieder um den Abstand $KL = LM$ fortgerückt; und so bewegt sich bei dem ferneren Umlaufe der Wasserelemente die Welle immer weiter und weiter fort, bis sie am Ende einer vollständigen Umdrehung eines Elementes in seiner Bahn ihre eigene Länge KN durchlaufen hat. Nach einer halben Umdrehung eines Wasserelementes ist wie Fig. 899 zeigt,

Fig. 899.



an die Stelle eines Wellenberges ein Wellenthal und an die des letzteren ein Wellenberg gekommen. Dieses Fortschreiten der Welle besteht natürlich in keiner besonderen Bewegung des Wassers, sondern nur in einem Fortrücken einer und derselben Bewegungsphase, z. B. in dem Fortrücken des Wellengipfels J (Fig. 898) nach O, P u. s. w. Kennt man die Umlaufszeit t eines Wasserelementes und die Länge $AJ = s$ einer Welle, so kann man die Fortpflanzungsgeschwindigkeit derselben durch die Formel $c = \frac{s}{t}$ berechnen.

Die Höhe einer Welle, oder die Summe von der Höhe eines Wellenberges und der Tiefe eines Wellenthales ist der verticalen Axe $2b$ der Ellipse gleich, in welcher die Wasserelemente an der Oberfläche umlaufen; die Länge CG des Wellenthales übertrifft die halbe Wellenlänge um die horizontale Axe $2a$ jener Ellipse, und die des Wellenberges ist natürlich um so viel kürzer als die halbe Länge der ganzen Welle. Hiernach wäre der Querschnitt eines Wellenthales größer als der eines Wellenberges; da dies aber wegen der Unveränderlichkeit des Wasservolumens nicht möglich ist, so müssen die Mittelpunkte der elliptischen Bahnen noch etwas über dem Niveau des ruhigen Wasserspiegels stehen.

§. 26 **Weber's Versuche.** Nach Weber's Versuchen ist die Bahn, in welcher sich jedes Wasserelement an der Oberfläche einer Welle bewegt, eine wenig gedrückte Ellipse, nach Emy sollen hingegen bei den Meereswellen die Wasserelemente aufrechtstehende Ellipsen durchlaufen. Mit der Tiefe der Elemente unter der Oberfläche nehmen beide Axen ihrer elliptischen Bahnen ab, jedoch, besonders nach Weber, die verticalen Axen mehr als die horizontalen Axen. Nach der Tiefe zu scheint ein Fortschreiten der Wellen nicht statt zu finden: senkrecht unter einander befindliche Wasserelemente befinden sich, den Beobachtungen der Gebrüder Weber zufolge, gleichzeitig in einer und derselben Bewegungsphase, wogegen die in einer horizontalen Linie liegenden Elemente eine stetige Folge der Bewegungsphasen bilden. Aus den erwähnten Beobachtungen geht ferner noch hervor, daß die Umlaufszeit eines Elementes, oder die Zeit, innerhalb welcher eine Welle um ihre eigene Länge fortschreitet, vorzüglich von dem Verhältnisse der beiden Bahnaxen abhängt; je größer das Verhältniß der horizontalen Axe $2a$ zur verticalen Axe $2b$ der Bahn ist, desto größer ist auch die Umlaufszeit. Die tiefer liegenden Wassertheile durchlaufen ferner ihre Bahnen in kürzerer Zeit, als die in der Oberfläche, woraus wieder gefolgert werden muß, daß auch die Wellenlängen nach dem Boden zu abnehmen.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $c = \frac{s}{t}$ einer Welle hängt, da die Umlaufszeit t mit dem Verhältnisse $\frac{a}{b}$ wächst, nicht allein von der Länge s, sondern auch von der Höhe b ab. Wenn eine Welle zwischen parallelen Wänden, z. B. in einem Canale fortschreitet, so bleibt ihre Breite unverändert; es nimmt aber ihre Höhe b allmälig ab und ihre Länge allmälig so zu, daß in der Fortpflanzungsgeschwindigkeit nur diejenige Veränderung eintritt, welche aus der Reibung des Wassers an den Wänden resultirt. Wenn hingegen eine Welle auf keiner Seite in ihrem Fortschreiten gehindert wird, und dieselbe einen in sich selbst zurücklaufenden Wall bildet, so vergrößert sich ihre Länge und Breite zugleich, und zwar auf Unkosten ihrer Höhe, und sie wird allmälig so flach, daß sie in kurzer Zeit von dem Auge nicht mehr wahrgenommen werden kann. Ist eine solche Welle anfangs nicht kreisförmig, so nähert sie sich wenigstens der Kreisgestalt immer mehr und mehr, je weiter sie fortschreitet. Nach den Weber'schen Versuchen soll die Höhe in arithmetischer Progression abnehmen, wenn die Welle in geometrischer Progression fortschreitet. Die Geschwindigkeit des Fortschreitens einer solchen Welle nimmt allmälig ab, je weiter dieselbe fortschreitet. Wenn umgekehrt eine Welle von außen nach innen fortschreitet, und sich dabei immer mehr und mehr zusammenzieht, so nimmt dieselbe an Höhe und Länge, sowie auch an Geschwindigkeit, allmälig zu.

Es findet hiernach ein großer Unterschied zwischen den Wasserwellen und den Schallwellen statt. Während bei diesen Wellen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit nur von der Elasticität und Dichtigkeit des Mediums abhängt, ist dieselbe bei jenen Wellen nur eine Function der Wellenhöhe und Wellenlänge. Wenn die Wellenbewegung des Wassers durch eine fast momentan wirkende Kraft, z. B. durch Eintauchen und schnelles Herausziehen eines festen Körpers aus dem Wasser, veranlaßt wird, so beschreiben die Wasserelemente immer kleiner und kleiner werdende elliptische Bahnen, oder vielmehr im Ganzen sich immer mehr und mehr zusammenziehende Spirallinien, und es fallen hierbei auch die Umdrehungszeiten immer kleiner und kleiner aus. Diesem Bewegungsverhältnisse ist die Entstehung einer ganzen Reihe immer kleiner und kleiner ausfallender Wellen beizumessen. Bei dem weiteren Fortschreiten werden die folgenden Wellen von den vorhergehenden immer mehr und mehr verstärkt, während die vorderste Welle sich in kurzer Zeit so sehr verflacht, daß sie von dem Auge nicht mehr wahrgenommen wird. Dieses Zusammenfließen der Wellen verursacht die Entstehung kleiner Wellensysteme, welche besonders auf den Vorderflächen der Hauptwellen zahnförmig auftreten. Diese kleineren Wellen oder Zähne schreiten, nach Poisson und Cauchy, gleichförmig beschleunigt fort.

§. 27

Hagen's Versuche. Nach den neuesten Forschungen des Herrn Geh. Oberbauraths Hagen (s. den Seeufer- und Hafenbau von G. Hagen, 1. Band, Berlin 1863, welcher den 3. Theil des Handbuches der Wasserbaukunst von demselben Verfasser bildet, sowie auch dessen Abhandlungen über Wellen auf Gewässern von gleichmäßiger Tiefe, Berlin 1862) beschreiben die Wassertheile bei Wellen über einem sehr tiefen Grunde, mit constanter Winkelgeschwindigkeit, Kreise, deren Durchmesser nach unten zu allmälig abnehmen, so daß sie am Boden unendlich klein ausfallen. Ein Wasserfaden, welcher in der Ruhelage senkrecht steht, wird folglich hiernach bei der Wellenbewegung, ähnlich wie ein Getreidestengel beim Winde, um diese Verticale so hin- und herschwingen, daß dabei der Fußpunkt unverändert bleibt. Die Wellenlinie, oder die Curve, welche die in gleicher Umdrehungsphase befindlichen, in der Ruhelage eine horizontale Linie bildenden Punkte verbindet, ist deshalb eine gestreckte Cycloide, deren Streckung mit der Tiefe so abnimmt, daß sie nahe über dem festen Boden eine gerade Linie bildet, während sie an der Oberfläche einer gemeinen Cycloide am nächsten kommt. Aus dem Halbmesser r der gemeinen Cycloide, dessen Größe sich bei hohen Meereswellen auf 50 Fuß steigert, folgt die Wellenlänge $l = 2\pi r$, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit derselben:

$$c = \sqrt{2gr} = \sqrt{\frac{gl}{\pi}},$$

die Periode einer Welle:

$$t = \frac{l}{c} = \pi\sqrt{\frac{2r}{g}} = \sqrt{\frac{\pi l}{g}},$$

und die Winkelgeschwindigkeit, mit der sich die Wassertheile in ihren von oben nach unten allmälig abnehmenden Kreisbahnen bewegen, $\omega = \frac{c}{r}$.

Der Mittelpunkt des Kreises, in welchem ein tieferes Wassertheilchen umläuft, bestimmt sich aus dem Halbmesser z dieses Kreises durch den Abstand y desselben von dem Mittelpunkt des ersten Kreises vom Halbmesser r, mittels der Formel

$$y = r\,Ln.\left(\frac{r}{z}\right).$$

Umgekehrt ist $z = r e^{-\frac{y}{r}}$, wo $e = 2{,}71828\ldots$, die Grundzahl des natürlichen Potenzensystemes bezeichnet. Man kann hiernach leicht ermessen, daß die Schwingungskreise mit der Tiefe außerordentlich schnell abnehmen, z. B. für $r = 10$ Fuß, ist in der Tiefe $y = 50$ Fuß, $z = 10 . e^{-0{,}2} = 3{,}50$ Fuß und in der Tiefe $y = 200$ Fuß, fällt $z = 10 . e^{-0{,}05} = 0{,}15$ Fuß aus.

Bei Wellen von geringer constanter Tiefe sind dagegen, wie auch schon Scott Russell angegeben hat, die horizontalen Bewegungen der übereinander befindlichen Wassertheile gleich groß; es behält daher der anfangs verticale Wasserfaden bei der Wellenbewegung seine verticale Stellung, verändert dagegen hierbei seine Länge und Dicke. Die einzelnen Wassertheilchen beschreiben hier geschlossene Curven von gleichem horizontalen, und von einem veränderlichen mit der Tiefe allmälig abnehmenden verticalen Durchmesser; dieselben sind jedoch nur unter der Voraussetzung, daß die Wellenhöhe gegen die Wassertiefe unendlich klein ist, Ellipsen.

Bei endlicher Tiefe des Wassers und großer Wellenhöhe sind die Gesetze der Wellenbewegung sehr complicirt.

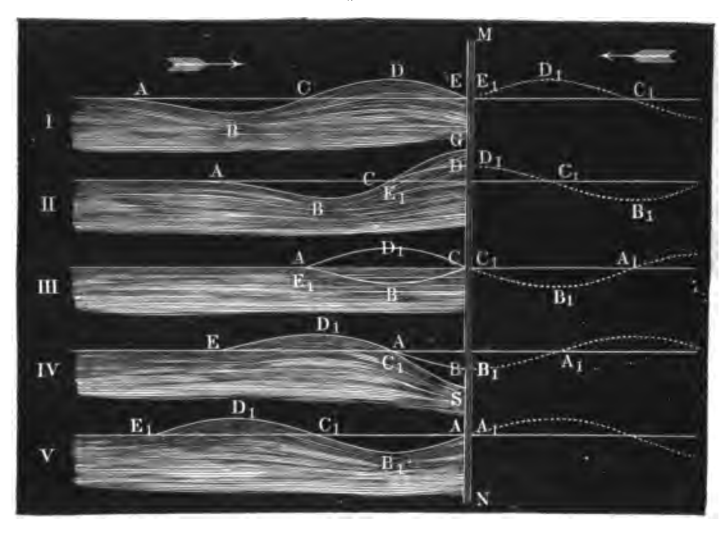
§. 28 **Interferenz der Wasserwellen.** Wenn sich zwei Wasserwellen durchkreuzen, so treten im Allgemeinen dieselben Erscheinungen ein, wie bei den Luft- und anderen Wellen; es setzt auch hier jede Welle nach dem Zusammentreffen ihre Bewegung fort, als wenn es gar nicht stattgefunden hätte; nur findet, nach Weber's Beobachtungen, ein kleiner Zeitverlust statt, so daß eine Welle ein wenig mehr Zeit braucht, einen gewissen Weg zu durchlaufen, wenn sie durch eine andere Welle hindurchgeht, als wenn sie frei fortschreitet. Kommen zwei Wellenberge zusammen, so entsteht ein fast doppelt so hoher Berg, und ebenso geben zwei Wellenthäler bei ihrem Zusammentreffen ein fast doppelt so tiefes Thal, als bei einer einfachen Welle. Die Weber'schen Versuche führen auf das Verhältniß 1 : 1,79 zwischen den Berghöhen der einfachen und der

Doppelwelle. Bei der Interferenz oder dem Zusammenkommen eines Wellenberges mit einem Wellenthale heben sich beide gegenseitig auf und es bleibt die betreffende Stelle im Niveau des ruhigen Wasserspiegels. Was die Bahnen der einzelnen Wasserelemente anlangt, so gehen diese bei dem Zusammentreffen von zwei gleichen Wellen in gerade Linien über, die im Berggipfel senkrecht, entfernt von demselben, aber schief, jedoch so stehen, daß sie sich oben gegen den Gipfel neigen.

Wenn ferner eine Wasserwelle gegen eine feste Wand anstößt, so wird sie von derselben so zurückgeworfen, als wenn sie von einem Orte herkäme, der eben so weit hinter der Wand absteht, als der Ausgangspunkt der Welle vor derselben, und es geht die zurückgeworfene Welle ebenso durch die ankommende hindurch wie zwei sich kreuzende Wellen überhaupt.

In Fig. 900, I., II. bis V. sind die Erscheinungen, welche sich beim

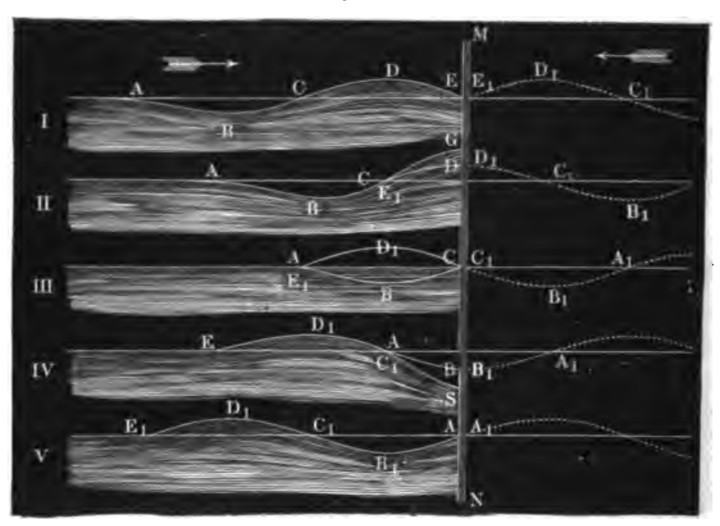
Fig. 900.



Zurückwerfen einer Welle $ABCDE$ durch eine feste Wand MN darbieten, vor Augen geführt. In I. kommt eben der Wellenberg CDE an der Wand MN an, und es beginnt das Reflectiren in Form einer umgekehrt laufenden Welle $C_1 D_1 E_1$; in II. ist der Gipfel D des Wellenberges an der Wand angekommen, und es hat sich mit demselben die Hälfte $D_1 E_1$ des zurückgeworfenen Wellenberges vereinigt, folglich entsteht ein halber Wellenberg CG von fast doppelter Höhe. In III. erreicht eben erst das Wellenthal ABC die feste Wand, während der zurückgeworfene Wellenberg $C_1 D_1 E_1$ über demselben hinweggeht; es tritt daher eine Interferenz ein, wobei die Welle einen Augenblick lang ganz verschwindet. In IV. trifft die Thalsohle

B der ankommenden Welle mit der Thalsohle B_1 der zurückgeworfenen Welle an der Wand zusammen, es bildet sich folglich ein halbes Thal $A\ S$ von der doppelten Tiefe. In V. ist endlich die ankommende Welle $ABCDE$ vollständig durch die Wand $M\ N$ zurückgeworfen, und dadurch in die umgekehrt laufende Welle $A_1\ B_1\ C_1\ D_1\ E_1$ verwandelt worden.

Fig. 901.

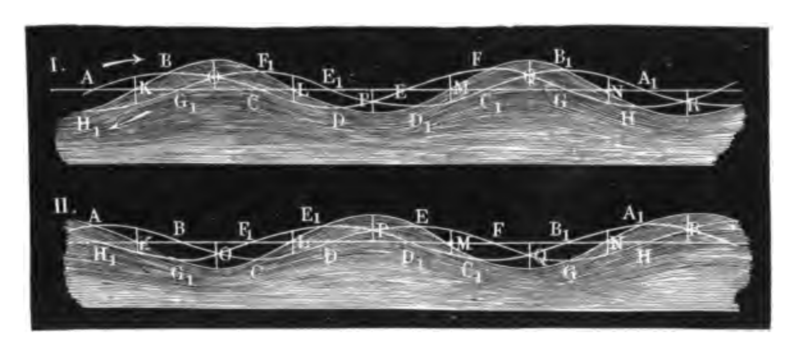


Die Bahnen der Wasserelemente erleiden durch den Anstoß an die feste Wand dieselben Veränderungen, wie bei dem Durchkreuzen zweier Wellen; es wird auch hier in der Nähe der Wand der horizontale Theil dieser Bewegung immer mehr und mehr aufgehoben, und dagegen der verticale Component mehr und mehr verstärkt, so daß nahe an der Wand diese Bahn in eine verticale, und entfernter davon in eine schiefe Linie übergeht. Stößt die Welle schief gegen eine feste Wand, so wird sie, wie jeder elastische Körper, unter demselben Winkel zurückgeworfen, unter welchem sie auftrifft. Trifft die Welle nur theilweise gegen ein Hinderniß, so treten die Erscheinungen der sogenannten Inflexion ein, wobei sich neue Wellen um die äußersten Enden dieser Hindernisse herum bilden.

Endlich entstehen die stehenden Wellen des Wassers wie die einer Saite oder eines anderen festen Körpers, wenn sich zwei gleich lange Wellen kreuzen, deren Ausgangspunkte um das 1, 3, 5, 7 . . . fache des Viertels einer Wellenlänge von einander abstehen. Es sei $ABCDEFGH$, Fig. 902 I. und II., die eine, und $A_1\ B_1\ C_1\ D_1\ E_1\ F_1\ G_1\ H_1$ die andere Welle. In den Punkten K, L, M, N, wo beide Wellenzüge von der Mittellinie gleich weit abstehen, sich also die Bewegungen aufheben, bilden sich feste Inter-

ferenzpunkte, dagegen über und unter den Punkten *O*, *P*, *Q*, *R*, wo sich beide Wellenlinien schneiden und daher die Wege verdoppeln, entstehen abwechselnd Berggipfel und Thalsohlen.

Fig. 902.



Anmerkung. Den vollständigsten Unterricht über die Wellenbewegung ertheilt folgendes Werk: Wellenlehre auf Experimente gegründet, u. s. w., von den Brüdern E. H. Weber und W. Weber, Leipzig 1825. Einen guten Auszug hiervon findet man in dem Lehrbuche der mechanischen Naturlehre von August. Auch ist hierüber nachzulesen: Müller's Lehrbuch der Physik und Meteorologie, Bd. I. Die Abhandlungen über die Wellen von Laplace, Lagrange, Flaugergues, Gerstner und Poisson findet man in dem Weber'schen Werke sehr vollständig mitgetheilt und kritisirt. Ueber Cauchy's „Wellen-Theorie" und Bidone's „Versuche" findet man Ausführlicheres in Gehler's physikalischem Wörterbuche, Art. Wellen. Emy's „Wellentheorie" ist unter dem Titel „Ueber die Bewegung der Wellen und über den Bau am Meere und im Meere" von Wiesenfeld übersetzt, und 1839 in Wien erschienen. Die Schriften von Hagen sind oben §. 27 citirt worden. Auch handelt Airy von der Theorie der Wasserwellen im Artikel „Tides and Waves" der Encyclopädia metropolitana Vol. V.

Alphabetisches Sachregister.

Die angegebenen Ziffern geben die Seitenzahl an.

A.

B

C.

H.

J.

K.

L.

M.

N.

O.

P.

Q.

R.

S.

T.

U.

V.

W.

X.

Z.

Berichtigungen.

Seite 21 Zeile 15 von unten: $y =$ statt $x =$
" 34, oben: Art. 21 statt Art. 12.
" 83 Zeile 12 von unten: due à la statt de la.
" 83 " 17 " " 0,0510 statt 0,1019.
" 86 " 10 " " $\varkappa, \varkappa$ statt k, k.
" 138 " 7 von oben: §. 73 statt §. 7.
" 248 " 3 " " vierten Abschnitt statt sechsten Capitel.
" 369, 370, 371, oben: §. 212 statt §. 211.
" 370 Zeile 17 von unten: 180 statt 1800.
" 371 " 5 von oben: Zerdrückens statt Zerreißens.
" 403 " 11 von unten: fehlt am Rand §. 228.
" 488 " 5 von oben: C statt c.
" 496 " 5 von unten: $\frac{Wl}{2e^2}$ statt $\frac{WC}{2e}$.

